24/04/18.

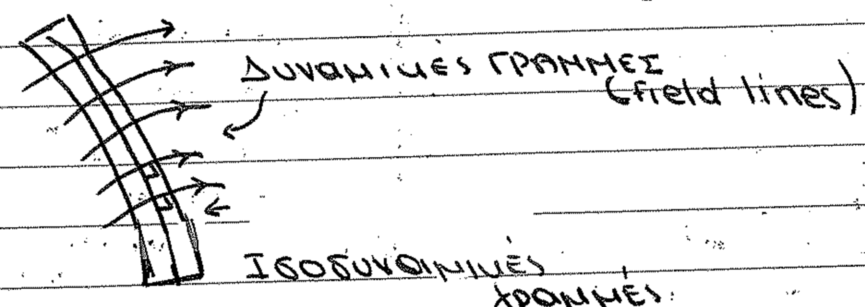
Ισοδυναμικές επιφάνειες

Είναι μαθηματικές επιφάνειες στο χώρο στις οποίες το $V=$ σταθερό ή $V(x,y,z)=$ σταθερό.

↳ Είναι η εξίσωση επιφάνειας $F(x,y)=z$

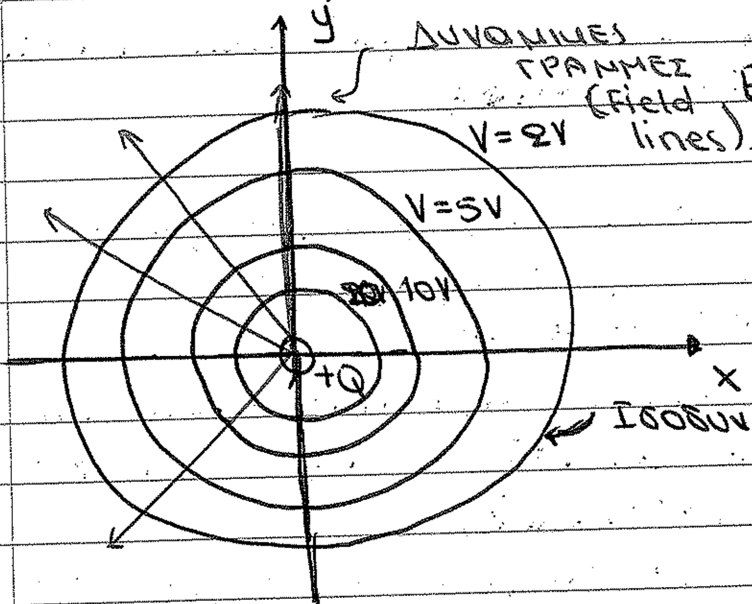
Ιδιότητες:

(1) Είναι κάθετες στις δυναμικές γραμμές



Παράδειγμα 5.1:

Βρείτε τις ισοδυναμικές γραμμές ενός σημειακού φορτίου $+Q$ που ορίζεται στην αρχή των αξόνων.



Εφόσον ισοδυναμικές τότε $V=$ σταθ $\Rightarrow \frac{KQ}{r}=$ σταθ $\Rightarrow$

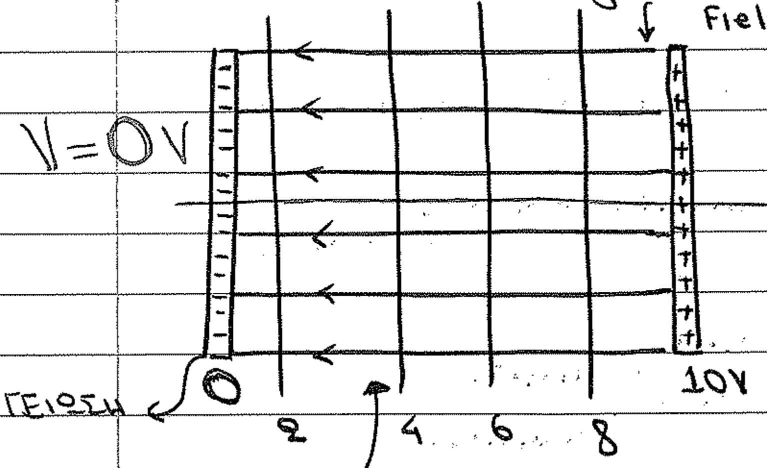
$r=$ σταθ $\Rightarrow x^2+y^2+z^2=$ σταθ

↓ σφαίρας.

Κάθε ισοδυναμική γραμμή έχει διαφορετική σταθερά.

Όσο πιο πολύ πλησιάζουμε τόσο το $V\uparrow$ αφού $r\downarrow$.

Παράδειγμα 5.12: Να βρεθούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες στο εσωτερικό ενός πυκνωτή με επίπεδους οπλισμούς οι οποίοι βρίσκονται σε διαφορά δυναμικού 10V μεταξύ τους (ο αρνητικός → γειωμένος)



Ξέρουμε από προηγούμενο μάθημα:

$V(x) = -E \cdot x + C$

$V = 10V$ — είναι αρνητικό αφού έχει αρν. φορά.

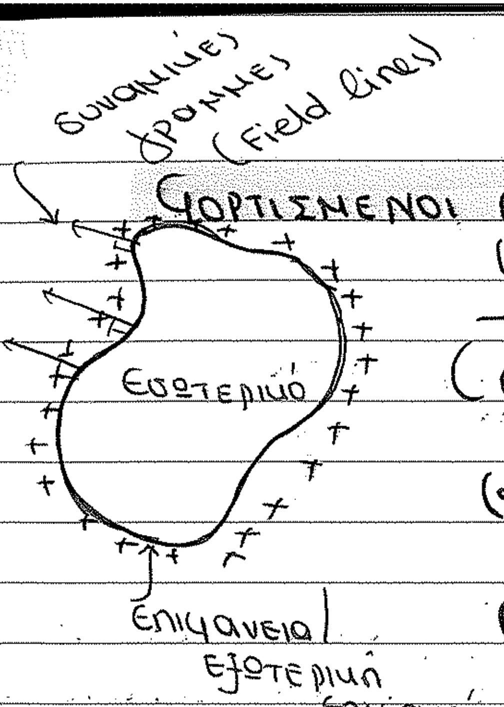
C — εξαρτάται από πού βάζουμε το 0.

ισοδυναμικές που είναι ισαπέχουσες λόγω ότι έχουμε πυκνωτή.

Όταν έχουν ΔV = σταθ → έργο είναι ίδιο.
άρα E = σταθερή

~~Έξω από τον πυκνωτή έχουμε $E=0$ άρα δεν έχουμε ισοδυναμικές γραμμές.~~

Από αριστερά (δίπλα στον αρνητικό οπλισμό) του πυκνωτή έχουμε έναν όγκο ισοδυναμικό με $V=0$ ενώ δεξιά του πυκνωτή έχουμε ισοδυναμικό όγκο με $V=10V$.



Φορτισμένοι αγωγοί. (μεταλλικοί)

(1) Το φορτίο είναι πάντα πάνω στην επιφάνεια. (Ακόμη κι εάν βάλω το φορτίο εσωτερικό)

(2) Εσωτερικά το ηλ. πεδίο (E) είναι μηδέν

(3) V = ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΑΝΤΟΥ μέσα εσωτερικά

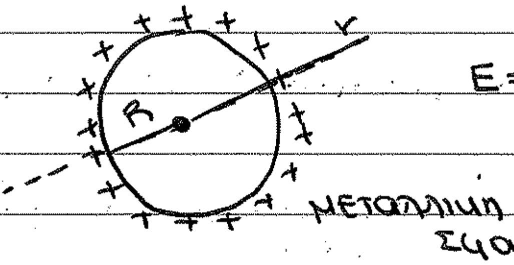
Σκέφτομαι για εσωτερικά $E=0$

άρα $V(x) = -\cancel{E}^{\,0}x + C \Rightarrow$

$V(x) = C =$ ΣΤΑΘΕΡΟ.

(4) Οι δυναμικές γραμμές φεύγουν πάντα κάθετα.

Παράδειγμα: φορτισμένη μεταλλική σφαίρα με ακτίνα R και φορτίο Q. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο



$$E = \begin{cases} \dfrac{KQ}{r^2}, & r \geq R \\ 0, & r < R \end{cases}$$

$E = -\dfrac{\partial V}{\partial r}$ σφαιρικές (προηγούμενο μάθημα, νόμος Gauss).

Από την ολοκλήρωση προκύπτει

$$V = \begin{cases} \dfrac{KQ}{r} + C_1, & r \geq R \\ C_2 & r < R \end{cases}$$

Για ευκολία επιλέγω $C_1 = 0$ άρα $r \to \infty$ $V = 0$.

$V(R^-) = V(R^+)$

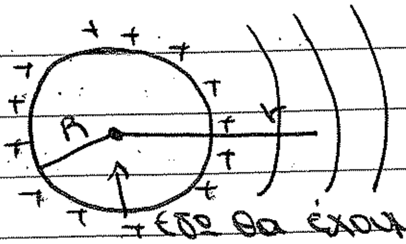
τα όρια

από την συνέχεια όταν $r = R$.

άρα $C_2 = \dfrac{KQ}{R}$

Άρα: $V(r) = \begin{cases} \dfrac{KQ}{r}, & \text{έξω } r>R \\ \dfrac{KQ}{R}, & \text{μέσα} \end{cases}$

<u>Σχήμα</u>:



← Ισοδυναμικές γραμμές

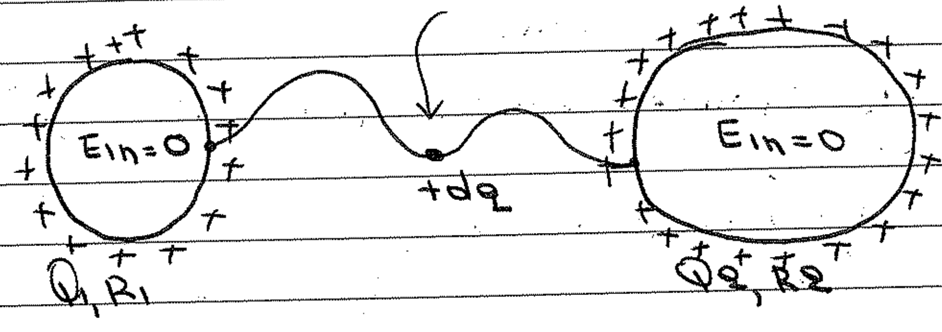
έξω θα έχουμε ισοδυναμικό σημείο με $V = \dfrac{KQ}{R}$.

Παράδειγμα 5.14

Δύο διαφορετικές φορτισμένες σφαίρες, ακτίνες R_1 και R_2 και το αρχικό φορτίο Q_1 και Q_2 αντίστοιχα. Μετά που θα τα συνδέσουμε με αγώγιμο λεπτό σύρμα. Βρείτε τα 2 νέα φορτία (Q_1' και Q_2').

Θεωρώ ότι είναι πολύ μακριά ώστε να μην αλληλοεπηρεάζονται.

Τα συνδέω με μεταλλικό σύρμα.



(1) Θα μεταφερθεί το φορτίο επειδή είναι αγώγιμο το σύρμα (ανακατανομή φορτίου) μέχρι $V_1' = V_2'$.

(2) Έχουμε λεπτό σύρμα άρα $q_{συρμ} \simeq 0$ δηλαδή αμελητέο.

Εξήγηση του (1):

Αρχικά $V_1 = \dfrac{KQ_1}{R_1}$ και $V_2 = \dfrac{KQ_2}{R_2}$

δεν ξέρουμε σχέση $Q_1 - \underset{(+dq)}{Q_2}$, άρα ούτε $V_1 - V_2$.

(+) Τα θετικά φορτία κινούνται σε μικρότερο δυναμικό.

Εάν $\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$ τότε δεν θα συμβεί αφού $V_1 = V_2$.

αλλιώς θα κινηθεί ⇒ ανακατανομή φορτίου. Q_1', Q_2' μέχρι ισορροπίας ($V_1' = V_2'$)

Συνεπώς από το:

$(1) \Rightarrow \frac{Q_1'}{R_1} = \frac{Q_2'}{R_2} \Rightarrow Q_1' = \frac{R_1}{R_2} \cdot Q_2'$.

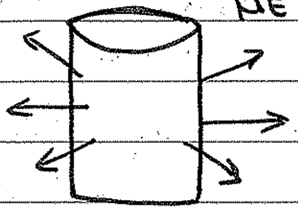
$(2) \Rightarrow Q_{αρχ/ολ} = Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2' + \cancel{Q}^{=0} \Rightarrow Q_1' + Q_2 = Q_1 + Q_2$

Τότε $Q_{ολ} = Q_1' + Q_2' \overset{(1)}{\Rightarrow} Q = \frac{R_1}{R_2} Q_2' + Q_2' \Rightarrow$

$Q_2' = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot Q$ και $Q_1' = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot Q$.

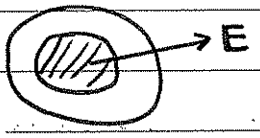
* πιθανό θέμα: 2 κυλινδρικούς πεπερασμένους

με ακτίνα R



Βρίσκουμε το E (θεωρώντας τις δυναμικές γραμμές ακτινικές - χωρίς τα καπάκια)

με Νόμο Gauss.



κυλινδρικές

1η ακτίνη: άπειρος → τοπ. πεδίο ($E = \frac{k\lambda}{\rho}$) απ' έξω με Gauss

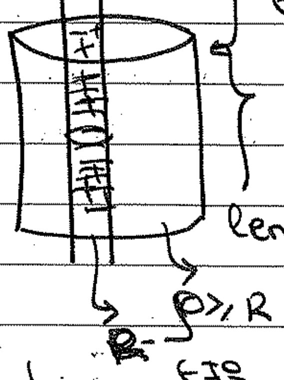
2η κίνηση: Βρίσκουμε το δυναμικό με βάση την 1η το δυναμικό απ' έξω σαν άπειρη γραμμή

από το $E = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \Rightarrow V = k\lambda \ln \rho$ ολοκλ.

και μετά όπως την ακτίνα με τις σφαίρες.

Άσκηση - πιθανό θέμα για τις εξετάσεις (2,5 μονάδες)

Βρείτε την ένταση ενός άπειρου μήκους κυλίνδρου μεταλλικού με ακτίνα R και επιφανειακή πυκνότητα σ.



επιφάνεια Gauss.

Επειδή είναι μεταλλικό έχω σ αφού θα έχει φορτίο μόνο εξωτερικά. γι' αυτό δεν παίρνω ρ (χωρική πυκνότητα)

E = { έξω από Gauss.
0 μέσα

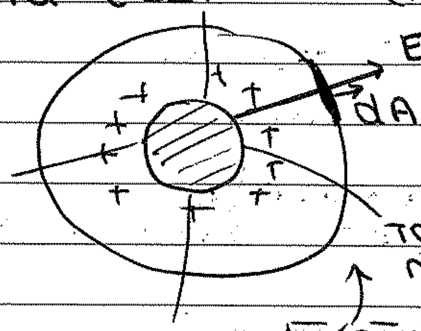
Το βρίσκουμε από επιφανειακή πυκνότητα

Για έξω: (1) Για παράπλευρη:

$$\oint E\, dA \cdot \cancel{\cos\theta}_{1} = \frac{Q_{included}}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$E \oint dA = \frac{Q_{included}}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

παράπλευρη



το φορτίο που περιβάλλεται στην επιφ.

Gauss για παράπλ. επιφάνεια

$$E \cdot \cancel{2\pi}\rho \cancel{L} = \frac{\sigma \cancel{2\pi} R \cdot \cancel{L}}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 \rho}$$ → για εξωτερική και παράπλευρη απολεια

Για τις βάσεις-καπάκια: $\cos\theta = 0$.

* Για να βρούμε το E βλέπω και στο νόμο Gauss για περισσότερες λεπτομέρειες.