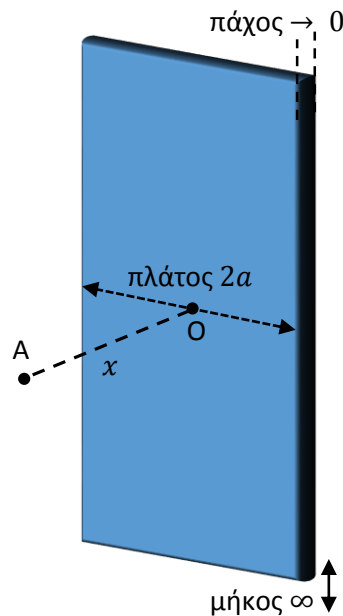
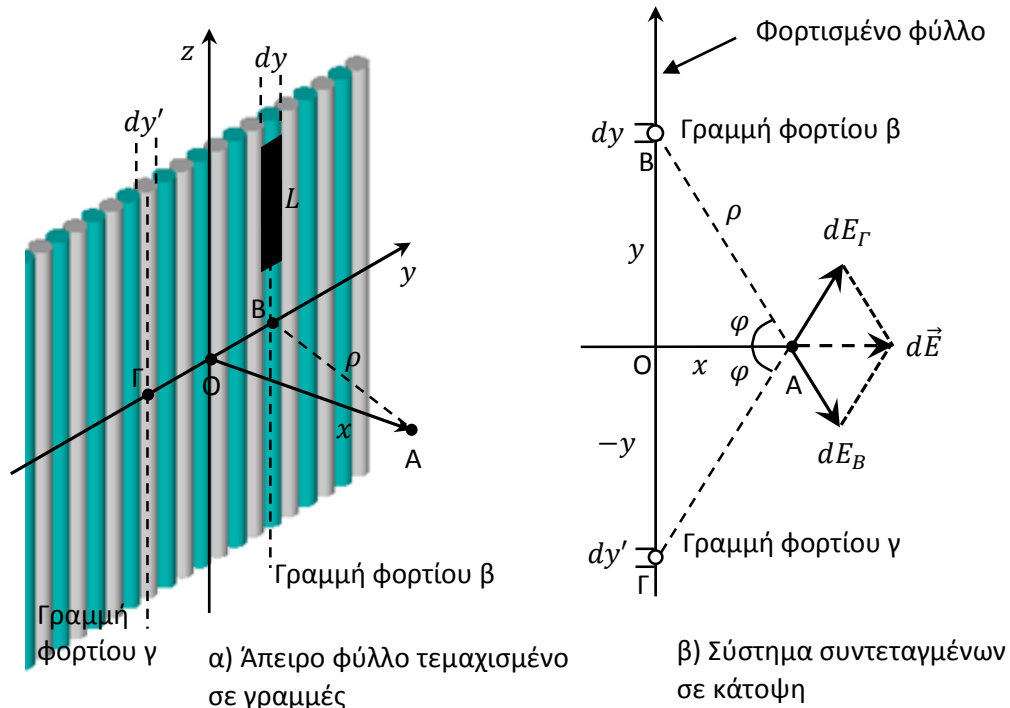


B1) Δεδομένου του τύπου $E = 2k\lambda/\rho$ που έχει αποδειχθεί στο μάθημα και περιγράφει το ηλεκτρικό πεδίο E μιας άπειρης γραμμής φορτίου με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ σε σημείο A που βρίσκεται σε απόσταση ρ από αυτή, να υπολογισθεί με ολοκλήρωση (και όχι με τον νόμο του Gauss) το ηλεκτρικό πεδίο μιας φορτισμένης λωρίδας απείρου μήκους, πλάτους $2a$, απειροελάχιστου πάχους και ομοιόμορφης επιφανειακής πυκνότητας φορτίου σ σε σημείο A που απέχει κάθετη (στη λωρίδα) απόσταση x από το κέντρο της το οποίο το λαμβάνουμε ως την αρχή O των συντεταγμένων.



Λύση:

Όπως φαίνεται και στο παρακάτω Σχήμα (στα αριστερά), "τεμαχίζουμε" τη λωρίδα κατά το μήκος της σε ένα άπειρο πλήθος λεπτών στύλων απειροστού πάχους ο καθένας, οι οποίοι μπορούν να θεωρηθούν προσεγγιστικά ως γραμμές φορτίου και έτσι να χρησιμοποιήσουμε τον δεδομένο τύπο. Τοποθετούμε τον άξονα z κατά μήκος των γραμμών φορτίων, και τον άξονα y κατά μήκος του πλάτους της λωρίδας, κάθετα προς τις γραμμές φορτίου που τεμαχίσαμε. Επιθυμούμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα τυχαίο σημείο A που απέχει κάθετη απόσταση x από την αρχή των συντεταγμένων O. Έτσι θα ολοκληρώσουμε επάνω σε όλες τις γραμμές φορτίου δηλαδή κατά μήκος του άξονα y .



Σχήμα 2.9

Για να χρησιμοποιήσουμε όμως την Εξ. 2.6, πρέπει να υπολογίσουμε την γραμμική πυκνότητα της κάθε γραμμής φορτίου, δεδομένου ότι στο παρόν πρόβλημα μας δίνεται μόνο η επιφανειακή πυκνότητα. Για το σκοπό αυτό θεωρήστε τη γραμμή φορτίου β στο παραπάνω Σχήμα (στα αριστερά) η οποία τέμνει τον άξονα y στο σημείο Β και θεωρήστε ένα μικρό τμήμα της μήκους L . Το στοιχειώδες εμβαδό (κοιτώντας κάθετα προς το φύλλο) αυτού του τμήματος είναι ίσο με $dA = Ldy$ (μήκος \times πλάτος) και άρα από τον ορισμό του σ περιέχει φορτίο $dq = \sigma dA = \sigma Ldy$. Επομένως η γραμμική πυκνότητα φορτίου (φορτίο ανά μονάδα μήκους) είναι ίση με

$$d\lambda = \frac{dq}{L} = \sigma dy$$

Επειδή η κατανομή φορτίου είναι ομοιογενής, η γραμμική πυκνότητα που υπολογίσαμε για το τμήμα μήκους L της γραμμής φορτίου β, είναι η ίδια για όλη τη γραμμή. Σύμφωνα λοιπόν με την Εξ. 2.6, αυτή η γραμμή φορτίου δημιουργεί στο Α ένα ηλεκτρικό πεδίο με μέτρο ίσο με

$$dE_B = \frac{2k}{\rho} d\lambda$$

όπου ρ είναι η απόσταση ΒΑ από τη γραμμή φορτίου β έως το σημείο παρατήρησης. Θεωρήστε τώρα την κάτοψη στο παραπάνω Σχήμα (στα δεξιά). Όπως γνωρίζουμε για την γραμμή φορτίου, το $d\vec{E}_B$ είναι κάθετο προς τη γραμμή και άρα ανήκει στην σελίδα του σχήματος αφού η γραμμή τέμνει το Σχήμα κάθετα, με φορά προς το άπειρο (απομακρυνόμενο από τη γραμμή). Επομένως το $d\vec{E}_B$ βρίσκεται επάνω στην προέκταση της ευθείας ΒΑ. Θα θεωρήσουμε και την γραμμή φορτίου η οποία τέμνει τον άξονα y στο σημείο Γ και η οποία ισαπέχει από τη γραμμή β ως προς την αρχή Ο. Το αντίστοιχο ηλεκτρικό πεδίο

$d\vec{E}_r$ έχει ίσο μέτρο με το $d\vec{E}_B$ και έτσι λόγω συμμετρίας το συνιστάμενο ηλεκτρικό πεδίο dE είναι κάθετο στον άξονα y δηλαδή κάθετα στο φύλλο (κατά μήκος του άξονα x). Μπορούμε να γράψουμε τις εξής απλές τριγωνομετρικές εκφράσεις

$$\rho \cos\varphi = x$$

$$y = x \tan\varphi \Rightarrow dy = x d\varphi / \cos^2\varphi$$

Το συνιστάμενο ηλεκτρικό πεδίο dE λόγω συμμετρίας είναι ίσο με

$$dE = dE_B \cos\varphi + dE_r \cos\varphi = 2dE_B \cos\varphi$$

Εφόσον λάβαμε τις γραμμές φορτίου σε ζεύγη, αρκεί να ολοκληρώσουμε από $y = 0$ έως και a (και όχι μεταξύ $\pm a$ αλλιώς θα βρούμε διπλάσιο αποτέλεσμα από το κανονικό). Η ολοκλήρωση γίνεται

$$E = \int_{y=0}^a 2dE_B \cos\varphi = \int_{y=0}^a \frac{4k}{\rho} \cos\varphi d\lambda = 4k\sigma \int_{y=0}^a \frac{\cos\varphi}{\rho} dy$$

ή

$$E = 4k\sigma \int_{y=0}^a \frac{\cos\varphi}{x} \cos\varphi \frac{x}{\cos^2\varphi} d\varphi = 4k\sigma \int_{y=0}^a d\varphi$$

Από την $y = x \tan\varphi$ τα όρια του φ για $y = 0$ έως a είναι τα εξής

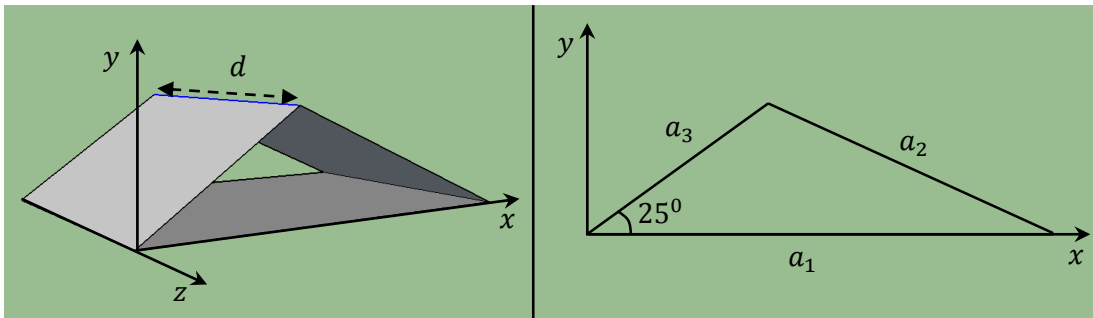
$$\varphi_1 = \tan^{-1}(0) = 0$$

$$\varphi_2 = \tan^{-1}(a/x)$$

οπότε

$$E = 4k\sigma \tan^{-1}(a/x)$$

B2) Στο παρακάτω σχήμα, τρεις ορθογώνιες μονωτικές πλάκες με κοινό πλάτος $d = 2.5 \text{ m}$, ενώνονται έτσι ώστε τα κοινά τους πλάτη να εφάπτονται σε ένα τριγωνικό σκεποειδή σχηματισμό με τη μια γωνία του τριγώνου (στην πρόσοψη του σχήματος) να είναι 25° ενώ τα μήκη a_1 και a_3 είναι αντίστοιχα 4.2 m και 2.6 m . Οι πλάκες φέρουν φορτία $q_1 = 25 \text{ nC}$, $q_2 = 35 \text{ nC}$ και $q_3 = -30 \text{ nC}$ με τους δείκτες των φορτίων να αντιστοιχούν στους δείκτες των τριών πλευρών. Θεωρώντας ότι οι διαστάσεις των πλακών είναι σχετικά μεγάλες, να χρησιμοποιήσετε μια κατάλληλη προσέγγιση ώστε να σχεδιάσετε τις ισοδυναμικές επιφάνειες στο επίπεδο x - y στον εσωτερικό χώρο του σκεποειδούς.



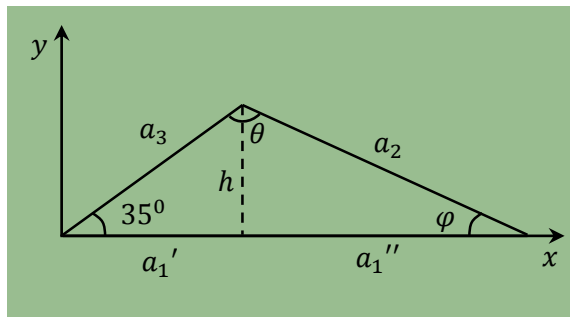
Τρισδιάστατη όψη

Πρόσοψη

Λύση:

Κατ' αρχάς πρέπει να λύσουμε το τρίγωνο για να βρούμε όλες τις διαστάσεις του. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

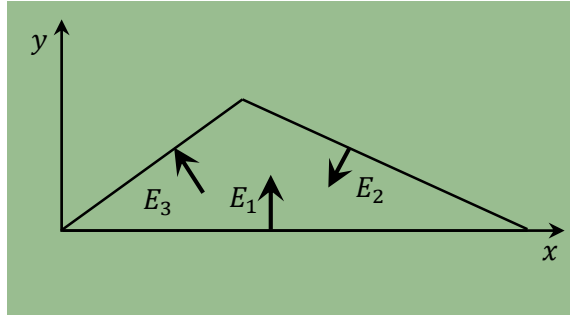
$$\begin{aligned}
 a_1' &= a_3 \cos 25^\circ = 2.36 \text{ m} \\
 a_1'' &= a_1 - a_1' = 1.84 \text{ m} \\
 h &= a_3 \sin 25^\circ = 1.10 \text{ m} \\
 \varphi &= \tan^{-1}(h/a_1'') = 30.8^\circ \\
 \theta &= 180 - 35 - \varphi = 124.2^\circ \\
 a_2 &= a_1'' / \cos \varphi = 2.15 \text{ m}
 \end{aligned}$$



Πλάγια όψη

Θεωρώντας ότι οι διαστάσεις των πλακών είναι μεγάλες, μπορούμε να πάρουμε την προσέγγιση του άπειρου φύλλου με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίσο με $E = \sigma/\epsilon_0$

με διεύθυνση κάθετα στο φύλλο. Έτσι τα ηλεκτρικά πεδία είναι όπως στο παρακάτω σχήμα, με τη φορά που σημειώνεται, κάθετα στις πλάκες και απομακρυνόμενα από αυτές για θετικά φορτία και προς αυτές για αρνητικά φορτία.



Πλάγια όψη

Η πυκνότητα φορτίου είναι ίση με το φορτίο ανά εμβαδό. Οι τρεις πλάκες είναι ορθογώνιες με εμβαδό $A_i = a_i d$ και η γωνία του κάθε πεδίου ως προς τον άξονα $-x$ είναι η συμπληρωματική (κατά μέτρο) της γωνίας που σχηματίζει το αντίστοιχο φύλλο με αυτό τον άξονα. Έτσι κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα:

	Πλάκα 1	Πλάκα 2	Πλάκα 3
Μήκος a (m)	4.2	2.14	2.6
Εμβαδό (m^2)	10.5	5.36	6.5
Επιφ. Πυκνότητα (nC/m^2)	2.38	6.52	4.62
Πεδίο E (N/C)	134	368	261
Γωνία του E	90^0	-120.8^0	115^0
Συνιστώσα x	0	-189	-110
Συνιστώσα y	134	-316	236

Τα πεδία αυτά είναι εξ' ολοκλήρου στο επίπεδο $x-y$ και το συνιστάμενο πεδίο έχει συνιστώσες

$$E_x = -299 \text{ N/C}$$

$$E_y = 54.3 \text{ N/C}$$

Το αντίστοιχο δυναμικό $V(x, y)$ συνδέεται με το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} μέσω των

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

αφού τα E_x και E_y είναι σταθερά, τότε με απλή ολοκλήρωση προκύπτει ότι

$$V = -E_x x - E_y y + c$$

όπου το c είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης. Οι ισοδυναμικές επιφάνειες αντιστοιχούν σε σταθερό δυναμικό δηλαδή πρέπει

$$E_x x + E_y y = c'$$

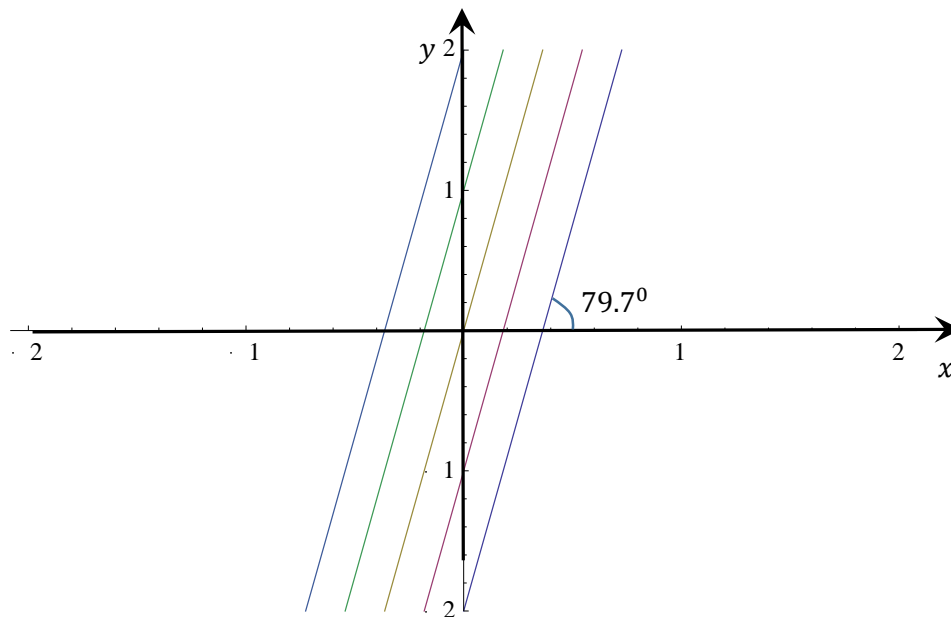
όπου c' είναι μια άλλη σταθερά. Έτσι

$$y = -\frac{E_x}{E_y} x + c''$$

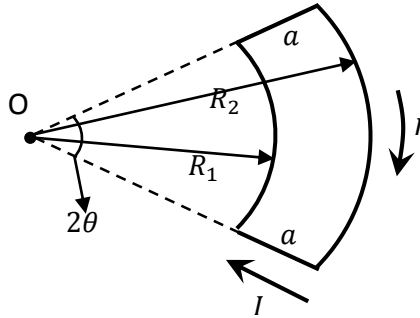
όπου $c'' = c'/E_y$. Αντικαθιστώντας τις συνιστώσες του πεδίου

$$y = 5.51x + c''$$

Στο επίπεδο x - y η παραπάνω έκφραση είναι μια ευθεία με σταθερή κλίση $\tan^{-1}(5.51) = 79.7^\circ$. Οι ζητούμενες ισοδυναμικές μοιάζουν κάπως έτσι



B3) Το κλειστό καλώδιο του παρακάτω σχήματος βρίσκεται εξ' ολοκλήρου μέσα στη σελίδα, διαρρέεται από ρεύμα I και έχει τη μορφή δυο ομόκεντρων τόξων ίσης γωνίας 2θ συνδεδεμένων μεταξύ τους στα άκρα τους με δυο ευθύγραμμα τμήματα μήκους a το καθένα. Υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από το ρεύμα στο σημείο O , δεδομένων των R_1 , R_2 , a και θ .



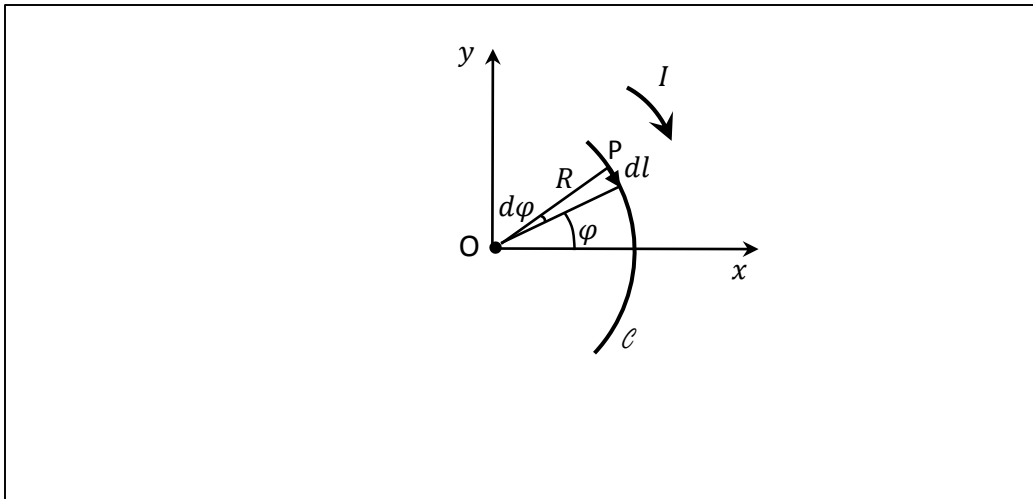
Λύση:

Θεωρήστε πρώτα στο παρακάτω Σχήμα ένα τόξο \mathcal{C} ακτίνας R το οποίο διαρρέεται από ρεύμα I . Θα υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο που παράγει στην αρχή των αξόνων O . Παίρνουμε για ευκολία το τόξο συμμετρικά ως προς τον άξονα x και έστω ότι έχει ένα γωνιακό άνοιγμα 2θ . Για να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο, "τεμαχίζουμε" το τόξο σε μικρότερα στοιχειώδη τόξα με γωνιακό άνοιγμα $d\varphi$ όπως αυτό που εικονίζεται σε τυχαίο σημείο P με μήκος $d\vec{l}$ ίσο με $Rd\varphi$. Το στοιχειώδες διάνυσμα μήκους $d\vec{l}$ το οποίο εμφανίζεται στον νόμο των Biot-Savart στην Εξ. 9.3 είναι εφαπτόμενο στο τόξο με φορά αυτή του ρεύματος και έχει μέτρο ίσο με $d\vec{l}$. Το άλλο διάνυσμα μήκους \vec{r} που εμφανίζεται στον νόμο είναι στην ουσία το αντίθετο της ακτίνας R του κύκλου (το \vec{r} ορίζεται από τον αγωγό προς το σημείο παρατήρησης που εδώ είναι το O). Έτσι το εξωτερικό γινόμενο στο σημείο P έχει μέτρο ίσο με

$$|d\vec{l} \times \vec{r}| = Rd\varphi R \sin(90^\circ) = R^2 d\varphi$$

Η γωνία του εξωτερικού γινομένου προκύπτει ορθή επειδή το $d\vec{l}$ ως εφαπτόμενο διάνυσμα είναι κάθετο στην ακτίνα \vec{r} . Όσον αφορά την φορά του εξωτερικού γινομένου, αυτή είναι κάθετη στη σελίδα και προς τα μέσα, δηλαδή είναι αντίθετα από το μοναδιαίο \vec{e}_z . Έτσι

$$d\vec{l} \times \vec{r} = -R^2 d\varphi \vec{e}_z$$



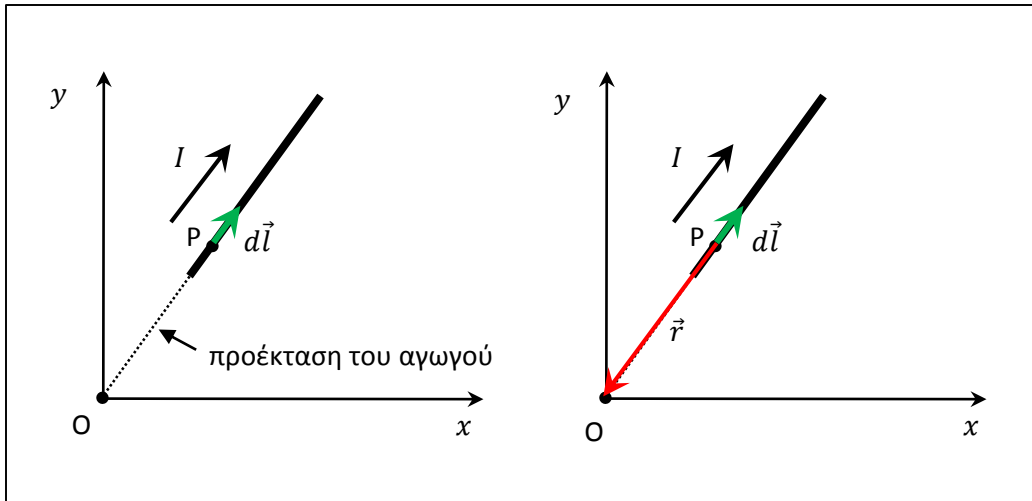
Για να εφαρμόσουμε τον νόμο των Biot-Savart στην Εξ. 9.3, πρέπει να ολοκληρώσουμε σε όλο το τόξο. Αφού από τα δεδομένα το τόξο έχει γωνιακό άνοιγμα 2θ , θα πάρουμε όρια ολοκλήρωσης από $\varphi = -\theta$ έως και $\varphi = \theta$. Έτσι έχουμε:

$$\vec{B}_C = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (-\vec{e}_z) \int_{\varphi=-\theta}^{\theta} \frac{R^2 d\varphi}{R^3} = -\frac{\theta}{2\pi} \frac{\mu_0 I}{R} \vec{e}_z$$

Στο παρόν πρόβλημα έχουμε δυο τόξα C_1 και C_2 με ακτίνες R_1 και R_2 αλλά με αντίθετη φορά ρεύματος και έτσι η συνεισφορά τους στο πεδίο είναι η

$$\vec{B}_{C_1} + \vec{B}_{C_2} = \mu_0 I \frac{\theta}{2\pi} \vec{e}_z \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Ας εξετάσουμε τώρα τη συνεισφορά των ευθύγραμμων αγωγών όπως ο αγωγός γ που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα I . Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, "τεμαχίζουμε" τον αγωγό σε απειροστά στοιχειώδη μήκη dl και ορίζουμε τα διανύσματα $d\vec{l}$ κατά μήκος του αγωγού με τη φορά του ρεύματος, όπως το διάνυσμα $d\vec{l}$ στο σημείο P. Προσέξτε ότι η προέκταση του αγωγού γ περνάει από την αρχή O όπως και τα δυο δεδομένα ευθύγραμμα τμήματα του προβλήματος.



Το διάνυσμα μήκους \vec{r} το οποίο εμφανίζεται στον νόμο των Biot-Savart στην Εξ. 9.3 είναι στην ουσία το διάνυσμα PO (στο σχήμα στα δεξιά) το οποίο είναι αντιπαράλληλο με το $d\vec{l}$ και έτσι

$$d\vec{l} \times \vec{r} = 0$$

(λόγω του όρου $\sin 180^\circ$ που εμφανίζεται στο εξωτερικό γινόμενο). Από τον νόμο των Biot-Savart στην μορφή της Εξίσωσης 9.3 φαίνεται αμέσως ότι

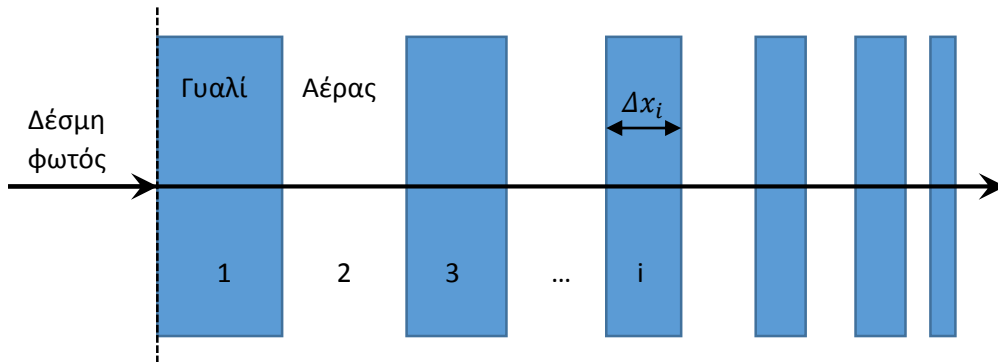
$$\vec{B}_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = 0$$

δηλαδή οι δυο ευθύγραμμοι αγωγοί δεν συνεισφέρουν στο συνιστάμενο πεδίο. Επομένως το συνιστάμενο πεδίο \vec{B} του όλου καλωδίου είναι ίσο με το άθροισμα $\vec{B}_{C1} + \vec{B}_{C2}$ που είδαμε παραπάνω. Έτσι η τελική απάντηση είναι η

$$\vec{B} = \mu_0 I \frac{\theta}{2\pi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \vec{e}_z$$

B4) Δέσμη φωτός που ταξιδεύει κατά μήκος του άξονα x , εισέρχεται σε κάποια περιοχή που είναι χωρισμένη σε ένα άπειρο αριθμό τμημάτων τοποθετημένα κάθετα στη δέσμη με το πρώτο να έχει εύρος $\Delta x_1 = a$ ενώ τα υπόλοιπα δίνονται από την αναδρομική σχέση $\Delta x_{i+1} = \Delta x_i / \kappa$ όπου $\kappa > 1$. Τα τμήματα αυτά έχουν εναλλασσόμενο υλικό γυαλιού-αέρα με το πρώτο να είναι γυάλινο. Παρότι που τα τμήματα είναι άπειρα σε αριθμό, έχουν διαδοχικά φθίνον πλάτος και έτσι το συνολικό μήκος αυτής της ακολουθίας έχει πεπερασμένο μήκος. Εφόσον το μήκος είναι πεπερασμένο, τότε απαιτείται και πεπερασμένος χρόνος t για να διέλθει το φως μέσα από αυτό. Να βρεθεί ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού συναρτήσει των t , a , κ και της ταχύτητας του φωτός c . Σημείωση: Πρώτα να αναπτύξετε το παρακάτω γινόμενο γιατί καταλήγει σε ένα εξαιρετικά απλό αποτέλεσμα που μπορεί να σας φανεί πολύ χρήσιμο στον υπολογισμό της γεωμετρικής σειράς:

$$(1 - \lambda)(1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots \lambda^{N-1})$$



Λύση:

Το ανάπτυγμα δίνει $(1 - \lambda)(1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots \lambda^{N-1}) = 1 - \lambda^N$ και άρα μπορούμε να γράψουμε ταυτοτικά για τη γεωμετρική σειρά ότι

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots \lambda^{N-1} = \frac{1 - \lambda^N}{1 - \lambda}$$

Χρησιμοποιώντας την δεδομένη αναδρομική σχέση έχουμε

$$\Delta x_1 = a$$

$$\Delta x_2 = \frac{\Delta x_1}{\kappa} = \frac{a}{\kappa}$$

$$\Delta x_3 = \frac{\Delta x_2}{\kappa} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{a}{\kappa} \right) = \frac{a}{\kappa^2}$$

δηλαδή

$$\Delta x_i = a / \kappa^{i-1}.$$

Ο συνολικός χρόνος t της δέσμης διαμέσου της ακολουθίας των τμημάτων είναι ίσος με

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + \dots$$

Εάν n είναι ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού, τότε η ταχύτητα του φωτός μέσα στο γυαλί είναι ίση με $v = c/n$ έτσι ο χρόνος στα γυάλινα τμήματα ισούται με

$$t_i = \frac{\Delta x_i}{v} = \frac{\Delta x_i}{c} n = \frac{a}{c\kappa^{i-1}} n$$

Ομοίως στον αέρα όπου $n = 1$, ο αντίστοιχος χρόνος είναι ίσος με

$$t_i = \frac{a}{c\kappa^{i-1}}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι τα υλικά εναλλάσσονται, ο συνολικός χρόνος μπορεί να ξεχωρίσει ως δυο επιμέρους αθροίσματα. Αφού το πρώτο τμήμα είναι γυάλινο, οι περιττοί όροι αντιστοιχούν στο γυαλί ενώ οι άρτιοι στον αέρα. Έτσι

$$\begin{aligned} t &= (t_1 + t_3 + t_5 + \dots) + (t_2 + t_4 + t_6 + \dots) \\ t &= \frac{a}{c} n \left(1 + \frac{1}{\kappa^2} + \frac{1}{\kappa^4} + \dots\right) + \frac{a}{c} \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa^3} + \frac{1}{\kappa^5} + \dots\right) \end{aligned}$$

Θέτουμε $\lambda = \kappa^2$ και έχουμε

$$\begin{aligned} t &= \frac{a}{c} n \left(1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \dots\right) + \frac{a}{c\kappa} \left(1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \dots\right) \\ t &= \left(1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \dots\right) \left(\frac{a}{c} n + \frac{a}{c\kappa}\right) \end{aligned}$$

Η σειρά μέσα στην πρώτη παρένθεση είναι η γεωμετρική σειρά που είδαμε παραπάνω με $\omega = 1/\lambda$ και $N \rightarrow \infty$ έτσι:

$$t = \frac{1 - 1/\lambda^N}{1 - 1/\lambda} \left(\frac{a}{c} n + \frac{a}{c\kappa}\right)$$

Όμως το $1/\lambda^N \rightarrow 0$ όσο $N \rightarrow \infty$ και επομένως

$$t = \frac{\lambda - 1}{\lambda - 1} \frac{a}{c} \left(n + \frac{1}{\kappa}\right)$$

Λύνοντας

$$n = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \frac{ct}{a} - \frac{1}{\kappa}$$

ή

$$n = \frac{\kappa^2 - 1}{\kappa^2} \frac{ct}{a} - \frac{1}{\kappa}$$