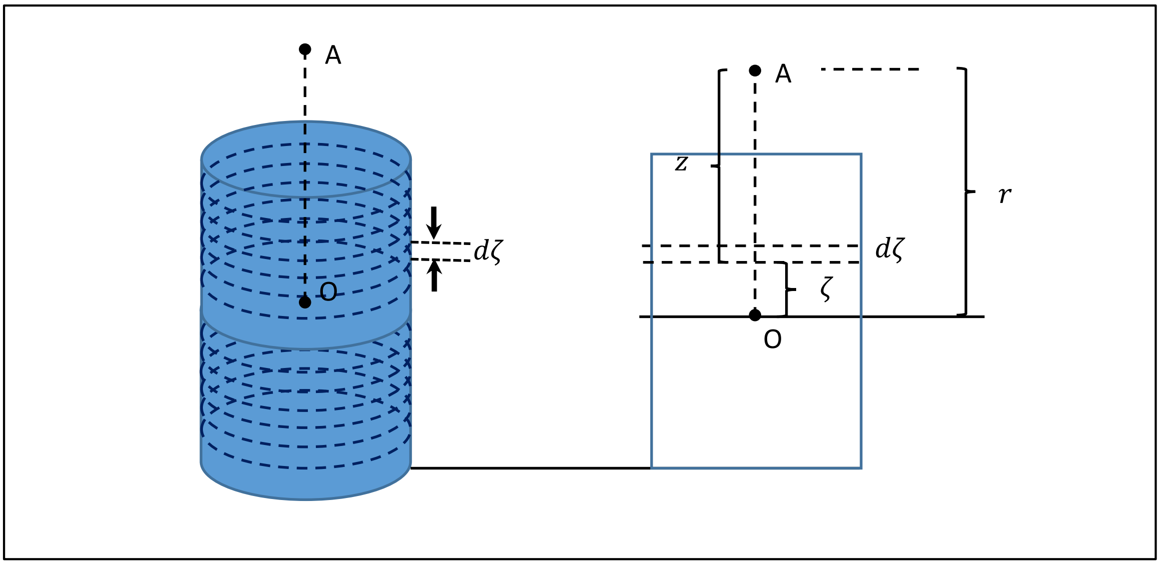
| | |
|---|---|
| | ΤΜΗΜΑ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ<br><br>Τελική Εξέταση Φυσικής<br><br>Διδάσκων: Δ. Κουζούδης |
| Ημερομηνία | 24 Ιουνίου 2015 |
| Ονοματεπώνυμο: | |
| ΑΜ: (Ηλεκτρ. Γραμματεία) | |

Υποδείξεις προς τους φοιτητές: α) Η εξέταση είναι με κλειστές σημειώσεις και βιβλία, και αποτελείται από 5 ισοδύναμα προβλήματα. Επιτρέπεται η χρήση των τυπολογίων που ετοίμασε ο διδάσκοντας. β) Απαγορεύεται η χρήση κινητών τηλεφώνων αλλά και οποιασδήποτε είδους ηλεκτρονικής συσκευής, συμπεριλαμβανομένων και των αριθμομηχανών τσέπης αφού όλες οι απαντήσεις είναι αναλυτικές. γ) Οι απαντήσεις πρέπει να είναι πλήρεις (αλλά όχι πολύ φλύαρες). Αποτελέσματα χωρίς τεκμηρίωση δεν θα γίνονται δεκτά ακόμα και εάν είναι αριθμητικώς σωστά. δ) Επειδή κάποιοι φοιτητές συνεχίζουν να γράφουν και μετά το πέρας της εξέτασης, δηλώνω ότι μετά την αποχώρησή μου από την αίθουσα δεν πρόκειται να δεχτώ κανένα γραπτό αφού δεν είναι δυνατό να ελέγξω τον προορισμό του. Καλή επιτυχία!

**ΘΕΜΑ 1**) Να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο ενός ομοιόμορφα φορτισμένου συμπαγούς σωλήνα εσωτερικής ακτίνας $R_1$, εξωτερικής $R_2$, και μικρού μήκους $L$ με χωρική πυκνότητα φορτίου $\rho$ κατανεμημένη σε όλο τον όγκο του, σε σημείο Α επάνω στον άξονά του και σε απόσταση $r$ από το κέντρο του Ο, όπου $r > L/2$ (στον εξωτερικό χώρο του κυλίνδρου). Δίνονται στον παρακάτω πίνακα τα ηλεκτρικά πεδία φορτισμένου λεπτού α) δακτυλίου, β) δακτυλίου με εξωτερική – εσωτερική ακτίνα και γ) δίσκου αντίστοιχα, επάνω στη μεσοκάθετο τους (μπορεί να μη χρειαστούν όλα). Επίσης θα χρειαστείτε το ολοκλήρωμα δύναμης $\int x^a dx = x^{a+1}/(a+1)$:

| α | β | γ |
|---|---|---|
| $\frac{kQz}{(z^2+R^2)^{3/2}}$ | $\frac{2kQ}{\pi(R_2^2-R_1^2)}\times\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+R_1^2}}-\frac{z}{\sqrt{z^2+R_2^2}}\right)$ | $\frac{2kQ}{R^2}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$ |

Λύση: Τεμαχίζω σε λεπτούς δίσκους πάχους $d\zeta$ και ακτίνας $R$, ο καθένας απέχει απόσταση $z = r - \zeta$ από το σημείο Α




Πεδίο δίσκου:

$$dE = \frac{2kdq}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \times \left( \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_1^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_2^2}} \right)$$

Πυκνότητα φορτίου

$$dq = \rho dV = \rho\pi(R_2^2 - R_1^2)dz$$

Επειδή όλα τα $dE$ είναι συγγραμμικά, μπορούμε απλά να αθροίσουμε τα μέτρα τους. Ολοκλήρωση σε όλο τον κύλινδρο $K$:

$$E = \int_K dE = 2k\rho \int_{z=r+L/2}^{r-L/2} \left( \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_1^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_2^2}} \right) dz$$

$$E = k\rho \int_{z=r+L/2}^{r-L/2} \left[ (z^2 + R_1^2)^{-1/2} - (z^2 + R_2^2)^{-1/2} \right] d(z^2)$$

$$E = \frac{k\rho}{2} \left\{ \sqrt{(r + L/2)^2 + {R_1}^2} - \sqrt{(r - L/2)^2 + {R_1}^2} - \sqrt{(r + L/2)^2 + {R_2}^2} + \sqrt{(r - L/2)^2 + {R_2}^2} \right\}$$

**ΘΕΜΑ 2)** Στο εσωτερικό φορτισμένου κυλίνδρου απείρου μήκους και ακτίνας $R$, η χωρική κατανομή του φορτίου είναι σταθερή και ίση με $\eta$. Να βρεθούν:

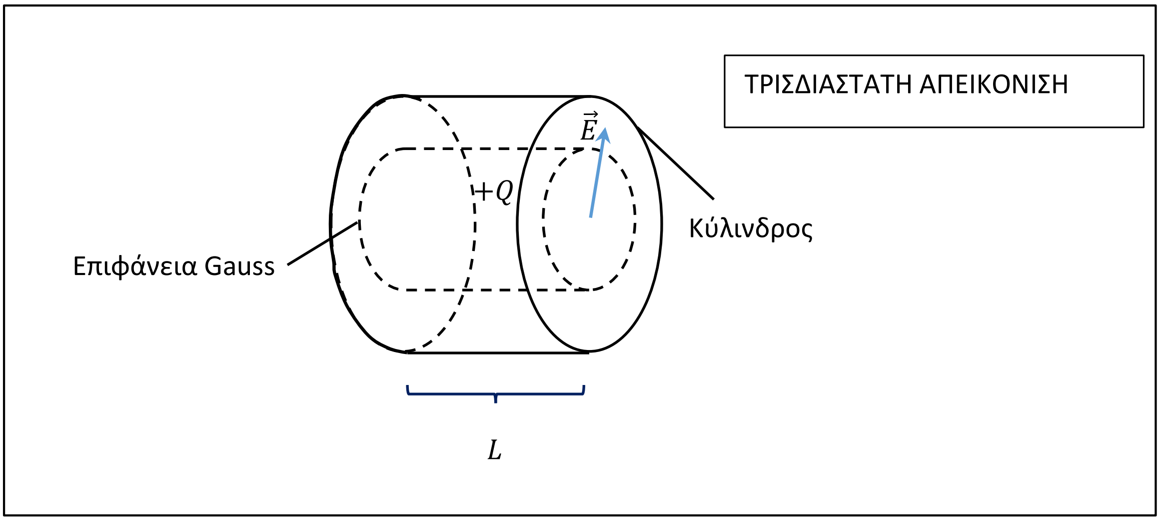
**α)** (**8 μονάδες**) Το ηλεκτρικό πεδίο εάν γνωρίζετε ότι είναι κατά μήκος του μοναδιαίου $\vec{e}_\rho$

**β)** (**12 μονάδες**) Να βρεθεί η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Α και Β με κυλινδρικές συντεταγμένες $(\rho, \varphi, z)$ ίσες με $(1, 0^0, 0)$ και $(2, 30^0, 2)$ αντίστοιχα, όπου οι αποστάσεις είναι σε μέτρα και οι γωνίες σε μοίρες. (Σημείωση: Πρέπει οπωσδήποτε να σχεδιάσετε δυο διαφορετικά σχήματα σε αυτό το πρόβλημα, ένα για το μέρος α και ένα για το β).

<u>Λύση</u>: α) Παίρνουμε κυλινδρική επιφάνεια Gauss μήκους $L$ και ακτίνας $\rho$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αφού η φορά του $E$ είναι η φορά του μοναδιαίου $\vec{e}_\rho$, το $d\vec{A}$ στις δυο βάσεις $B_1$ και $B_2$ του κυλίνδρου Gauss είναι κάθετο στο $\vec{E}$ και έτσι $\vec{E}\cdot d\vec{A} = 0$ εκεί και τα αντίστοιχα ολοκληρώματα μηδενίζονται. Στην παράπλευρη επιφάνεια $\Pi$ βλέπουμε από την πλάγια όψη ότι το $d\vec{A}$ είναι παράλληλο με το $\vec{E}$ και έτσι $\vec{E}\cdot d\vec{A} = EdA$. Επομένως

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} => \int_{B_1} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{B_2} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{\Pi} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} => \int_{\Pi} EdA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

όπου $Q$ είναι το περικλειόμενο φορτίο από τον κύλινδρο Gauss, το οποίο θα το υπολογίσουμε παρακάτω.




Λόγω κυλινδρικής συμμετρίας το $E$ είναι σταθερό επάνω στην $\Pi$ και έτσι μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος:

$$E\int_{\Pi} dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου Gauss είναι ίσο με $2\pi\rho L$ (*βάση×ύψος*). Επομένως

$$2E\pi\rho L = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Λύνοντας

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L\rho}$$

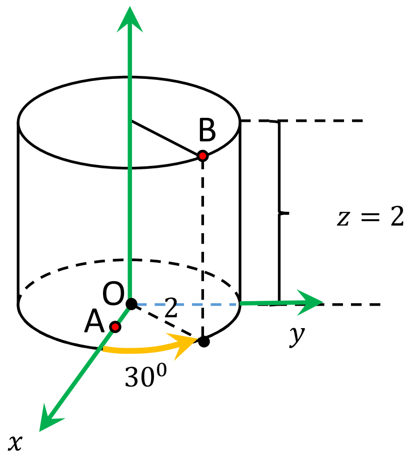
Ο όγκος της επιφάνειας Gauss ισούται με $\pi\rho^2 L$ (*βάση×ύψος*) και επομένως από την πυκνότητα φορτίου $\eta$ το περικλειόμενο φορτίο ισούται με

$$Q = \eta\pi\rho^2 L$$

Επομένως το ηλεκτρικό πεδίο ισούται με

$$E = \frac{\eta\pi\rho^2 L}{2\pi\varepsilon_0 L\rho} = \frac{\eta}{2\varepsilon_0}\rho$$

β)




Η ένταση του μέρους α είναι εκφρασμένη στις κυλινδρικές συντεταγμένες και μάλιστα η φορά του $E$ είναι η φορά του μοναδιαίου $\vec{e}_\rho$ που σημαίνει ότι υπάρχει μόνο μια συνιστώσα, η $E_\rho$ η οποία είναι ίση με την παραπάνω έκφραση. Από την Εξ. 4.7α έχουμε

$$E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{\eta}{2\varepsilon_0}\rho$$

Ολοκληρώνοντας

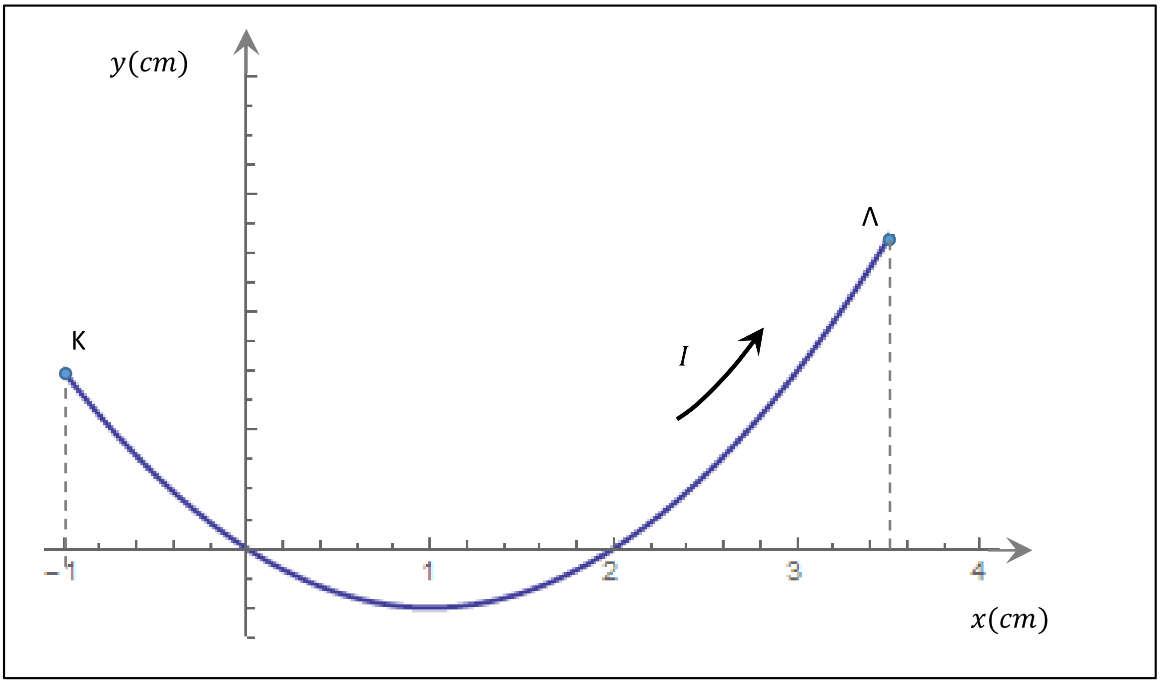
$$V(\rho, \varphi, z) = -\frac{\eta}{4\varepsilon_0}\rho^2 + c(\varphi, z)$$

Εν γένει το δυναμικό θα είναι συνάρτηση και των τριών μεταβλητών για αυτό και γράψαμε τη σταθερά ολοκλήρωσης με αυτό τον τρόπο. Όμως αφού οι άλλες δυο συνιστώσες είναι μηδενικές, τότε από τις Εξ. 4.7β και 4.7γ έχουμε $\partial V/\partial\varphi = 0$ και $\partial V/\partial z = 0$ και άρα η $c$ είναι απόλυτη σταθερά.

Τα σημεία A και B έχουν αντίστοιχα $\rho_A = 1$ και $\rho_B = 2$ επομένως η διαφορά δυναμικού ισούται με

$$V_B - V_A = -\frac{\eta}{4\varepsilon_0}(\rho_B^2 - \rho_A^2) = -\frac{5\times 10^{-6}}{4\times 8.85\times 10^{-12}}(2^2 - 1^2) = 1.41\times 10^5\ V$$

**ΘΕΜΑ 3)** (**20 μονάδες**) Στο παρακάτω σχήμα το τμήμα της καμπύλης ΚΛ μεταξύ $x = -1$ και $x = 3.5$ αντιστοιχεί σε ένα αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα $I$ με τη φορά που δείχνεται. Η καμπύλη είναι δευτεροβάθμια ως προς $x$ με ρίζες στα $x = 0$, $x = 2$ και ελάχιστο στο $y = -2$. Ένα ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_0(\vec{e}_x - \sqrt{3}\vec{e}_y)$ όπου $B_0$ σε Tesla, εφαρμόζεται στην περιοχή όπου ανήκει ο αγωγός. Να βρεθεί η αντίστοιχη μαγνητική δύναμη σε Newton που ασκείται στον αγωγό. (Σημείωση: Θυμηθείτε ότι $tan(-x) = -tanx$ και αντιστρόφως)




Λύση: Η καμπύλη περιγράφεται από την εξίσωση

$$y = ax(x-2)$$

με ελάχιστο εκεί όπου

$$\frac{dy}{dx} = 0 => (x-2) + x = 0 => x = 1$$

$$y(1) = -a$$

Από τα δεδομένα στο ελάχιστο $y = -2$ άρα $a = 2$ και $y = 2x(x-2)$. Οι συντεταγμένες στα σημεία Κ και Λ είναι

Κ: $y_K = y(-1) = 2(-1)(-1-2) = 6$

Λ: $y_\Lambda = y(3.5) = 7(1.5) = 10.5$

Το διάνυσμα $\vec{s} = \overrightarrow{K\Lambda}$ έχει συντεταγμένες τη διαφορά των συντεταγμένων των Λ και Κ:

$$x_\Lambda - x_K = 3.5 - (-1) = 4.5$$

και

$$y_\Lambda - y_K = 10.5 - 6 = 4.5$$

(ίσα $x$ και $y$) και άρα έχει μέτρο

$$s = \sqrt{4.5^2 + 4.5^2} = 4.5\sqrt{2}\,cm = 0.045\sqrt{2}\,m$$

και γωνία

$$\theta_s = atan\left(\frac{4.5}{4.5}\right) = 45^0$$

Το μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_0(\vec{e}_x - \sqrt{3}\vec{e}_y)$ έχει συντεταγμένες $B_x = B_0$ και $B_y = -B_0\sqrt{3}$ και άρα έχει μέτρο

$$B = \sqrt{{B_0}^2 + 3{B_0}^2} = B_0\sqrt{4} = 2B_0\,Tesla$$

και γωνία

$$\theta_B = atan\left(\frac{-B_0\sqrt{3}}{B_0}\right) = atan(-\sqrt{3}) = -30^0$$

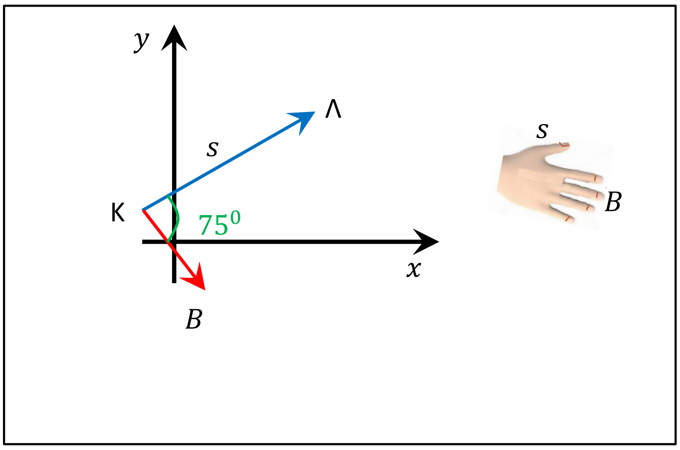
Η γωνία $\theta$ μεταξύ των δυο αυτών διανυσμάτων ισούται με

$$\theta = \theta_s - \theta_B = 45^0 - (-30^0) = 75^0$$

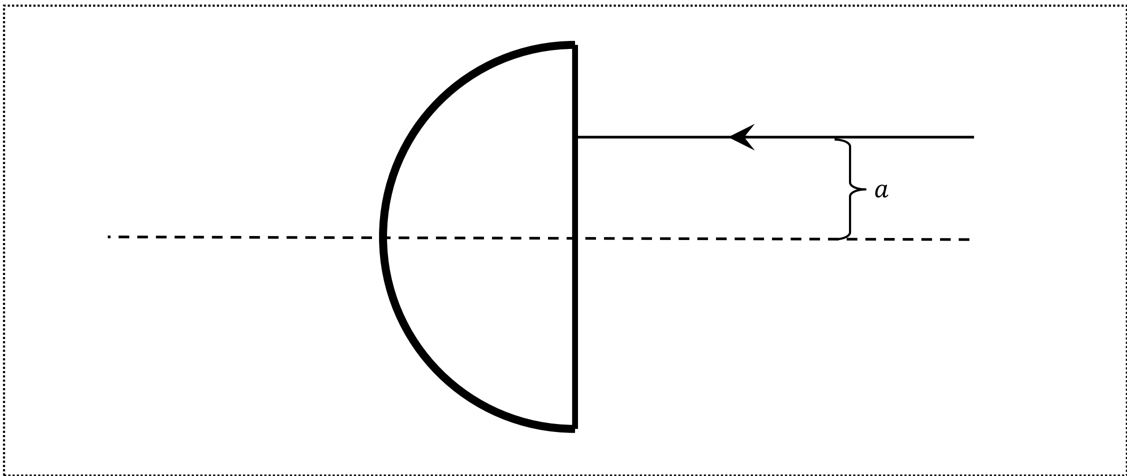
Η μαγνητική δύναμη στον αγωγό ισούται με

$$F = IsBsin\theta = I \times 0.045\sqrt{2} \times 2B_0 \times sin(75^0) = 0.9\sqrt{2}IB_0 sin(75^0)\;N$$

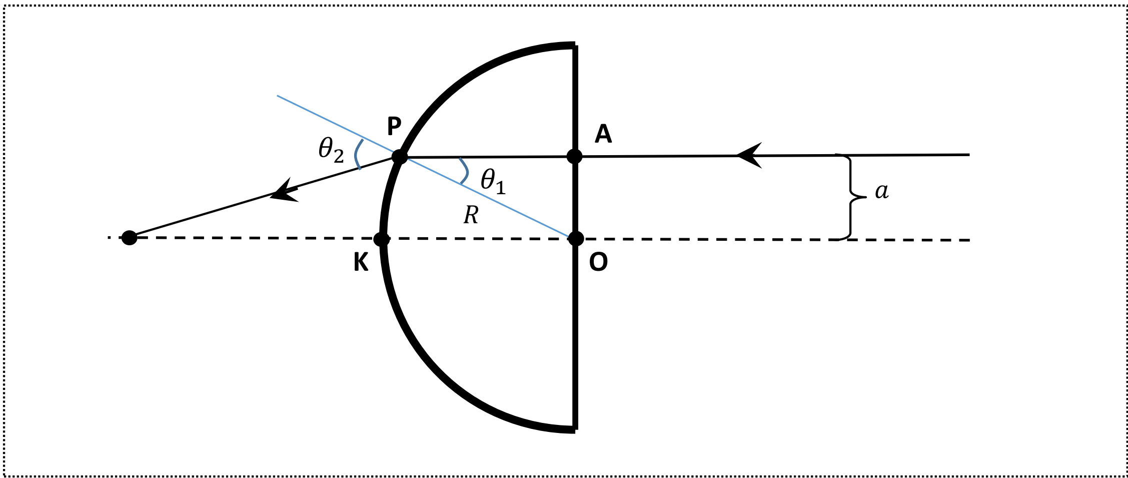
Η φορά της δύναμης σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού είναι προς τα μέσα της σελίδας.



**ΘΕΜΑ 4)** (10 μονάδες) Λεπτή φωτεινή δέσμη προσπίπτει στην επίπεδη επιφάνεια ενός γυάλινου ημισφαιρίου με διεύθυνση παράλληλη προς τον άξονα συμμετρίας του ημισφαιρίου και σε απόσταση $a$ από αυτόν. Η γωνία διάθλασης επάνω στην σφαιρική επιφάνεια κατά την έξοδο της δέσμης είναι ίση με $\theta$. Όταν η δέσμη κατευθύνεται κατά μήκος του άξονα συμμετρίας, απαιτείται χρόνος $t$ για να διαπεράσει η δέσμη το ημισφαίριο. Να βρεθεί η εστιακή απόσταση του ημισφαιρίου.




Λύση. Φέρουμε στο σημείο P την ακτίνα PK η οποία είναι και η τοπική κάθετος. Οι γωνίες πρόσπτωσης $\theta_1$ και διάθλασης $\theta_2$ ορίζονται ως προς αυτήν.




Στην επίπεδη επιφάνεια έχουμε κάθετη πρόσπτωση οπότε η δέσμη συνεχίζει ανενόχλητη.

Από τον νόμο του Snell

$$n_1 sin\theta_1 = n_2 sin\theta_2$$

Για τον αέρα $n_2 = 1$ και η $\theta_2 = \theta$ δεδομένη. Θέτοντας $n_1 = n$ έχουμε

$$n sin\theta_1 = sin\theta$$

Από το τρίγωνο ΡΑΟ

$$sin\theta_1 = \frac{a}{R}$$

Η απόσταση ΟΚ που καλύπτει η δέσμη όταν κατευθύνεται κατά μήκος του άξονα συμμετρίας είναι η ακτίνα $R$ του ημισφαιρίου. Αφού απαιτείται χρόνος $t$ για να καλύψει το φως αυτή την απόσταση, τότε η ταχύτητά του είναι ίση με

$$v = \frac{R}{t}$$

Από τον ορισμό του δείκτη διάθλασης

$$n = \frac{c}{v} = \frac{ct}{R} => R = \frac{ct}{n}$$

Επομένως

$$sin\theta_1 = \frac{a}{R} = \frac{an}{ct}$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω

$$nsin\theta_1 = sin\theta => \frac{an^2}{ct} = sin\theta => n = \sqrt{\frac{ctsin\theta}{a}}$$

Η εστιακή απόσταση δίνεται από την

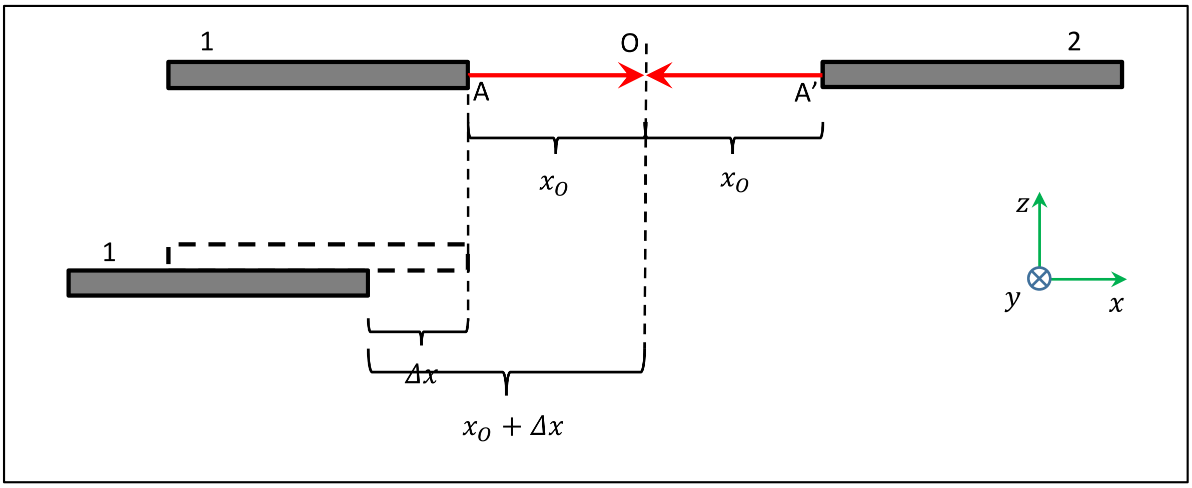
$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Αφού η πίσω επιφάνεια είναι επίπεδη, έχει άπειρη ακτίνα καμπυλότητας $R_2 \to \infty$. Θέτοντας $R_1 = R$ έχουμε:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\frac{1}{R} => f = \frac{R}{n-1} = \frac{ct}{n(n-1)} = \frac{ct}{\sqrt{\frac{ctsin\theta}{a}}\left(\sqrt{\frac{ctsin\theta}{a}} - 1\right)}$$

**ΘΕΜΑ 5)** Δυο οπτικές ίνες 1 και 2 παράλληλες στον άξονα $x$ που εκπέμπουν δέσμες με φως διαφορετικής συχνότητας $f_1$ και $f_2$ αντίστοιχα και προς αντίθετες κατευθύνσεις, με ίσο πλάτος μαγνητικού πεδίου $B_0$ πολωμένο κάθετα και έξω από τη σελίδα (και για τις δυο συχνότητες), τοποθετούνται μέσα σε σκοτεινό θάλαμο. Τα σημεία τους Α και Α' που εκπέμπουν φως ισαπέχουν απόσταση $x_O$ από ένα σημείο Ο επάνω στον άξονα $x$. Την χρονική στιγμή $t = 0$ τα δυο κύματα στα σημεία Α και Α' είναι μηδέν και τείνουν να αυξηθούν προς το Ο.

α) (**9 μονάδες**) Να δοθεί η πλήρης μαθηματική έκφραση (διανυσματική μορφή) του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου καθώς και της πυκνότητας ενέργειας στο σημείο Ο της κάθε δέσμης για κάθε χρόνο $t$ (επάνω σχήμα) β) (**11 μονάδες**): Έστω ότι η ίνα 1 μετατοπίζεται κατά $\Delta x$ προς τον αρνητικό άξονα $x$ (κάτω σχήμα). Να υπολογίσετε το συνιστάμενο ηλεκτρικό πεδίο $E$ στο A κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ θεωρώντας ότι οι δυο συχνότητες είναι πολύ κοντά η μια στην άλλη (αλλά όχι ίσες) και χρησιμοποιώντας την προσέγγιση $f_1 - f_2 \approx 0$ στο τελικό σας αποτέλεσμα. Επίσης θεωρήστε ότι $\Delta x \ll x_O$ και αγνοήστε τον όρο που περιέχει το $\Delta x$ δίπλα στον όρο που περιέχει το $x_O$ και υπολογίστε για ποια $\Delta x$ έχουμε $E = 0$




<u>Λύση</u>:

α) Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, αρχικά οι δυο ίνες είναι ευθυγραμμισμένες και εκπέμπουν κύματα που δίνονται από τα μαγνητικά πεδία

$$\vec{B}_1 = -B_0 \vec{e}_y sin(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$\vec{B}_2 = -B_0 \vec{e}_y sin(k_2 x + \omega_2 t)$$

(το δεύτερο κύμα κινείται προς τα αριστερά οπότε έχει αντίθετο πρόσημο μέσα στο ημίτονο). Οι κυκλικές συχνότητες είναι ίσες με $\omega_1 = 2\pi f_1$ και $\omega_2 = 2\pi f_2$, τα μήκη κύματος $\lambda_1 = c/f_1$ και $\lambda_2 = c/f_2$, ενώ οι κυματάριθμοι $k_1 = 2\pi/\lambda_1 = 2\pi f_1/c$ και $k_2 = 2\pi f_2/c$. Επομένως στο σημείο O με $x = x_O$ έχουμε:

$$\vec{B}_1 = -B \vec{e}_y sin \frac{2\pi f_1}{c}(x_O - ct)$$

$$\vec{B}_2 = -B_0 \vec{e}_y sin \frac{2\pi f_2}{c}(x_O + ct)$$

Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι ίσο με

$$E_0 = B_0 c$$

Τα $\vec{E}$, $\vec{B}$ και η διεύθυνση διάδοσης (ο άξονας $x$) αποτελούν τρισορθογώνιο σύστημα αναφοράς επομένως το $\vec{E}$ είναι κατά μήκος του άξονα $+z$. Επίσης το $\vec{B}$ είναι σε πλήρη φάση με το $\vec{E}$ (έχουν το ίδιο ημίτονο) και έτσι:

$$\vec{E}_1 = B_0 c \ \vec{e}_z sin \frac{2\pi f_1}{c}(x_O - ct)$$

$$\vec{E}_2 = B_0 c\vec{e}_z sin\frac{2\pi f_2}{c}(x_O + ct)$$

Η πυκνότητα ενέργειας δίνεται από την $u = \varepsilon_0 E^2$ επομένως:

$$u_1 = \varepsilon_0 (B_0 c)^2 sin^2\left[\frac{2\pi f_1}{c}(x_O - ct)\right]$$

$$u_2 = \varepsilon_0 (B_0 c)^2 sin^2\left[\frac{2\pi f_2}{c}(x_O + ct)\right]$$

β)

Λόγω του επιπλέον $\Delta x$, τα ηλεκτρικά πεδία στο σημείο A είναι ίσα με

$$\vec{E}_1 = B_0 c\, \vec{e}_z sin\frac{2\pi f_1}{c}(x_O + \Delta x - ct)$$

$$\vec{E}_2 = B_0 c\vec{e}_z sin\frac{2\pi f_2}{c}(x_O + ct)$$

Το συνιστάμενο πεδίο κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ ισούται με

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = B_0 c\vec{e}_z \left\{sin\left[\frac{2\pi f_1}{c}(x_O + \Delta x)\right] + sin\left[\frac{2\pi f_2}{c}x_O\right]\right\}$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική σχέση

$$sina + sinb = 2sin(\frac{a+b}{2})cos(\frac{a-b}{2})$$

οδηγεί στο

$$\vec{E} = 2B_0 c\vec{e}_z sin\left[\frac{2\pi\bar{f}}{c}x_O + \pi f_1\frac{\Delta x}{c}\right]cos\left[\frac{2\pi\delta f}{c}x_O + \pi f_1\frac{\Delta x}{c}\right]$$

όπου $\bar{f}$ η μέση τιμή των $f_1, f_2$ και $\delta f$ η ημιδιαφορά τους. Για κοντινές συχνότητες $\delta f \approx 0$ και

$$\vec{E} = 2B_0 c\vec{e}_z sin\left[\frac{2\pi\bar{f}}{c}x_O + \pi f_1\frac{\Delta x}{c}\right]cos\left[\pi f_1\frac{\Delta x}{c}\right]$$

Αγνοώντας τον όρο που περιέχει το $\Delta x$ δίπλα στον όρο που περιέχει το $x_O$

$$\vec{E} = 2B_0 c\vec{e}_z sin\left[\frac{2\pi\bar{f}}{c}x_O\right]cos\left[\pi f_1\frac{\Delta x}{c}\right]$$

Το $E$ μηδενίζεται σε σχέση με το $\Delta x$ όταν το συνημίτονο του 2$^{ου}$ όρου γίνει μηδέν δηλαδή όταν

$$\pi f_1\frac{\Delta x}{c} = n\pi => \Delta x = n\frac{c}{f_1}$$