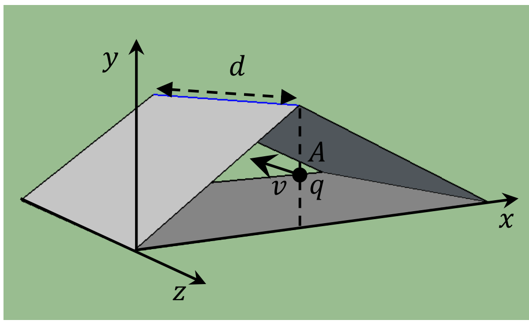
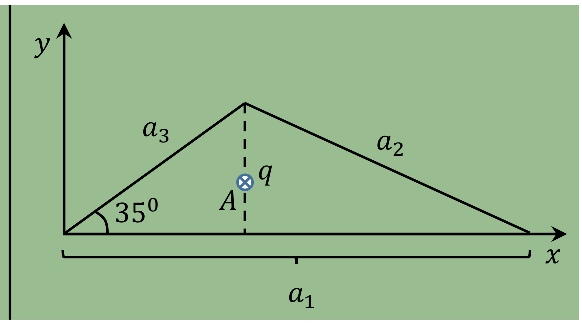
A1) Στο παραπάνω σχήμα, τρείς ορθογώνιες μονωτικές πλάκες με κοινό πλάτος $d = 2\ m$, ενώνονται έτσι ώστε τα κοινά τους πλάτη να εφάπτονται σε ένα τριγωνικό σκεποειδή σχηματισμό με τη μια γωνία του τριγώνου (στην πρόσοψη του σχήματος) να είναι $35^0$ ενώ τα μήκη $a_1$ και $a_3$ είναι αντίστοιχα $3.4\ m$ και $1.5\ m$. Οι πλάκες φέρουν φορτία $q_1 = 20\ nC$, $q_2 = -30\ nC$ και $q_3 = 25\ nC$ με τους δείκτες των φορτίων να αντιστοιχούν στους δείκτες των τριών πλευρών. Ένα σωματίδιο με φορτίο $q = 2 \times 10^{-12} C$ και μάζα $m = 5 \times 10^{-11}\ kg$ εισέρχεται κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ στον σκεποειδή χώρο στο σημείο A που βρίσκεται επάνω στο μέσο του ύψους που δείχνεται με διακεκομμένη γραμμή, με ταχύτητα $v = 25\ m/s$ κάθετη στην πρόσοψη. Θεωρώντας ότι οι διαστάσεις των πλακών είναι σχετικά μεγάλες, να χρησιμοποιήσετε μια κατάλληλη προσέγγιση ώστε να υπολογίσετε πόσο θα αποκλίνει το φορτίο $q$ κατά $x$ και κατά $y$ σε σχέση με την αρχική του θέση A τη στιγμή που εξέρχεται από τον σκεποειδή χώρο.




Τρισδιάστατη όψη

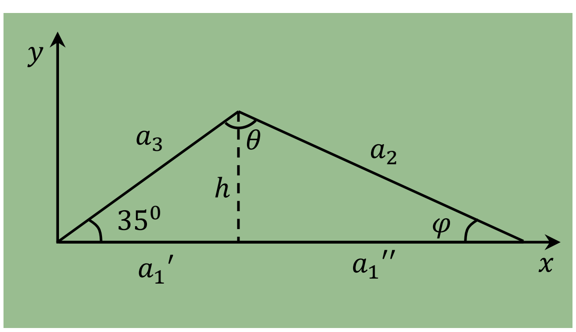



Πρόσοψη

<u>Λύση</u>:

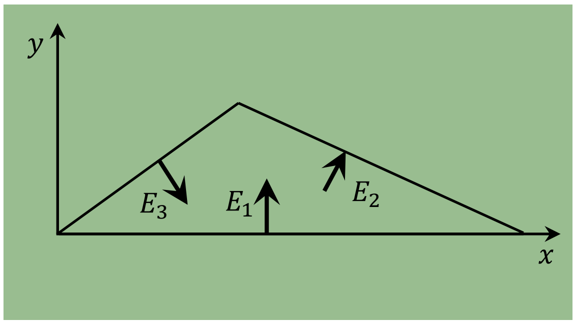
Κατ' αρχάς πρέπει να λύσουμε το τρίγωνο για να βρούμε όλες τις διαστάσεις του. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

$$a_1' = a_3 cos35^0 = 1.23\ m$$
$$a_1'' = a_1 - a_1' = 2.17\ m$$
$$h = a_3 sin35^0 = 0.86\ m$$
$$\varphi = tan^{-1}(h/a_1'') = 21.6^0$$
$$\theta = 180 - 35 - \varphi = 123.4^0$$
$$a_2 = a_1''/cos\varphi = 2.33\ m$$




Πλάγια όψη

Θεωρώντας ότι οι διαστάσεις των πλακών είναι μεγάλες, μπορούμε να πάρουμε την προσέγγιση του άπειρου φύλλου με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma$ όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίσο με $E = \sigma/2\varepsilon_0$ με διεύθυνση κάθετα στο φύλλο. Έτσι τα ηλεκτρικά πεδία είναι όπως στο παρακάτω σχήμα, με τη φορά που σημειώνεται, κάθετα στις πλάκες και απομακρυνόμενα από αυτές για θετικά φορτία και προς αυτές για αρνητικά φορτία.




Πλάγια όψη

Η πυκνότητα φορτίου είναι ίση με το φορτίο ανά εμβαδό. Οι τρεις πλάκες είναι ορθογώνιες με εμβαδό $A_i = a_i d$ και η γωνία του κάθε πεδίου ως προς τον άξονα – $x$ είναι η συμπληρωματική (κατά μέτρο) της γωνίας που σχηματίζει το αντίστοιχο φύλλο με αυτό τον άξονα. Έτσι κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα:

| | Πλάκα 1 | Πλάκα 2 | Πλάκα 3 |
|---|---|---|---|
| Μήκος πλευράς $(m)$ | $3.4$ | $2.33$ | $1.5$ |
| Εμβαδό $(m^2)$ | $6.8$ | $4.67$ | $3.0$ |
| Επιφ. Πυκνότητα $(nC/m^2)$ | $2.94$ | $-6.42$ | $8.33$ |
| Πεδίο $E$ $(N/C)$ | $166$ | $362$ | $470$ |
| Γωνία του $E$ | $90^0$ | $68.4^0$ | $-55^0$ |
| Συνιστώσα $x$ | $0$ | $133$ | $270$ |
| Συνιστώσα $y$ | $166$ | $337$ | $-385$ |
| | | | |

Τα πεδία αυτά είναι εξ' ολοκλήρου στο επίπεδο $x$-$y$ και το συνιστάμενο πεδίο έχει συνιστώσες

$$E_x = 404N/C$$
$$E_y = 118N/C$$

`

Οι αντίστοιχες δυνάμεις που δέχεται το φορτίο είναι ίσες με

$$F_x = qE_x = 2 \times 10^{-12} \times 807 = 8.07 \times 10^{-10}$$
$$F_y = qE_y = 2 \times 10^{-12} \times 236 = 2.36 \times 10^{-10}$$

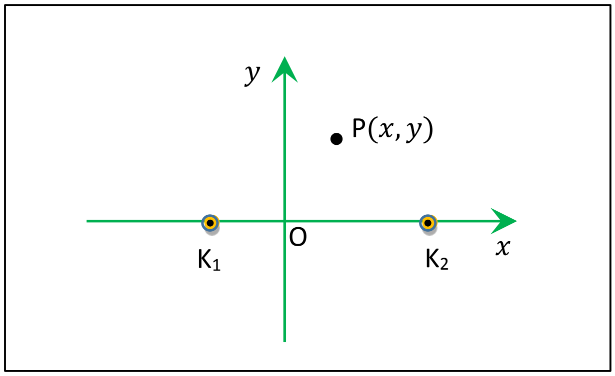
Ως προς τον άξονα $z$ δεν υπάρχει δύναμη και άρα το ηλεκτρόνιο κινείται με σταθερή ταχύτητα που σημαίνει ότι εξέρχεται από τον τριγωνικό χώρο σε χρόνο

$$t = \frac{d}{v} = \frac{2}{25} = 0.08\ s$$

Το ηλεκτρόνιο επιταχύνεται κατά $x$ και κατά $y$ με επιταχύνσεις που δίνονται από τις $a_x = F_x/m$ και $a_y = F_y/m$ οπότε οι αντίστοιχες αποκλίσεις σε σχέση με το σημείο εισόδου είναι ίσες με:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a_x t^2 = 0.052\ m$$
$$\Delta y = \frac{1}{2} a_y t^2 = 0.015\ m$$

A2) Στο παρακάτω σχήμα δυο άπειρες φορτισμένες γραμμές απείρου μήκους $K_1$ και $K_2$ με θετική και αρνητική πυκνότητα φορτίου $\lambda$ και $-2\lambda$ αντίστοιχα, τέμνουν κάθετα την σελίδα στα σημεία $(-1{,}0)$ και $(2{,}0)$ (σε $m$).
α) Να βρεθεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες με τη βοήθεια της μεθόδου της επαλληλίας το ηλεκτρικό δυναμικό σε τυχαίο σημείο $\mathrm{P}(x, y)$ που βρίσκεται επάνω στο επίπεδο $x$-$y$ εάν $k\lambda = 1/2$ (σε μονάδες *S.I.* όπου $k$ η γνωστή σταθερά του ηλεκτρισμού).
β) Να βρεθεί η εξίσωση των ισοδυναμικών επιφανειών σε μορφή πολυωνυμικού κλάσματος.



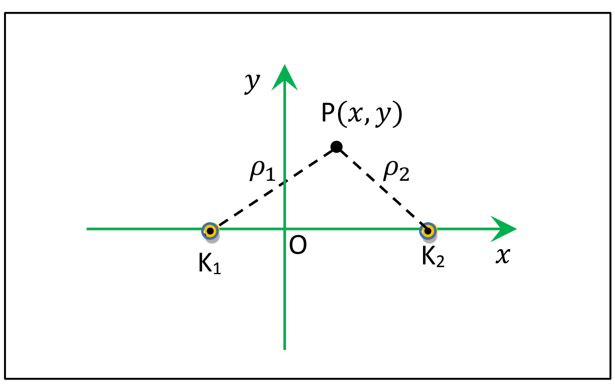

Λύση:

Στο επίπεδο $x$-$y$ ενώνουμε τα σημεία τομής $K_1$ και $K_2$ με το τυχαίο σημείο P. Τα διανύσματα $K_1P$ και $K_2P$ έχουν μέτρα

$$\rho_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

και

$$\rho_2 = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$




Σύμφωνα με την Εξ. 2.6, το ηλεκτρικό πεδίο μιας άπειρης γραμμής φορτίου ισούται με

$$E = \frac{2k\lambda}{\rho}$$

Αφού στην ουσία το $\rho$ είναι τα διάνυσμα θέσης στις πολικές συντεταγμένες και το $E$ είναι κατά μήκος του μοναδιαίου $\vec{e}_\rho$ (δείτε Εξ. 2.7), τότε το αντίστοιχο δυναμικό $V(\rho)$ συνδέεται με το ηλεκτρικό πεδίο $E$ μέσω της

$$E = -\frac{\partial V}{\partial \rho}$$

οπότε

$$V = -\int E d\rho = -2k\lambda ln(\rho) + c$$

όπου το $c$ είναι μια σταθερά. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα λόγω επαλληλίας έχουμε

$$V = -2k\lambda_1 ln(\rho_1) - 2k\lambda_2 ln(\rho_2) + c$$

όπου από το δεδομένο $k\lambda = 1/2$ έχουμε $2k\lambda_1 = 1$ και $2k\lambda_2$. Έτσι

$$V = -ln\rho_1 + 2ln\rho_2 + c$$

Οι ισοδυναμικές επιφάνειες αντιστοιχούν σε σταθερό δυναμικό δηλαδή πρέπει

$$-ln\rho_1 + 2ln\rho_2 = c'$$

όπου $c'$ είναι μια άλλη σταθερά. Η παραπάνω γράφεται και ως

$$-ln\rho_1 + ln({\rho_2}^2) = c'$$

Από τις ιδιότητες των λογαρίθμων

$$ln({\rho_2}^2/\rho_1) = c'$$

ή

$${\rho_2}^2/\rho_1 = e^{c'} => \frac{(x+1)^2 + y^2}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}} = e^{c\prime} =>$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε

$$\frac{[(x+1)^2 + y^2]^2}{(x-2)^2 + y^2} = c''$$

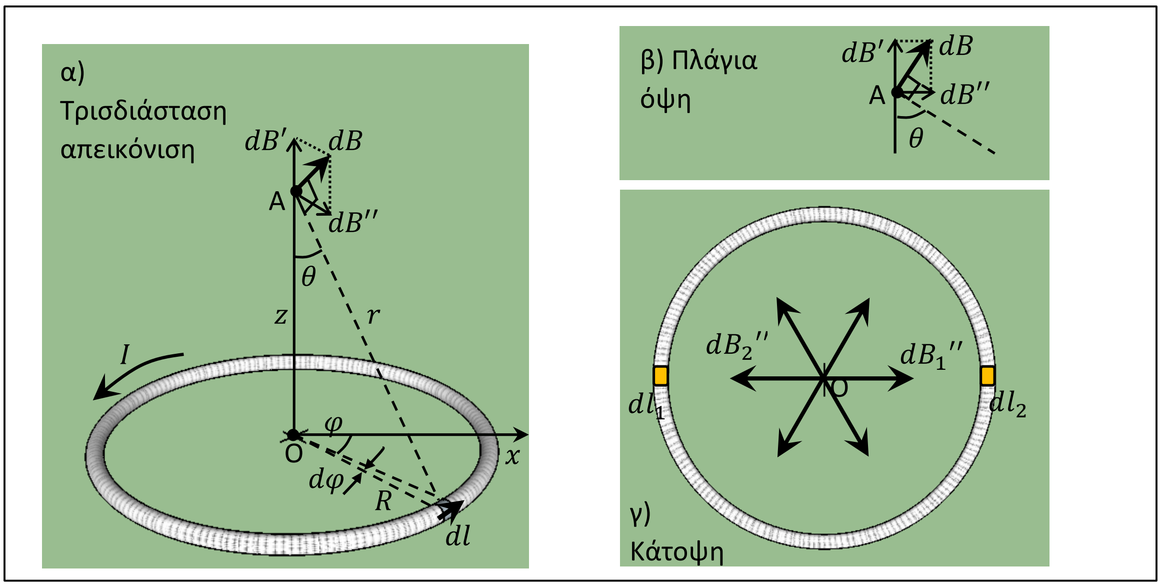
όπου η $c'' = e^{2c\prime}$ είναι επίσης σταθερά.

A3)

Από τον νόμο των Biot-Savart να υπολογισθεί με ολοκλήρωση (και όχι μέσω του νόμου του Ampere) το μαγνητικό πεδίο ενός λεπτού ρευματοφόρου δακτυλίου ακτίνας $R$ που διαρρέεται από ρεύμα $I$ σε σημείο Α που βρίσκεται επάνω στη μεσοκάθετό του και απέχει απόσταση $z$ από το κέντρο του Ο

Λύση:

Έστω στο παρακάτω σχήμα στην τρισδιάστατη απεικόνιση ένας λεπτός δακτύλιος με αμελητέο πάχος, ακτίνα $R$ και ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα $I$. Θέλουμε το παραγόμενο μαγνητικό πεδίο σε σημείο Α που βρίσκεται επάνω στη μεσοκάθετό του και απέχει απόσταση $z$ από το κέντρο του. Όπως φαίνεται και στο σχήμα στα αριστερά, για τον υπολογισμό του πεδίου "τεμαχίζουμε" τον δακτύλιο σε απειροστά κομμάτια που αντιστοιχούν σε στοιχειώδη γωνία $d\varphi$ και έχουν στοιχειώδες μήκος $dl = Rd\varphi$.




Σχήμα 2.5

Ορίζουμε το διάνυσμα στοιχειώδους μήκους $d\vec{l}$ το οποίο έχει μέτρο $dl$ και φορά αυτή του ρεύματος, καθώς και το $\vec{r}$ το οποίο είναι το διάνυσμα που ενώνει το $d\vec{l}$ με το σημείο παρατήρησης Α. Έστω $\theta$ η γωνία που σχηματίζει το $\vec{r}$ με τον άξονα $z$. Σύμφωνα με τον νόμο των Biot-Savart, το μαγνητικό πεδίο $d\vec{B}$ που δημιουργεί το $d\vec{l}$ είναι ίσο με

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Προσέξτε ότι το $d\vec{l}$ ως εφαπτόμενο στον κυκλικό αγωγό είναι αυτομάτως κάθετο στην ακτίνα του $R$. Επομένως είναι κάθετο και στο τρίγωνο που εικονίζεται στο σχήμα το οποίο αποτελείται από τα $R$, $z$ και $r$ και άρα και κάθετο και στο $\vec{r}$. Επομένως στο παραπάνω εξωτερικό γινόμενο δεν υπάρχει όρος ημιτόνου και το μέτρο του στοιχειώδους μαγνητικού πεδίου είναι ίσο με

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{r^2}$$

Λόγω επίσης του εξωτερικού γινομένου, το $d\vec{B}$ είναι κάθετο τόσο στο $d\vec{l}$ όσο και στο $\vec{r}$. Έτσι και το $d\vec{B}$ βρίσκεται στο επίπεδο του προαναφερθέντος τριγώνου (ώστε να είναι κάθετο στο $d\vec{l}$) και σχηματίζει βεβαίως γωνία $90^0$ με το $\vec{r}$. Με αναφορά στην πλάγια όψη του παραπάνω σχήματος, μπορούμε να αναλύσουμε το $d\vec{B}$ σε δυο συνιστώσες, την $dB'$ η οποία είναι κατά μήκος του άξονα $z$ και την $dB''$ η οποία είναι κατά μήκος της ακτίνας $R$. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η γωνία μεταξύ των $dB''$ και $dB$ είναι ίση με τη $\theta$ επειδή αυτά τα δυο διανύσματα είναι κάθετα στις πλευρές του τριγώνου που σχηματίζουν τη $\theta$. Έτσι $dB' = dBsin\theta$ και $dB'' = dBcos\theta$. Εάν ολοκληρώσουμε σε όλο τον δακτύλιο, τότε όλες οι συνιστώσες $dB''$ σχηματίζουν ένα διανυσματικό αστέρα παρόμοιο με αυτό που εικονίζεται στην κάτοψη του παραπάνω σχήματος, π.χ. τα αντιδιαμετρικά $dl_1$ και $dl_2$ δημιουργούν δυο αντίστοιχες αντιδιαμετρικές συνιστώσες $dB_1''$ και $dB_2''$ οι οποίες λόγω συμμετρίας είναι ίσες κατά μέτρο και έτσι αλληλο-αναιρούνται. Έτσι ο αστέρας ισοδυναμεί με το μηδενικό διάνυσμα και οι συνιστώσες $dB''$ δεν συνεισφέρουν κάτι στο ολικό και πεδίο και θα τις αγνοήσουμε. Η $z$-συνιστώσα είναι ίση με

$$dB' = dBsin\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{r^2}sin\theta$$

όπου $\theta$ είναι η γωνία του κώνου η οποία είναι σταθερή όπως περιστρεφόμαστε επάνω στο δακτύλιο. Δε μένει παρά να ολοκληρώσουμε επάνω στον δακτύλιο και να βγάλουμε τις σταθερές εκτός ολοκληρώματος όπως και τα $I$, $r$ και $\theta$ αφού είναι και αυτά είναι σταθερά. Γράφοντας το διαφορικό $dl$ ως $Rd\varphi$ έχουμε:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{r^2}sin\theta\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R}{r^2}sin\theta$$

Από απλή τριγωνομετρία $sin\theta = R/r$ οπότε

$$B = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{r^3}$$

Το $r$ δεν είναι δεδομένο του προβλήματος αλλά μπορούμε να το γράψουμε με τη βοήθεια του Πυθαγόρειου θεωρήματος συναρτήσει των $z$ και $R$. Το τελικό αποτέλεσμα είναι το

$$B = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Α4) Ραδιοφωνικό κύμα στα $96.5\ FM$ το οποίο ταξιδεύει κατά μήκος του άξονα $x$ με το μαγνητικό πεδίο πλάτους $10^{-4}\ T$ πολωμένο κατά μήκος του άξονα $z$, ανακλάται σε μεταλλική επιφάνεια η οποία τέμνει κάθετα την πορεία του κύματος στη θέση $x = 0$. Κατά την ανάκλαση αλλάζουν πρόσημο τα Η/Μ πεδία αλλά όχι όμως και τα μέτρα τους και στο $t = 0$ μηδενίζονται επάνω στην μεταλλική επιφάνεια. Έστω $\vec{e}$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα στο επίπεδο $x$-$y$ στο πρώτο τεταρτημόριο το οποίο σχηματίζει γωνία $30^0$ με τον άξονα $x$. Να βρεθεί το διπλό γινόμενο

$$\left(\vec{E} \times \vec{e}\right) \times \vec{k}$$

σε μονάδες S.I. όπου $\vec{E}$ είναι το ηλεκτρικό πεδίο στο $x = -2\ m$ κατά τη χρονική στιγμή $t = 10\ ns$, $\vec{k}$ είναι το κυματάνυσμα και το σύμβολο $\times$ αναπαριστάνει το εξωτερικό γινόμενο.

<u>Λύση</u>:

Από τα δεδομένα έχουμε για τη συχνότητα $f = 96.5\ MHz = 96.5 \times 10^6\ Hz$. Το αντίστοιχο μήκος κύματος μπορούμε να το βρούμε από την κυματική σχέση

$$c = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{96 \times 10^6} = 3.11\ m$$

Αφού η διεύθυνση διάδοσης του κύματος είναι ο άξονας $x$ (πριν την ανάκλαση), τότε τα πεδία θα περιέχουν τον κοινό όρο

$$sin(kx - \omega t) = sin2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - ft\right)$$

Αφού το μαγνητικό πεδίο είναι πολωμένο κατά τον άξονα $z$, τότε θα έχουμε

$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_z sin2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - ft\right)$$

Αφού τα $\vec{E}$, $\vec{B}$ και η διεύθυνση διάδοσης αποτελούν τρισορθογώνιο σύστημα, τότε το $\vec{E}$ πρέπει να είναι κατά μήκος του άξονα $y$, δηλαδή

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_y sin2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - ft\right)$$

Μετά την ανάκλαση, τα πεδία αλλάζουν πρόσημο αλλά και η δέσμη ταξιδεύει προς τον αρνητικό άξονα $x$ οπότε έχουμε

$$\vec{B} = -B_0 \vec{e}_z sin2\pi\left(-\frac{x}{\lambda} - ft\right) = B_0 \vec{e}_z sin2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + ft\right)$$

$$\vec{E} = -E_0 \vec{e}_y sin2\pi\left(-\frac{x}{\lambda} - ft\right) = E_0 \vec{e}_y sin2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + ft\right)$$

Δεν υπάρχει αρχική φάση $\varphi_0$ στα παραπάνω ημίτονα αφού στο $t = 0$ τα πεδία μηδενίζονται. Το κυματάνυσμα έχει μέτρο

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3.125} = 2.02\ rad/m$$

ενώ η φορά του είναι κατά τον αρνητικό άξονα $x$ δηλαδή

$$\vec{k} = -2.02\vec{e}_x \, rad/m$$

Κατά τη χρονική στιγμή $t = 10\ ns$ και στο $x = -2\ m$

$$\vec{E} = -E_0\vec{e}_y sin2\pi\left(\frac{-2}{3.125} + 96 \times 10^6 \times 10 \times 10^{-9}\right) = -0.90E_0\vec{e}_y$$

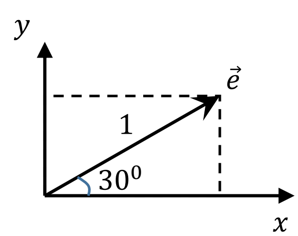
Τα πλάτη των πεδίων σχετίζονται από την $E_0 = cB_0$ οπότε

$$E_0 = 3 \times 10^8 \times 10^{-4} = 3 \times 10^4$$

και έτσι

$$\vec{E} = -0.90 \times 3 \times 10^4\vec{e}_y = -2.7 \times 10^4\vec{e}_y$$

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, το μοναδιαίο $\vec{e}$ σχηματίζει γωνία $30^0$ με τον άξονα $x$ και έχει μέτρο μονάδα. Επομένως οι συνιστώσες του είναι $e_x = 1 \cdot cos30^0 = 1/2$ και $e_y = 1 \cdot sin30^0 = \sqrt{3}/2$.




Εφόσον το $\vec{E}$ είναι κατά μήκος του άξονα $-y$ άρα ανήκει και αυτό στο επίπεδο $x$-$y$ όπως και το $\vec{e}$. Φαίνεται αμέσως τότε ότι το εξωτερικό γινόμενο $\vec{E} \times \vec{e}$ το οποίο πρέπει να είναι κάθετο και στο $\vec{E}$ και στο $\vec{e}$ είναι κάθετο στο επίπεδο $x$-$y$, δηλαδή κατά μήκος του άξονα $z$ και έχει μέτρο ίσο με

$$\left|\vec{E} \times \vec{e}\right| = E \cdot 1 \cdot sin120^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}E = 2.34$$

(το $120^0$ είναι η γωνία μεταξύ του $\vec{E}$ και του $\vec{e}$). Επομένως

$$\vec{E} \times \vec{e} = 2.34\vec{e}_z$$

Δεδομένου ότι $\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$ το ζητούμενο εξωτερικό γινόμενο είναι ίσο με

$$\left(\vec{E} \times \vec{e}\right) \times \vec{k} = 2.34\vec{e}_z \times (-2.02\vec{e}_x) = -4.72\vec{e}_y$$

σε μονάδες $S.I.$