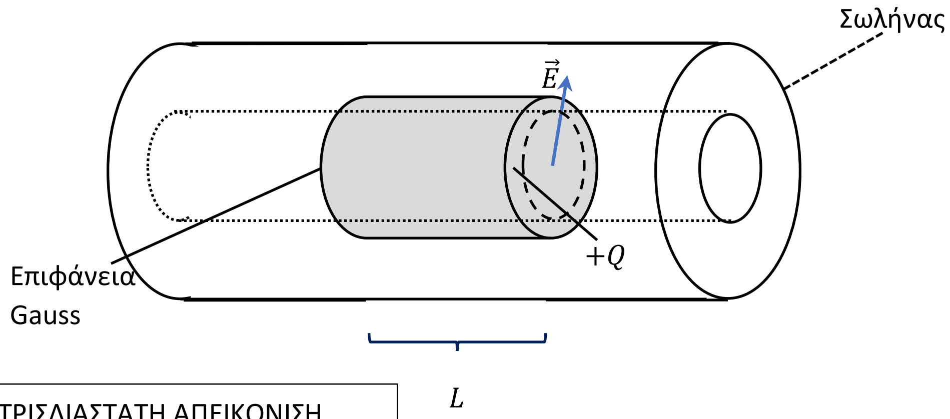
<u>ΘΕΜΑ 1</u> Μονωτικός σωλήνας εσωτερικής ακτίνας R_1 και εξωτερικής R_2 και απείρου μήκους, είναι φορτισμένος ηλεκτρικά με ομοιόμορφη χωρική κατανομή φορτίου ίση με η. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ στην περιοχή μέσα στο υλικό του σωλήνα εάν γνωρίζετε ότι το $\vec{E}$ είναι κατά μήκος του μοναδιαίου $\vec{e}_\rho$, σε κυλινδρικές συντεταγμένες με το z κατά μήκος του άξονα του σωλήνα.

<u>Λύση</u>:

(α) Παίρνουμε κυλινδρική επιφάνεια Gauss μήκους L και ακτίνας ρ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

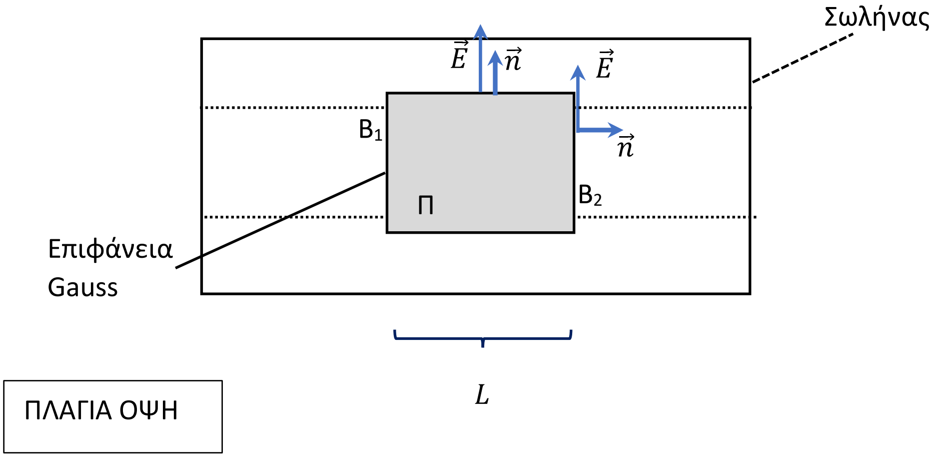


ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ

Για ότι ακολουθεί, συμβουλευόμαστε το επόμενο σχήμα (πλάγια όψη). Αφού η φορά του $\vec{E}$ είναι η φορά του μοναδιαίου $\vec{e}_\rho$, το τοπικό κάθετο διάνυσμα $\vec{n}$ στις δυο βάσεις B_1 και B_2 του κυλίνδρου Gauss σχηματίζει γωνία 90° με το $\vec{E}$ και έτσι $cos\theta = 0$ και εκεί και τα αντίστοιχα ολοκληρώματα μηδενίζονται. Αντιθέτως, στην παράπλευρη επιφάνεια Π βλέπουμε από την πλάγια όψη ότι το $\vec{n}$ είναι παράλληλο με το $\vec{E}$ και έτσι $cos\theta = 1$. Επομένως

$$\oint EdA\,cos\theta = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \int_{B_1} EdA\cdot 0 + \int_{B_2} EdA\cdot 0 + \int_{\Pi} EdA\cdot 1 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \int_{\Pi} EdA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

όπου Q είναι το περικλειόμενο φορτίο από τον κύλινδρο Gauss, το οποίο θα το υπολογίσουμε παρακάτω.



Λόγω κυλινδρικής συμμετρίας το E είναι σταθερό επάνω στην Π και έτσι μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος:

$$E\int_{\Pi} dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου Gauss είναι ίσο με $2\pi\rho L$ ($\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\times\acute{\upsilon}\psi o\varsigma$). Επομένως

$$2E\pi\rho L = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Λύνοντας

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L\rho}$$

Όσον αφορά το φορτίο, το τμήμα του σωλήνα που περιέχεται μέσα στην επιφάνεια Gauss έχει μήκος L και ακτίνα από R_1 έως και ρ και έτσι ο όγκος του ισούται με

$$V = \pi(\rho^2 - {R_1}^2)L$$

($\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\times\acute{\upsilon}\psi o\varsigma$) και επομένως από την πυκνότητα φορτίου η το περικλειόμενο φορτίο ισούται με

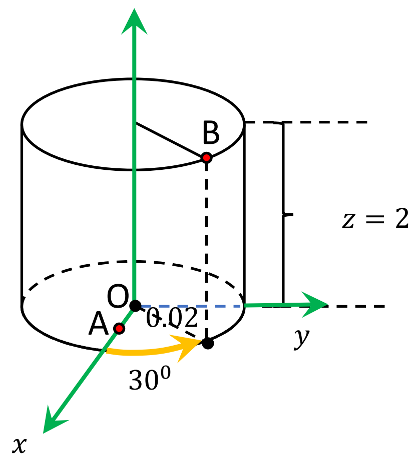
$$Q = \eta\pi(\rho^2 - {R_1}^2)L$$

Επομένως το ηλεκτρικό πεδίο ισούται με

$$E = \frac{\eta\pi(\rho^2 - {R_1}^2)L}{2\pi\varepsilon_0 L\rho} = \frac{\eta}{2\varepsilon_0}\frac{\rho^2 - {R_1}^2}{\rho}$$

ΘΕΜΑ 2 Στο προηγούμενο πρόβλημα δίνεται ότι $\eta = 5 \times 10^{-6}\ C/m^3$, $R_1 = 0.5\ cm$ και $R_2 = 3\ cm$. Σχεδιάστε σε ένα σχήμα τα δυο σημεία Α και Β με κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, φ, z) ίσες με $(0.01, 0^0, 0)$ και $(0.02, 30^0, 2)$ αντίστοιχα, όπου οι αποστάσεις είναι σε m και οι γωνίες σε μοίρες (δεν χρειάζεται να δείξετε στο σχήμα τον σωλήνα, μόνο τα Α και Β). Ακολούθως να βρεθεί η διαφορά δυναμικού μεταξύ των Α και Β. Δίνεται $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ S.I.$

Λύση:



Και τα δυο σημεία είναι μέσα στο υλικό του σωλήνα και έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα από το προηγούμενο ερώτημα. Το ηλεκτρικό πεδίο εκεί είναι εκφρασμένο σε κυλινδρικές συντεταγμένες και μάλιστα η φορά του $\vec{E}$ είναι η φορά του μοναδιαίου $\vec{e}_\rho$ που σημαίνει ότι υπάρχει μόνο μια συνιστώσα, η E_ρ η οποία είναι ίση με την παραπάνω έκφραση. Από την Εξ. 4.7α έχουμε

$$E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{\eta}{2\varepsilon_0}\frac{\rho^2 - {R_1}^2}{\rho}$$

ή

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\eta}{2\varepsilon_0}\left(\rho - \frac{{R_1}^2}{\rho}\right)$$

Ολοκληρώνοντας

$$V(\rho, \varphi, z) = \frac{\eta}{4\varepsilon_0}\rho^2 - \frac{\eta {R_1}^2}{2\varepsilon_0} ln\rho + c(\varphi, z)$$

Εν γένει το δυναμικό θα είναι συνάρτηση και των τριών μεταβλητών για αυτό και γράψαμε τη σταθερά ολοκλήρωσης με αυτό τον τρόπο. Όμως αφού οι άλλες δυο συνιστώσες είναι μηδενικές, τότε από τις Εξ. 4.7β και 4.7γ έχουμε $\partial V/\partial \varphi = 0$ και $\partial V/\partial z = 0$ και άρα η c είναι απόλυτη σταθερά.

Τα σημεία Α και Β έχουν αντίστοιχα $\rho_A = 0.01$ και $\rho_B = 0.02$ επομένως η διαφορά δυναμικού ισούται με

$$V_B - V_A = \frac{\eta}{4\varepsilon_0}(\rho_B^2 - \rho_A^2) - \frac{\eta {R_1}^2}{2\varepsilon_0} ln\frac{\rho_B}{\rho_A} = \frac{\eta}{4\varepsilon_0}(\rho_B^2 - \rho_A^2 - 2{R_1}^2 ln\frac{\rho_B}{\rho_A})$$

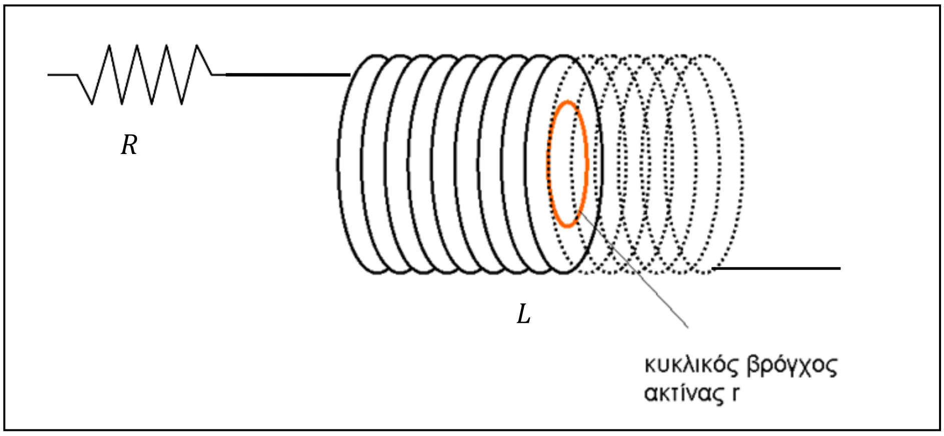
Αντικθιστώντας

$$V_B - V_A = \frac{5 \times 10^{-6}}{4 \times 8.85 \times 10^{-12}}(0.02^2 - 0.01^2 - 2 \times 0.005^2 ln\frac{2}{1}) = 37.5\, V$$

$\eta(\times 10^{-6} C/m^3)$	$\rho_A\ (m)$	$\rho_B\ (m)$	$R_1\ (m)$	**ΘΕΜΑΤΑ**	$\Delta V(V)$
5	0.01	0.02	0.005	**Α**	37.5
4	0.02	0.03	0.01	**Β**	47.3
2	0.03	0.04	0.01	**Γ**	26.5

ΘΕΜΑ 3

Κύκλωμα RL σε σειρά έχει $R = 0.25\ \Omega$, $L = 4.5\ mH$ και τροφοδοτείται με πηγή πλάτους $1.20\ V$ και κυκλικής συχνότητας $\omega = 30\ rad/s$. Το πηνίο του κυκλώματος είναι κατασκευασμένο με 3 σπείρες$/cm$ και όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, στο εσωτερικό του έχει τοποθετηθεί μικρότερο πηνίο 5 σπειρών και εμβαδού $4.2\ mm^2$, με τους άξονες των δυο πηνίων να συμπίπτουν και το μικρό να εμπεριέχεται πλήρως μέσα στο μεγαλύτερο πηνίο κατά μήκος. Να βρεθεί το πλάτος της επαγόμενης ΗΕΔ στο μικρό πηνίο.



Λύση:

Από τα δεδομένα

$$\omega = 30\ rad/s$$

Η επαγωγική εμπέδηση ισούται με

$$Z_L = L\omega = 4.5 \times 10^{-3} \times 30 = 0.135\ \Omega$$

Ολική εμπέδηση

$$Z = \sqrt{R^2 + {Z_L}^2} = \sqrt{0.25^2 + 0.135^2} = 0.284\ \Omega$$

Η γωνία ισούται με

$$\theta = atan\left(\frac{Z_L}{R}\right) = atan\left(\frac{0.135}{0.284}\right) = 0.495\ rad = 28.4°$$

Πλάτος ρεύματος

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{1.20}{0.284} = 4.22\ A$$

Στιγμιαία τιμή:

$$I = I_0\, sin(\omega t - \theta) = 4.22\ \ sin(30t - 0.495\ )$$

Αυτό το ρεύμα παράγει μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του πηνίου ίσο με:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L} = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{3}{0.01} \times 4.22\ sin(30t - 0.495\ )$$

ή

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L} = 1.59 \times 10^{-3}\ sin(30t - 0.495\ )$$

Από τον νόμο του *Faraday*, η επαγόμενη ΗΕΔ στο μικρότερο πηνίο ισούται με (κατ' απόλυτη τιμή):

$$V = \frac{d(NBAsin\theta)}{dt} = \frac{d(NBA)}{dt} = NA\frac{dB}{dt}$$

Η γωνία θ είναι 90^0 αφού το παραγόμενο πεδίο είναι κατά μήκος του κοινού άξονα των δυο πηνίων και η σπείρες του μικρού είναι κάθετες στον άξονα και άρα κάθετες στο πεδίο (δες παραπάνω εικόνα)

$$V = 5 \times 4.2 \times 10^{-6} \times \frac{dB}{dt} = 21 \times 10^{-6}\frac{dB}{dt} = 21 \times 1.59 \times 10^{-9}\frac{d}{dt}sin(30t - 0.495\ )$$

$$V = 33.4 \times 10^{-9} \times 30\ cos(30t - 0.495\ ) = 1.00 \times 10^{-6}\ cos(30t - 0.495\ )$$

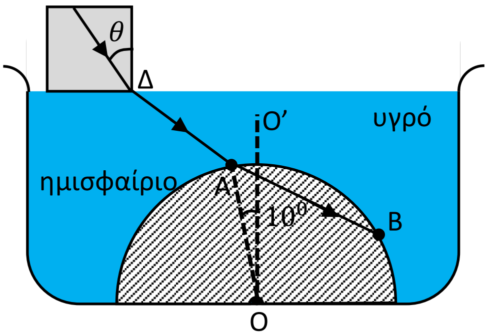
Η μέγιστη τιμή αυτής της τάσης είναι ίση με

$$V_0{}' = 1.00\ \mu V$$

Παρόμοιες λύσεις

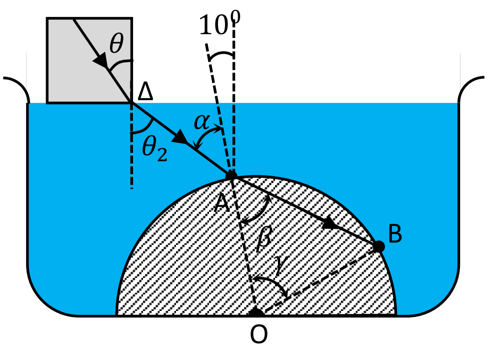
$R\ (\Omega)$	$L\ (mH)$	$V_0\ (V)$	$\omega\ (rad/s)$	N_2	**ΘΕΜΑΤΑ**	$V_0\ '(\mu V)$
0.25	4.5	1.20	30	5	**Α**	1.0
1.5	8.0	4.85	40	10	**Β**	2.0
2.0	7.0	2.95	90	15	**Γ**	1.3

ΘΕΜΑ 4. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, μια στενή φωτεινή μονοχρωματική δέσμη ταξιδεύει μέσα σε ένα διάφανο κύβο από υλικό με δείκτη διάθλασης ίσο με $\sqrt{3}$, σχηματίζοντας γωνία θ με την κατακόρυφο. Ο κύβος αυτός επιπλέει στην ελεύθερη επιφάνεια ενός υγρού με δείκτη διάθλασης 1.8, στον πυθμένα του οποίου έχει τοποθετηθεί ένα γιάλινο ημισφαίριο με κέντρο στο σημείο Ο. Η δέσμη αφού διέλθει από την διεπιφάνεια του κύβου-υγρού, διαθλάται στο ημισφαίριο στο σημείο Α και καταλήγει στο σημείο Β. Όταν $\theta = 60°$ παρατηρείται ότι η ευθεία ΟΟ' που είναι η κατακόρυφος που περνάει από το κέντρο Ο του ημισφαιρίου, σχηματίζει γωνία με την ΟΑ ίση με 10^0 και το τόξο ΑΒ επάνω στο ημισφαίριο είναι ίσο με 1.4 φορές την απόσταση ΟΑ. Να βρεθεί ο δείκτης διάθλασης του ημισφαιρίου



Λύση:

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, φέρουμε την ακτίνα ΟΒ.



Εάν εφαρμόσουμε τον νόμο της διάθλασης στο σημείο Δ

$$\sqrt{3} sin 60° = 1.8 sin\theta_2$$

βρίσκουμε για την γωνία $\theta_2 = 56.4°$. Στο σημείο Α, η τοπική κάθετος είναι η ακτίνα ΟΑ και επομένως η γωνία πρόσπτωσης είναι η α. Προσέξτε ότι από απλή γεωμετρία, η γωνία θ_2 είναι εντός εναλλάξ με την $\alpha + 10^0$ οπότε θα ισχύει

$$\theta_2 = \alpha + 10^0$$

ή

$$\alpha = 46.4°$$

Εάν εφαρμόσουμε τον νόμο της διάθλασης στο σημείο Α, παίρνουμε το αποτέλεσμα

$$1.8 sin\alpha = n sin\beta$$

Λύνοντας για το ζητούμενο

$$n = 1.8 \frac{sin\alpha}{sin\beta}$$

Αρκεί να βρούμε την γωνία β οπότε σκεφτόμαστε ως εξής: Αφού η ΟΒ και η ΟΑ είναι και οι δυο ακτίνες, τότε το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισόπλευρο και ισχύει

$$2\beta + \gamma = 180°$$

ή

$$\beta = \frac{180° - \gamma}{2}$$

Την γωνία γ την βρίσκουμε εύκολα από το μήκος τόξου s αφού ισχύει για κάθε επίκεντρη γωνία ενός τόξου ότι

$$s = R\gamma$$

(σε ακτίνια μόνο). Από τα δεδομένα παίρνουμε ότι $\gamma = 1.4\, rad = 80.2°$ και έτσι

$$\beta = \frac{180° - \gamma}{2} = 49.9°$$

Έτσι έχουμε για το ζητούμενο

$$n = 1.8 \frac{sin 46.4°}{sin 49.9°} = 1.7$$

Παρόμοιες λύσεις

n_1	n_2	θ	s/R	ΑΟΟ’	**ΘΕΜΑΤΑ**	n
$\sqrt{3}$	1.8	60°	1.4	10°	**Α**	1.7
1.81	2	50°	1.3	10°	**Β**	1.4
2	2.2	40°	1.5	10°	**Γ**	1.3