Πρόβλημα 1

Ένα ηλεκτρικό δυναμικό δίνεται σε σφαιρικές συντεταγμένες ως

$$V(r,\theta) = A\frac{sin\theta}{r^2}$$

όπου $A = 2\,Vm^2$, r το μέτρο της επιβατικής ακτίνας σε μέτρα, και θ η γωνία που σχηματίζει η επιβατική ακτίνα με τον άξονα z. Να βρεθεί η x- συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο $(x,y,z) = (1,1,1)$.

<u>Λύση</u>:

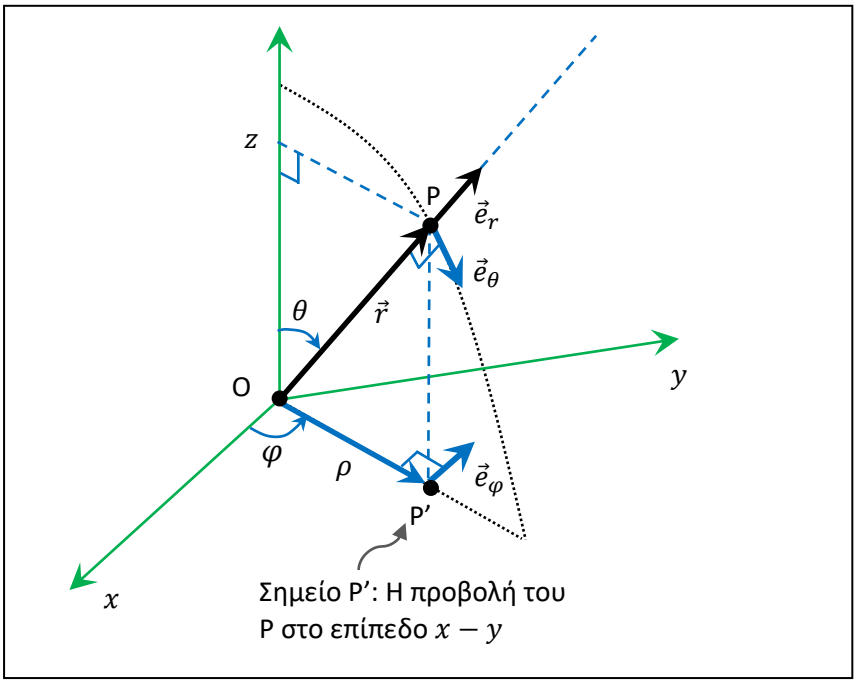
Πρέπει να βρεθεί το εξής

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

Για να γίνει αυτό, πρέπει να εκφραστεί το V συναρτήσει των καρτεσιανών συντεταγμένων x και y. Από τις σφαιρικές συντεταγμένες (δείτε παρακάτω σχήμα), έχουμε

$$sin\theta = \frac{\rho}{r}$$

όπου $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ και $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$



Το δυναμικό γίνεται

$$V = A\frac{\rho}{r^3}$$

Χρειαζόμαστε τις παραγώγους

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

Έτσι

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -A\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{1}{r^3} - 3\frac{\rho}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}\right)$$

$$E_x = -A\left(\frac{x}{\rho}\frac{1}{r^3} - 3\frac{\rho}{r^4}\frac{x}{r}\right)$$

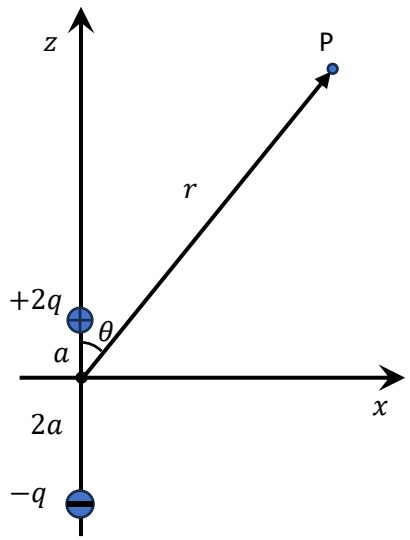
$$E_x = -\frac{A\rho x}{r^3}\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{3}{r^2}\right)$$

Στο σημείο $(x, y, z,) = (1,1,1)$ έχουμε $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$ και $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3}$ οπότε

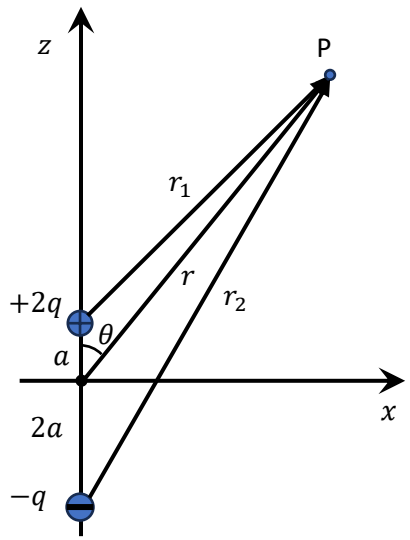
$$E_x = -\frac{2\sqrt{2}}{3^{3/2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3^{3/2}}$$

Πρόβλημα 2

Έστω στο παρακάτω σχήμα δυο σημειακά φορτία $2q$ και $-q$, με $q = 4\ \mu C$, επάνω στον άξονα z με συντεταγμένες $z = a = 1/9\ m$ και $z = -2a$ αντίστοιχα. Στο σημείο P που βρίσκεται επάνω στο επίπεδο zx με σφαιρικές συντεταγμένες $r = 2\ m$, $\theta = \pi/6$ και $\varphi = 0$, να βρεθεί η σφαιρική συνιστώσα E_θ του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ και να σχεδιασθεί επάνω στο σχήμα.



<u>Λύση</u>: φέρουμε τις αποστάσεις r_1 από το φορτίο $2q$ στο P και r_2 από το φορτίο $-q$ στο P αντίστοιχα



Τότε αυτά τα δυο σημειακά φορτία θα δημιουργούν δυναμικό στο σημείο P το οποίο από επαλληλία θα δίνεται από την

$$V = k\frac{2q}{r_1} - k\frac{q}{r_2}$$

Η ζητούμενη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου θα την υπολογίσουμε από την

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

Από το νόμο των συνημιτόνων

$$r_1{}^2 = a^2 + r^2 - 2ar\,cos\theta$$

$$r_2{}^2 = 4a^2 + r^2 - 4ar\,cos(\pi - \theta) = 4a^2 + r^2 + 4ar\,cos(\pi - \theta)$$

οπότε

$$r_1 = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\,cos\theta}$$

και

$$r_2 = \sqrt{4a^2 + r^2 + 4ar\,cos\theta}$$

Χρειαζόμαστε τις παραγωγίσεις

$$\frac{\partial r_1}{\partial \theta} = \frac{ar\,sin\theta}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\,cos\theta}} = \frac{ar\,sin\theta}{r_1}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial \theta} = \frac{-2ar\,sin\theta}{r_2}$$

Έτσι η ζητούμενη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου είναι ίση με

$$E_\theta = -\frac{1}{r}kq\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}kq\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{-2}{r_1{}^2}\frac{\partial r_1}{\partial \theta} + \frac{1}{r_2{}^2}\frac{\partial r_2}{\partial \theta}\right)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}kq\left(\frac{-2}{r_1{}^2}\frac{ar\,sin\theta}{r_1} + \frac{1}{r_2{}^2}\frac{-2ar\,sin\theta}{r_2}\right)$$

$$E_\theta = 2kaqsin\theta\left(\frac{1}{r_1{}^3} + \frac{1}{r_2{}^3}\right)$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα, έχουμε

$$2kaqsin\theta = 4 \times 10^3\ S.I.$$

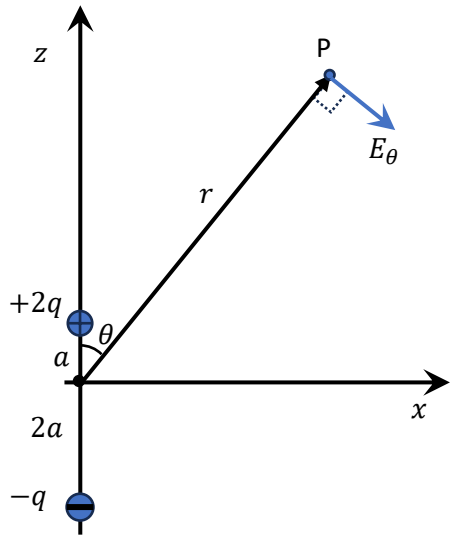
$$r_1 = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\,cos\theta} = 1.9\ m$$

$$r_2 = \sqrt{4a^2 + r^2 + 4ar\,cos\theta} = 4.1\ m$$

Οπότε

$$E_\theta = 4 \times 10^3\left(\frac{1}{1.9^3} + \frac{1}{4.1^3}\right) = 637\frac{V}{m}$$

Είσαι ιστός αυτή φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{r}$, και με φορά προς τα κάτω δηλαδή αυτήν της αύξησης της γωνίας θ.


z
P
E_θ
r
+2q
θ
a
x
2a
−q

Πρόβλημα 3

Ένα ηλεκτρικό δυναμικό σε κάποιο χώρο δίνεται σε σφαιρικές συντεταγμένες ως

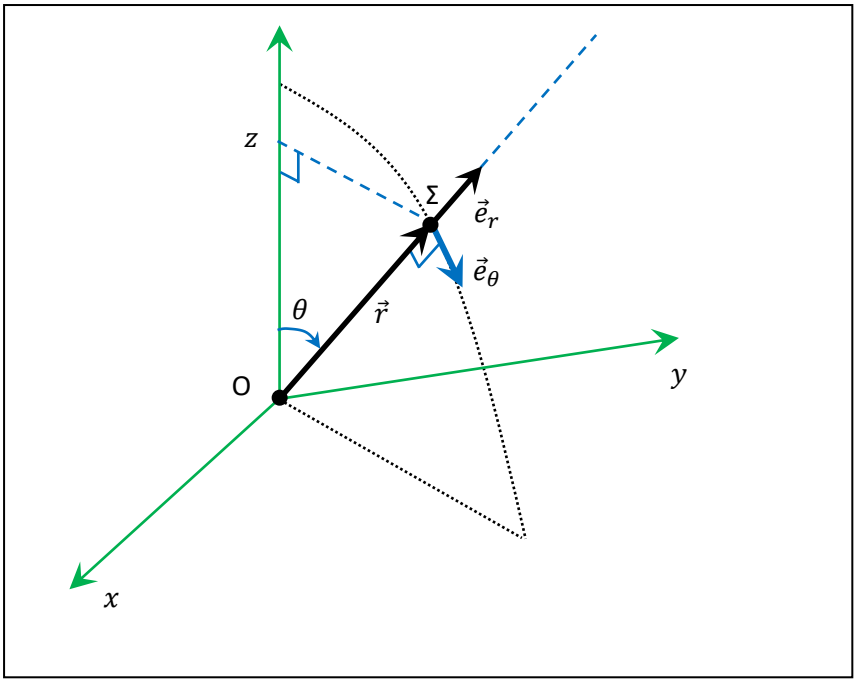
$$V(r,\theta) = -\alpha ln(rsin\theta) - \frac{\beta}{r}$$

όπου $\alpha = 2\,V$ και $\beta = 16\,Vm$. Σε αυτόν τον χώρο τοποθετείται σημειακή μάζα $m = 2\,g$ με φορτίο $q = 20\,\mu C$. Κάποια στιγμή βρίσκεται στο σημείο Σ με συντεταγμένες $x = 1.2\,m$, $y = 1.6\,m$ και $z = 2\sqrt{3}\,m$, όπου εκτελεί τοπικά μια κυκλική τροχιά γύρω από την αρχή των συντεταγμένων Ο. Να βρεθεί το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης της m σε αυτό το σημείο

<u>Λύση</u>:

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η κυκλική τροχιά αυτό το δεδομένο σημείο όμως προφανώς ο κύκλος έχει ακτίνα την σφαιρική συντεταγμένη r. Η κεντρομόλος δύναμη F_κ είναι κατά μήκος αυτής της ακτίνας προς το Ο και η αντίστοιχη κεντρομόλος επιτάχυνση ισούται με

$$a_\kappa = \frac{F_\kappa}{m}$$



Ο γνωστόν η δύναμη στον ηλεκτρισμό ισούται με

$$F_\kappa = qE_\kappa$$

όπου το E_κ είναι η συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου κατά μήκος της κεντρομόλου κατεύθυνσης, δηλαδή το E_r, το οποίο το λαμβάνουμε με παραγώγιση του δυναμικού ως εξής

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$$

Στο υπο-εξέταση σημείο

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 4$$

και άρα

$$E_r = \frac{2}{4} - \frac{16}{4^2} = -0.5\frac{V}{m}$$

Η αντίστοιχη δύναμη είναι η

$$F_r = qE_r = -2 \times 10^{-5} \times 0.5 = -10^{-5}\ N$$

που όντως έχει τη σωστή φορά εφόσον είναι μείον και άρα κατευθύνεται προς το κέντρο Ο. Τέλος, ζητούμενη κεντρομόλος επιτάχυνση ισούται με

$$a_\kappa = \frac{F_\kappa}{m} = \frac{-10^{-5}}{2 \times 10^{-3}} = -5 \times 10^{-3}\ m/s^2$$

Πρόβλημα 4

Ένα ηλεκτρικό δυναμικό σε κάποιο χώρο δίνεται σε σφαιρικές συντεταγμένες ως

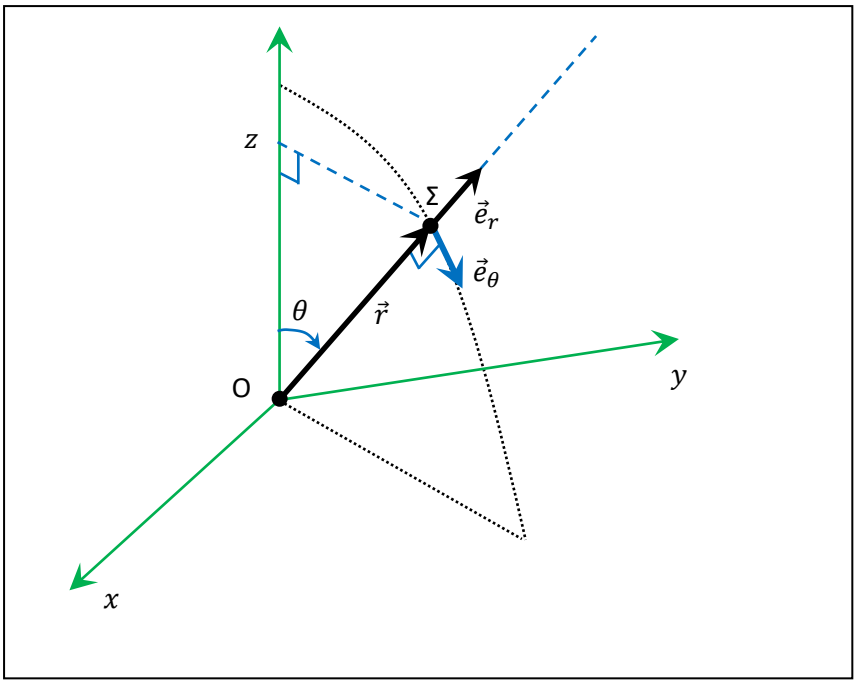
$$V(r,\theta) = -\alpha ln(rsin\theta) - \frac{\beta}{r}$$

όπου $\alpha = 2\,V$ και $\beta = 2\,Vm$. Σε αυτόν τον χώρο τοποθετείται σημειακή μάζα $m = 1.5\,g$ με φορτίο $q = \sqrt{3}\,\mu C$. Κάποια στιγμή βρίσκεται στο σημείο Σ με συντεταγμένες $x = 1.2\,m$, $y = 1.6\,m$ και $z = 2\sqrt{3}\,m$ όπου εκτελεί τοπικά μια κυκλική τροχιά γύρω από την αρχή των συντεταγμένων Ο. Να βρεθεί το μέτρο της επιτρόχιου επιτάχυνσης της m σε αυτό το σημείο

<u>Λύση</u>:

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η κυκλική τροχιά αυτό το δεδομένο σημείο όμως προφανώς ο κύκλος έχει ακτίνα την σφαιρική συντεταγμένη r. Η επιτρόχιος δύναμη F_ε είναι κατά μήκος της εφαπτομένης αυτής της τροχιάς και η αντίστοιχη επιτρόχιος επιτάχυνση ισούται με

$$a_\varepsilon = \frac{F_\varepsilon}{m}$$



Ο γνωστόν η δύναμη στον ηλεκτρισμό ισούται με

$$F_\varepsilon = qE_\varepsilon$$

όπου το E_ε είναι η συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου κατά μήκος της εφαπτομένης αυτής της τροχιάς, δηλαδή το E_θ, το οποίο το λαμβάνουμε με παραγώγιση του δυναμικού ως εξής

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\alpha}{rsin\theta}cos\theta = \frac{\alpha}{rtan\theta}$$

Στο υπο-εξέταση σημείο

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 4$$

και

$$\theta = atan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) = atan\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = atan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Εμείς χρειαζόμαστε την εφαπτομένη $tan\theta$ αυτής της γωνίας οπότε έχουμε

$$tan\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Μαζεύοντας τα όλα μαζί

$$E_\theta = \frac{\alpha}{rtan\theta} = \frac{2}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\ \frac{V}{m}$$

Η αντίστοιχη δύναμη είναι η

$$F_\theta = qE_\theta = \sqrt{3} \times 10^{-6} \times \frac{1}{2}\sqrt{3} = 1.5 \times 10^{-6}\ N$$

Τέλος, η ζητούμενη επιτρόχιος επιτάχυνση ισούται με

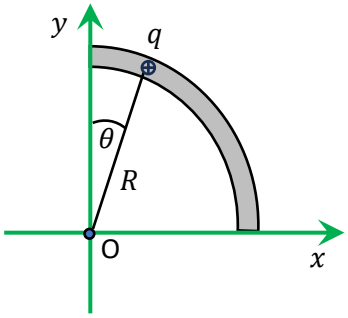
$$a_\theta = \frac{F_\theta}{m} = \frac{1.5 \times 10^{-6}\ N}{1.5 \times 10^{-3}} = 1 \times 10^{-3}\ m/s^2$$

Πρόβλημα 5

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ένα σημειακό φορτίο $q = 8\ \mu C$ είναι περιορισμένο να κινείται μέσα σε έναν οδηγό με σχήμα τεταρτοκυκλίου ακτίνας $R = 2\ m$. Στο χώρο υπάρχει ηλεκτρικό δυναμικό που δίνεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες ως

$$V(\rho, \varphi) = \frac{\alpha}{\rho^2} cos\varphi$$

με $\alpha = 5\ Vm^2$. Αρχικά το σημειακό φορτίο βρίσκεται στον άξονα y. Να γίνει η γραφική παράσταση της <u>ηλεκτρικής δύναμης</u> που ασκείται στο q συναρτήσει της γωνίας θ καθώς αυτό κινείται μέσα στον οδηγό από τον άξονα y έως τον άξονα x



<u>Λύση</u>:

Η ηλεκτρική δύναμη κατά μήκος αυτής της τροχιάς είναι στην ουσία αντιπαράλληλη με το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{e}_\varphi$ στις πολικές συντεταγμένες και άρα θα ισούται με το σημειακό φορτίο q επί την αντίστοιχη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου E_φ, την οποία μπορούμε να την βρούμε με παραγώγιση από το δεδομένο ηλεκτρικό δυναμικό

$$E_\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\alpha}{\rho^3} sin\varphi$$

επάνω στον οδηγό, η πολική ακτίνα ρ είναι σταθερή και ίση με R. Επομένως έχουμε

$$F_\varphi = E_\varphi = \frac{q\alpha}{R^3} sin\varphi$$

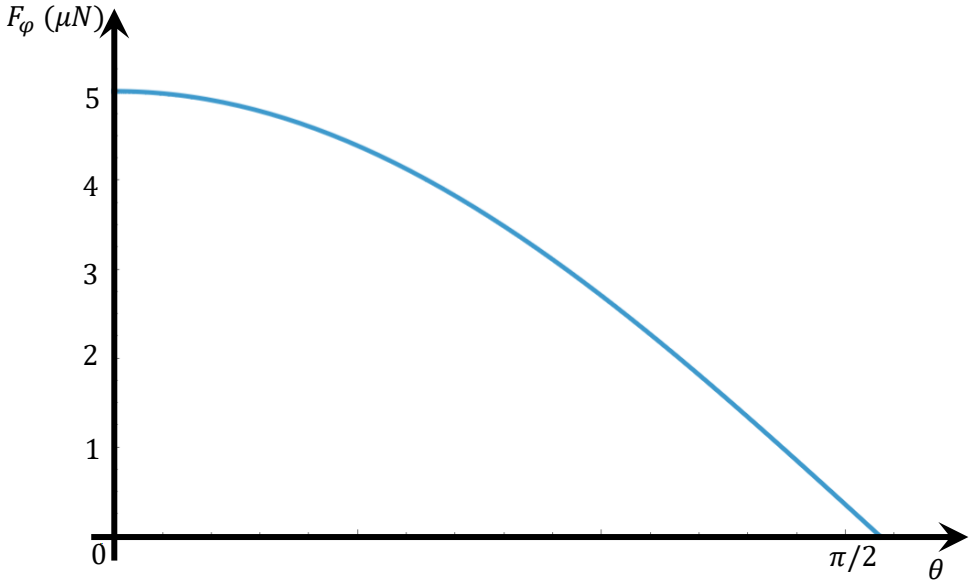
Εύκολα βλέπουμε από το δεδομένο σχήμα ότι η γωνία θ είναι συμπληρωματική της γωνίας φ και έτσι παραπάνω γράφεται

$$F_\varphi = \frac{q\alpha}{R^3} cos\theta$$

Στην αρχική θέση έχουμε $\theta = 0$ f ενώ στην τελική $\theta = \pi/2$. Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και έχουμε

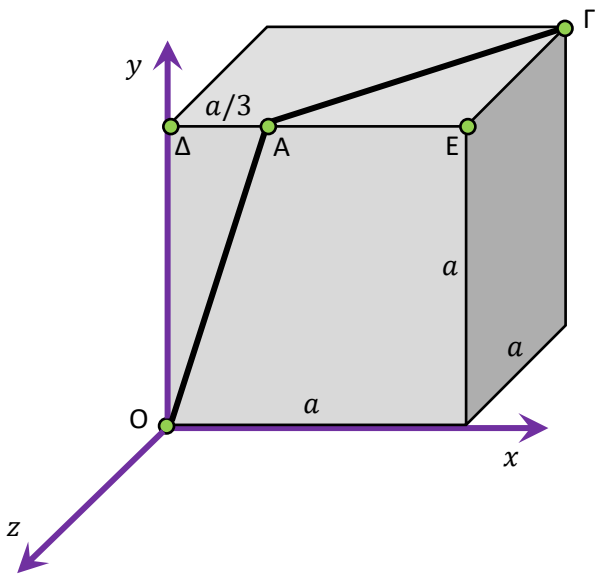
$$F_\varphi = \frac{8 \times 10^{-6} \times 5}{2^3} cos\theta = 5cos\theta\ \mu N$$

Η γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω


F_φ (μN)
5
4
3
2
1
0
$\pi/2$
θ

Πρόβλημα 6

Στο παρακάτω σχήμα εικονίζεται ένας μονωτικός κύβος πλευράς a, πάνω στον οποίο έχουν στερεωθεί δυο ευθύγραμμοι λεπτοί αγωγοί, ο ΟΑ και ο ΑΓ, όπου το Ο είναι η αρχή των συντεταγμένων. Το σημείο Α βρίσκεται στο $1/3$ της πάνω ακμής ΔΕ του κύβου, και το Γ είναι η απέναντι διαγώνια κορυφή του Ο. Ένας φοιτητής εφαρμόζει μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B\vec{e}_y$ και τροφοδοτεί με το ίδιο ρεύμα I τους δυο αγωγούς, με το ρεύμα να εισάγεται στο σημείο Ο και να εξέρχεται στο σημείο Γ. Να βρεθεί η συνολική μαγνητική δύναμη που ασκείται στους δυο αγωγούς



<u>Λύση</u>:

Αγωγός ΟΑ, δείτε παρακάτω σχήμα.

Έστω υ το μήκος της ΟΑ. Το μαγνητικό πεδίο τέμνει τον αγωγό υπό γωνία θ και έτσι το μέτρο της δύναμης ισούται με

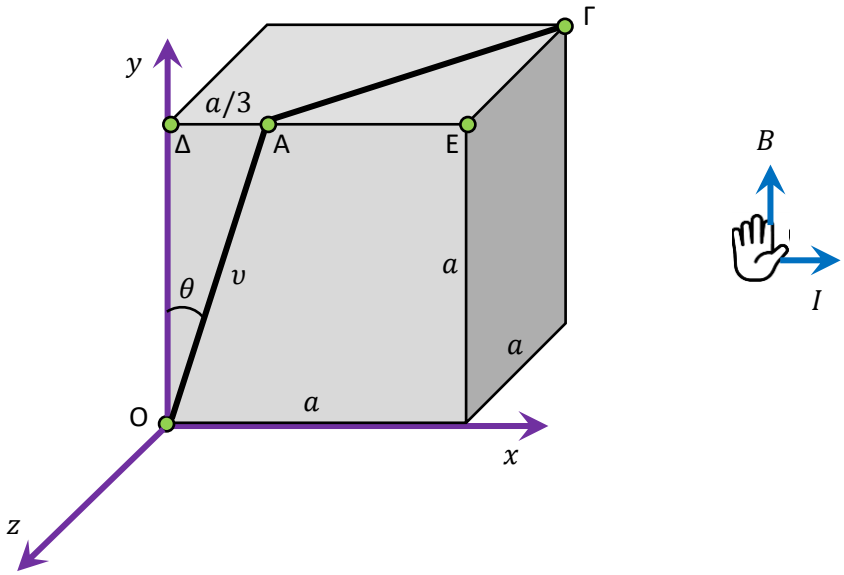
$$F_{OA} = BI\upsilon sin\theta$$

Από το τρίγωνο ΟΑΔ έχουμε

$$F_{OA} = BI\frac{a}{3}$$

Ο κανόνας του δεξιού χεριού φαίνεται στη δεξιά μεριά του σχήματος και η παλάμη ωθεί προς τον άξονα $+z$. Τελικά

$$\vec{F}_{OA} = BI\frac{a}{3}\vec{e}_z$$



Αγωγός ΑΓ, δείτε κάτοψη της πάνω πλευράς του κύβου στο παρακάτω σχήμα.

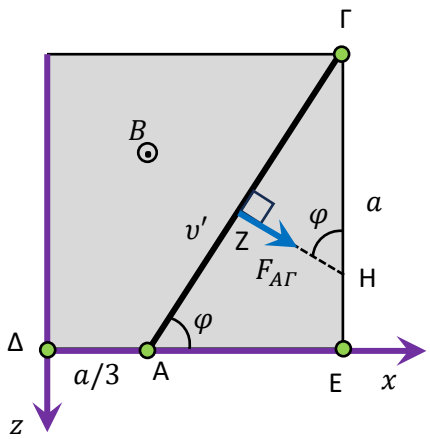
Έστω υ' το μήκος της ΑΓ. Το μαγνητικό πεδίο βρίσκεται κάθετα στην σελίδα και άρα τέμνει κάθετα τον αγωγό και έτσι το μέτρο της δύναμης ισούται με

$$F_{A\Gamma} = BI\upsilon'$$

Έστω φ η γωνία που φαίνεται στο σχήμα. Αναλύουμε την παραπάνω δύναμη σε συνιστώσες και έχουμε

$$F_x = F_{A\Gamma} sin\varphi = BI\upsilon' sin\varphi$$

$$F_z = F_{A\Gamma} cos\varphi = BI\upsilon' cos\varphi$$



Με την βοήθεια του τριγώνου ΑΓΕ, έχουμε

$$F_x = BIa$$

$$F_z = BI\frac{2a}{3}$$

Έτσι η διανυσματική έκφραση της δύναμης $F_{A\Gamma}$ είναι η

$$\vec{F}_{A\Gamma} = BIa\vec{e}_x + BI\frac{2a}{3}\vec{e}_z$$

Η συνολική δύναμη είναι ίση με

$$\vec{F} = \vec{F}_{OA} + \vec{F}_{A\Gamma} = BI\frac{a}{3}\vec{e}_z + BIa\vec{e}_x + BI\frac{2a}{3}\vec{e}_z = BIa\vec{e}_x + BIa\vec{e}_z$$