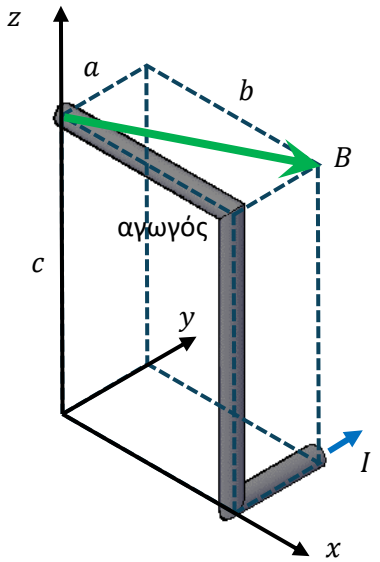
ΥΛΗ ΠΡΟΟΔΟΥ Β – ΚΟΙΝΟ ΣΕ ΟΛΟΥΣ

ΘΕΜΑ 1. Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο (διακεκομμένη γραμμή) έχει $a = 2 + \psi$, $b = 2a$ και $c = 3a$, όλα σε μέτρα. Η χοντρή, γκρίζα γραμμή είναι αγωγός και διαρρέεται από ρεύμα $I = 2\ A$. Στον χώρο υπάρχει παντού ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο $B = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y$ όπου οι συνιστώσες B_x και B_y έχουν την ίδια αριθμητική τιμή σε Tesla με τα μήκη b και a (για αυτό και στο σχήμα εμφανίζεται το B να συμπίπτει με την διαγώνιο της πάνω έδρας του ορθογωνίου). Για την δύναμη που δέχεται ο αγωγός από το μαγνητικό πεδίο, να δοθούν **(α)** το μέτρο, **(β)** η φορά της σε σχέση με τον άξονα z και **(γ)** η φορά της σε σχέση με τον άξονα x. (ΜΟΝΑΔΕΣ: 2-1-2)



Λύση:

(α) Εξετάζουμε την δύναμη σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα ξεχωριστά.

Τμήμα μήκους b επάνω. Κατά μέτρο $F_1 = B_y Ib = Iab = 2Ia^2$ φορά προς $+z$. (0.5 Μονάδα)

Τμήμα μήκους a κάτω. Κατά μέτρο $F_2 = B_x Ia = Iab = 2Ia^2$ φορά προς $-z$. (0.5 Μονάδα)

Τμήμα μήκους c μέση. Κατά μέτρο

$F_3 = BIc = \sqrt{a^2 + b^2}Ic = 3a\sqrt{a^2 + 4a^2}I = 3\sqrt{5}Ia^2 = 6\sqrt{5}(\psi + 2)^2$ (0.5 Μονάδα)

Βλέπουμε ότι οι F_1 και F_2 αλληλοαναιρούνται και οπότε μένει μόνο η F_3 (0.5 Μονάδα).

(β) Αυτή έχει φορά κάθετη στον z (1 Μονάδα)

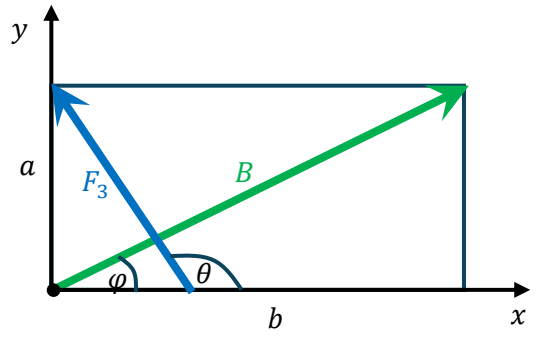
(γ) αλλά και κάθετη στο B προς $-x, y$ (1 Μονάδα), δείτε παρακάτω σχήμα. Αφού η γωνία του B με τον άξονα x είναι ίση με

$$\varphi = arctan\left(\frac{a}{b}\right) = arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 26.5°$$

τότε η δύναμη θα σχηματίζει γωνία

$$\theta = \varphi + \frac{\pi}{2} = 116.5°$$

(1 Μονάδα) με τον ίδιο άξονα



<u>Εναλλακτική λύση</u>:

(α) Παίρνουμε τον ευθύγραμμο αγωγό που ενώνει τα αρχικά – τελικά σημεία με συντεταγμένες

$$(0,0,c)$$

και

$$(b,a,0)$$

δηλαδή το διάνυσμα μήκους είναι το

$$\vec{L} = (b,a,-c)$$

(1 Μονάδα)

Από την εκφώνηση, το μαγνητικό πεδίο είναι ίσο με

$$\vec{B} = (b,a,0)$$

και έτσι η δύναμη δίνεται από το εξωτερικό γινόμενο

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B} = (-ac, bc, 0)$$

(0.5 Μονάδα) με μέτρο

$$F = c\sqrt{a^2 + b^2}$$

(0.5 Μονάδα)

(β) Βλέπουμε ότι απουσιάζει η z συνιστώσα στην F και άρα αυτή είναι κάθετη σε αυτόν τον άξονα

(γ) Στο επίπεδο xy οι συνιστώσες της F είναι $(-ac, bc)$ και έτσι είναι της μορφής $-x, y$ (1 Μονάδα) με γωνία ως προς τον άξονα x ίση με

$$\varphi = arctan\left(\frac{bc}{-ac}\right) = arctan(-2) = 116.5°$$

(1 Μονάδα) με τον ίδιο άξονα

ΘΕΜΑ 2. Σε ένα κύκλωμα σειράς RLC εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση:

$$v(t) = 100sin(\omega t) \text{ (SI)}$$

Δίνονται: $\omega = 50 + \psi$ $R = 150\,\Omega, L = 2.1\,H, C = 100\,\mu F$. Να βρεθούν: **(α)** Η επαγωγική και χωρητική εμπέδηση του κυκλώματος, **(β)** Το πλάτος του ρεύματος, **(γ)** Η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος και αν το κύκλωμα είναι επαγωγικό ή χωρητικό.

Λύση:

Για $\omega = 50\,rad/s$

(α) Εμπεδήσεις X_L, X_C

$$X_L = \omega L = 105\,\Omega$$

(0.5 Μονάδα)

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 200\,\Omega$$

(0.5 Μονάδα)

(β) Συνολική Εμπέδηση Z

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$
$$X_L - X_C = 105 - 200 = -95\,\Omega$$
$$Z = \sqrt{150^2 + (-95)^2} = 177.5\,\Omega$$

(1 Μονάδα)

Πλάτος:

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{100}{177.5} \approx 0.56\text{ A}$$

(1 Μονάδα)

(γ) Διαφορά φάσης

$$tan(\varphi) = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{-95}{150} = -0.633$$

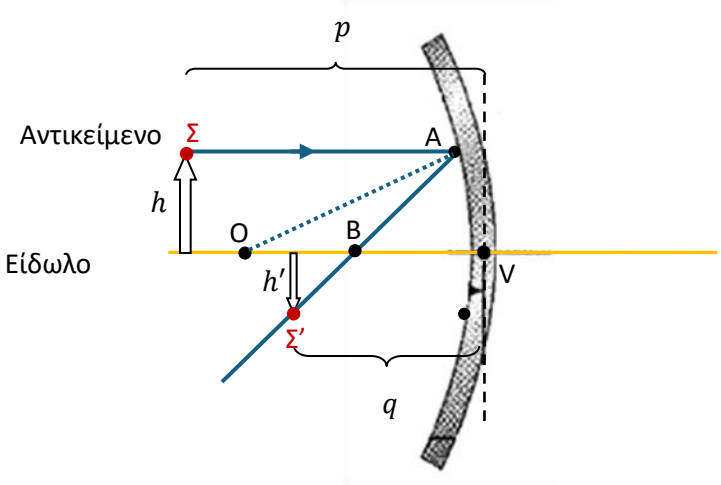
(0.5 Μονάδα)

$$\varphi = arctan(-0.633) \approx -32.3°$$

(1 Μονάδα)

Αρνητική φάση ⇒ χωρητικό κύκλωμα (0.5 Μονάδα)

ΘΕΜΑ 3. Στο παρακάτω σχήμα εικονίζεται ένα κάτοπτρο με κέντρο το Ο, βάση το σημείο V και ακτίνα $R = 2(5 + \psi/10)\ cm$. Ένα αντικείμενο τοποθετείται σε κάποια απόσταση p από τη βάση V. Μια φωτεινή ακτίνα ΣΑ εκπέμπεται από το ψηλότερο σημείο Σ του αντικειμένου παράλληλη με τον οπτικό άξονα ΟV και μετά από την ανάκλαση της, καταλήγει στο αντίστοιχο σημείο Σ' του ειδώλου αφού πρώτα τέμνει τον ΟV στο σημείο Β. Η γωνία ΣΑΟ είναι ίση με $30°$. Να βρεθούν: **(α)** η απόσταση ΒV, **(β)** η απόσταση ΒΑ, **(γ)** το μήκος τόξου ΑV.



<u>Λύση</u>:

Έστω λύσεις με $\psi = 0$ οπότε $R = 10\ cm$

(α) Αφού $\Sigma A\ //$ στον οπτικό άξονα, το Β είναι η εστία του κατόπτρου (0.5 Μονάδα) και άρα η απόσταση VB είναι η εστιακή απόσταση η οποία σύμφωνα με την θεωρία είναι ίση με $R/2$, (0.5 Μονάδα) δηλαδή

$$5\ cm$$

(β) Η γεωμετρική ακτίνα ΟΑ είναι το τοπικό κάθετο στο Α (0.5 Μονάδα) και άρα η γωνία ανάκλασης $\widehat{OAB}$ ισούται με τη γωνία πρόσπτωσης $\widehat{\Sigma AO}$ (0.5 Μονάδα) οπότε

$$\widehat{OAB} = 30°$$

Επίσης η $\widehat{AOV}$ ισούται με τη γωνία $\widehat{\Sigma AO}$ ως εντός εναλλάξ, δηλαδή

$$\widehat{AOV} = 30°$$

που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΟΒΑ είναι ισοσκελές (έχει τις γωνίες του Ο και Α ίσες) και άρα και τις αντίστοιχες δυο πλευρές του ίσες (0.5 Μονάδα):

$$BA = OB$$

Όμως η AV είναι η ακτίνα και είδαμε ότι $VB = R/2$ και έτσι

$$OB = AV - VB = \frac{R}{2} = 5\ cm$$

(0.5 Μονάδα). Τελικά

$$BA = 5\ cm$$

(Εναλλακτικά κάποιος μπορεί να εφαρμόσει τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο AOB:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2\,OA\,OB\,cos(\widehat{OAB})$$

(0.5 Μονάδα) που όπως προαναφέρθηκε η ΟΑ είναι η γεωμετρική ακτίνα και άρα είναι ίση με R, δεκτό).

(γ) Το τόξο AV αντιστοιχεί στην κεντρική γωνία $\widehat{AOV}$ η οποία είναι εντός-εναλλάξ με την $\widehat{OAB}$ (0.5 Μονάδα) και άρα

$$\widehat{AOV} = 30°$$

Σε ακτίνια:

$$\theta = 30° \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

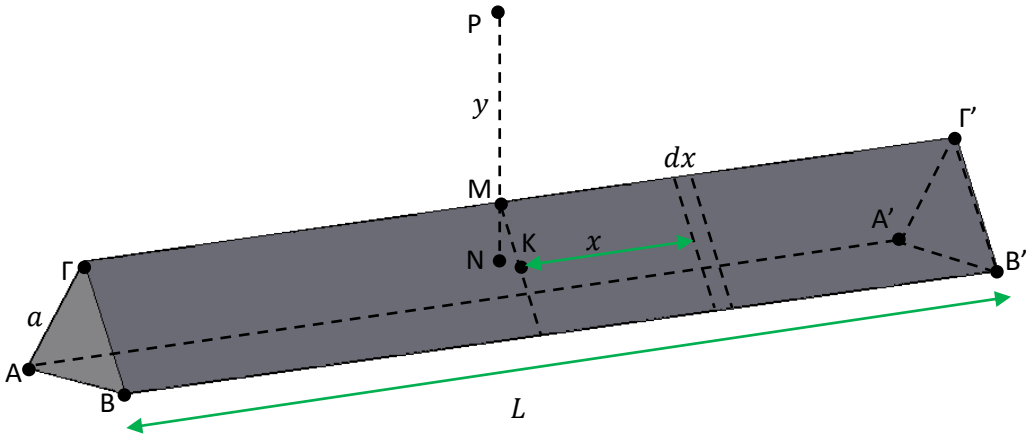
(0.5 Μονάδα). Μήκος τόξου

$$s = R\theta = 10 \cdot \frac{\pi}{6} \approx 5.23\ cm$$

(1 Μονάδα)

ΥΛΗ ΠΡΟΟΔΟΥ Α – Προεραιτικό για όσους κρατούν τον βαθμό της Προόδου

ΘΕΜΑ 4: Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια μεταλλική συμπαγής ράβδος σταθερής τριγωνικής διατομής ΑΒΓ με μήκος $L = 10\,m$, όπου το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο με πλευρά $a = 2 + \xi/10$ εκατοστά. Ένας φοιτητής τρίβει την τριγωνική βάση ΑΒΓ με μαλλί ώστε να μεταφερθεί φορτίο $+20\,\mu C$ σε αυτή. Βρείτε: **(α)** Το ηλεκτρικό πεδίο (κατά μέτρο) στο σημείο Κ που είναι το μέσο της πλαϊνής πλευράς ΓΒΒ'Γ', **(β)** ομοίως στο σημείο Ν που βρίσκεται $a/2$ χαμηλότερα από το Μ (κατά μήκος της μεσοκαθέτου ΡΜΝ της κάτω βάσης ΑΒΒ'Α' της ράβδου). **(γ)** Θεωρήστε μια λεπτή λωρίδα πάχους $dx = 0.1\,cm$ που απέχει απόσταση $x = 2\xi$ από το Κ (κατά μήκος της). Βρείτε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου που η λωρίδα παραγάγει στο σημείο Ρ το οποίο απέχει απόσταση $y = 5\,m \gg a$ ώστε η λωρίδα να θεωρείται ως σημείο. (ΜΟΝΑΔΕΣ: 1-1-3)



Λύση:

Έστω $\xi = 2$ οπότε $a = 2.2\,cm = 0.022\,m$

(α) Αφού η ράβδος είναι μεταλλική, δηλαδή αγώγιμη, τότε το φορτίο θα κατανεμηθεί σε όλη την εξωτερική επιφάνεια της (0.5 μονάδα).

Αγνοώντας τις μικρές τριγωνικές βάσεις, η εξωτερική επιφάνεια της δοκού είναι ίση με $A = 3aL = 0.66\,m^2$ (0.5 μονάδα) και έτσι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι ίση με

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{3aL} = 3\,10^{-5}\,C/m^2$$

(0.5 μονάδα). Το ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια ενός αγωγού όπως στο σημείο M, είναι ίσο κατά μέτρο με

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 3.42\,10^6\,\frac{N}{C}$$

(β) Στο εσωτερικό ράβδου πάντα $E = 0$ (1 μονάδα)

(γ) Αφού το φορτίο κατανέμεται ομοιόμορφα σε αγωγούς, τότε παίρνοντας λόγους μηκών και φορτίων, μπορούμε να βρούμε για το φορτίο dQ της λωρίδας (1 μονάδα)

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dx}{x}$$

ή

$$dQ = Q\frac{dx}{x} = 5\ 10^{-7}\ C$$

(Εναλλακτικά κάποιοι υπολόγισαν το φορτίο από την επιφανειακή πυκνότητα σ ως εξής: Το στοιχειώδες τμήμα έχει εμβαδό $dA = 3adx$ και έτσι

$$dq = \sigma dA = \frac{Q}{3aL}3adx = Q\frac{dx}{x}$$

δεκτό)

Η απόσταση r της λωρίδας (θεωρώντας της ως σημείο) από το σημείο Ρ δίνεται από το Πυθαγόρειο θεώρημα ως

$$r^2 = x^2 + y^2$$

αλλά επειδή το y είναι σε μέτρα ενώ το x σε εκατοστά, $r \approx y = 5\ m$ (0.5 μονάδα)

Το ηλεκτρικό πεδίο στο Ρ δίνεται από τον τύπο του σημειακού φορτίου

$$dE = k\frac{dQ}{r^2} = 180\ N/C$$

(0.5 μονάδα)

ΘΕΜΑ 5: Ένα σημειακό φορτίο $Q = 100\ \mu C$ τοποθετείται στο σημείο $(x, y) = (0, 2\xi)$ σε m. (α) Να βρεθεί το ηλεκτρικό δυναμικό στην αρχή των συντεταγμένων.

Το ίδιο φορτίο κατανέμεται ομοιόμορφα σε μια λεπτή ράβδο, τοποθετημένη έτσι ώστε τα άκρα της να είναι στα σημεία $(x, y) = (\pm\xi, 2)$ σε m. Να βρεθεί (β) η γραμμική πυκνότητα φορτίου της ράβδου και (γ) το ηλεκτρικό δυναμικό στην αρχή των συντεταγμένων, "τεμαχίζοντας" την ράβδο. Σε όλα τα παραπάνω, να θεωρηθεί ότι η γείωση είναι στο άπειρο. Μπορεί να σας φανούν χρήσιμα κάποια από τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\int \frac{xdx}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{x}{a + \sqrt{x^2 + a^2}} \right|$$

<u>Λύση</u>:

(α) (0.5 μονάδα) σωστός τύπος σημειακού φορτίου

$$V = k\frac{Q}{r}$$

(0.5 μονάδα) σωστός υπολογισμός του r

Για $\xi = 1$ τότε $(x, y) = (0,2)$ και το φορτίο $Q = 100\ \mu C$ απέχει απόσταση $r = 2\ m$ από την αρχή και έτσι

$$V = k\frac{Q}{r} = 9\ 10^9 \frac{100\ 10^{-6}}{2} = 4.5\ 10^5\ V$$

Για $\xi = 2$ τότε $(x, y) = (0,4)$ και το φορτίο $Q = 100\ \mu C$ απέχει απόσταση $r = 4\ m$ από την αρχή και έτσι

$$V = k\frac{Q}{r} = 9\ 10^9 \frac{100\ 10^{-6}}{4} = 2.25\ 10^5\ V$$

Για $\xi = 3$ τότε $(x, y) = (0,6)$ και το φορτίο $Q = 100\ \mu C$ απέχει απόσταση $r = 4\ m$ από την αρχή και έτσι

$$V = k\frac{Q}{r} = 9\ 10^9 \frac{100\ 10^{-6}}{6} = 1.5\ 10^5\ V$$

(β) Η ράβδος φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σωστό μήκος (0.5 μονάδα) και σωστός υπολογισμός λ και μονάδες (0.5 μονάδα)

Για $\xi = 1$ μήκος

$$L = 1 - (-1) = 2\ m$$

και άρα γραμμική πυκνότητα

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{100\ \mu C}{2\ m} = 50\ \mu C/m$$

Για $\xi = 2$ έχει μήκος

$$L = 2 - (-2) = 4\ m$$

και άρα γραμμική πυκνότητα

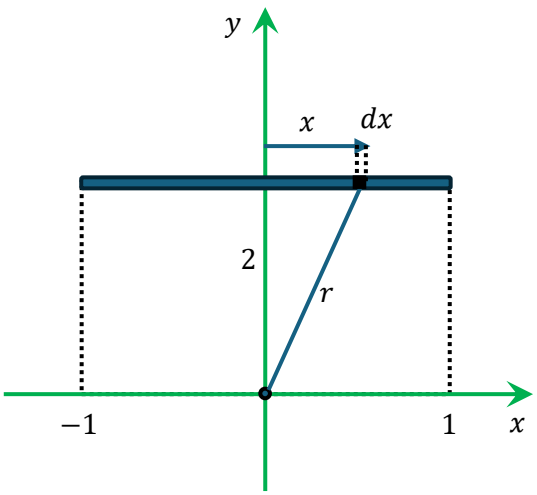
$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{100\ \mu C}{4\ m} = 25\ \mu C/m$$

Για $\xi = 3$ έχει μήκος

$$L = 3 - (-3) = 6\ m$$

και άρα γραμμική πυκνότητα

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{100\ \mu C}{6\ m} = 16.7\ \mu C/m$$



(γ) Όπως φαίνεται και στο σχήμα, τεμαχίζουμε τη ράβδο σε μικρά τμήματα. Έστω dx το μήκος ενός από αυτά (1 μονάδα). Από τον ορισμό του λ, το τμήμα περιέχει φορτίο

$$dq = \lambda dx$$

και δημιουργεί δυναμικό dV στην αρχή των αξόνων. Έστω ένα τέτοιο κομμάτι dx σε απόσταση x από το κέντρο της ράβδου προς τον θετικό άξονα x, Το οποίο δημιουργεί δυναμικό

$$dV = k\frac{dq}{r}$$

(0.5 μονάδα) στην αρχή των αξόνων όπου

$$r = \sqrt{x^2 + 2^2}$$

(0.5 μονάδα).

Για $\xi = 1$

$$r = \sqrt{x^2 + 2^2}$$

Συλλέγοντας όλα τα παραπάνω

$$dV = k\lambda \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

Ολοκληρώνοντας σε όλο το x έχουμε

$$V = k\lambda \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

(0.5 μονάδα όρια ολοκλήρωσης + 0.5 μονάδα σωστή χρήση ολοκληρωμάτων).

Από τα δεδομένα ολοκληρώματα

$$V = k\lambda \left[ln(x + \sqrt{x^2 + 2^2})\right]_{-1}^{1} = 9\ 10^9 \times 50\ 10^{-6}\ ln\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{-1 + \sqrt{5}}\right) = 4.33\ 10^6\ V$$

Ομοίως για $\xi = 2$

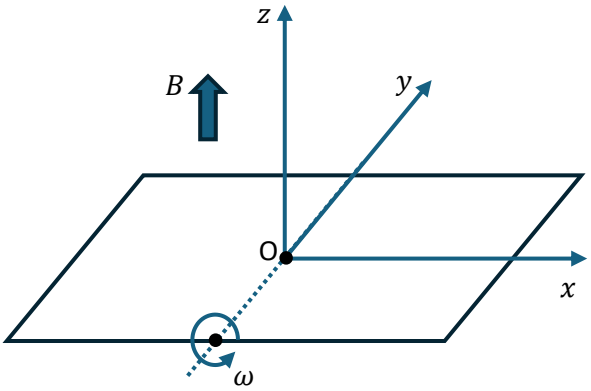
$$V = k\lambda \left[ln(x + \sqrt{x^2 + 2^2})\right]_{-2}^{2} = 9\ 10^9 \times 25\ 10^{-6}\ ln\left(\frac{2 + \sqrt{8}}{-2 + \sqrt{8}}\right) = 3.96\ 10^6\ V$$

Ομοίως για $\xi = 3$

$$V = k\lambda \left[ln(x + \sqrt{x^2 + 2^2})\right]_{-3}^{3} = 9\ 10^9 \times 16.7\ 10^{-6}\ ln\left(\frac{3 + \sqrt{13}}{-3 + \sqrt{13}}\right) = 3.59\ \ 10^6\ V$$

Αρνητική βαθμολόγηση: εάν κάποιος ολοκλήρωσε κατευθείαν σε dx ενώ ο τύπος έχει μέσα του dq (-1.5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 6: Το παρακάτω ορθογώνιο αγώγιμο πλαίσιο διαστάσεων $\Delta x \Delta y = 3 \times 2\, m^2$ περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = 2 + \psi/5\ [rad/s]$ γύρω από τον άξονα y και στο $t = 0$ βρίσκεται μέσα στο επίπεδο xy όπως στο σχήμα (το κέντρο του συμπίπτει με την αρχή των αξόνων). Παντού στον χώρο υπάρχει σταθερό μαγνητικό πεδίο $B = 0.4\, T$ με την φορά που δείχνεται. Να βρεθεί **(α)** η μαγνητική ροή μέσα από το πλαίσιο στο $t = 0$, **(β)** η μαγνητική ροή μέσα από το πλαίσιο στο $t = \pi/(2\omega)$ και **(γ)** η επαγόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη <u>κατά απόλυτη τιμή</u> την χρονική στιγμή $t = \pi/(4\omega)$. (ΜΟΝΑΔΕΣ 1-1-3)



<u>Λύση</u>:

Για $\psi = 0$, $\omega = 2\, rad/s$:

(α) Εξ ορισμού

$$\Phi = BAcos\theta$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζει το κάθετο του πλαισίου με το B (0.5 μονάδα ορισμός του θ).

Στο $t = 0$ είναι παράλληλα, $\theta = 0$ και έτσι

$$\Phi = BA = 0.4 \times 6 = 2.4\, Tm^2$$

(0.5 μονάδα σωστή πράξη συν μονάδες, είτε Tm^2 είτε Wb)

(β) Αντιθέτως, στο $\omega t = \pi/2$, το κάθετο του πλαισίου με το B τέμνονται κάθετα (0.5 μονάδα), $\theta = \pi/2$

και έτσι

$$\Phi = 0$$

(0.5 μονάδα)

(γ) Από τα παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι σε τυχαία γωνία $\theta = \omega t$ οπότε

$$\Phi = BAcos\omega t$$

(1 μονάδα)

Η επαγόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη <u>κατά απόλυτη τιμή</u> δίνεται από την

$$V = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = \omega BAsin\omega t = \omega BAsin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega BA$$

ή

$$V = 2 \times 0.4 \times 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3.39\ V$$

(1 μονάδα παραγώγιση)

(1 μονάδα το $sin(\pi/4)$)

(1 μονάδα απόλυτη τιμή)

Αρνητική βαθμολόγηση:

για μη σωστή χρήση μονάδων (-1 εάν οι μονάδες δεν είναι V)

για τη μη κατανόηση ότι η ΗΕΔ είναι τάση και όχι δύναμη (-1 εάν κάποιος προσπάθησε να υπολογίσει την δύναμη από την τάση)