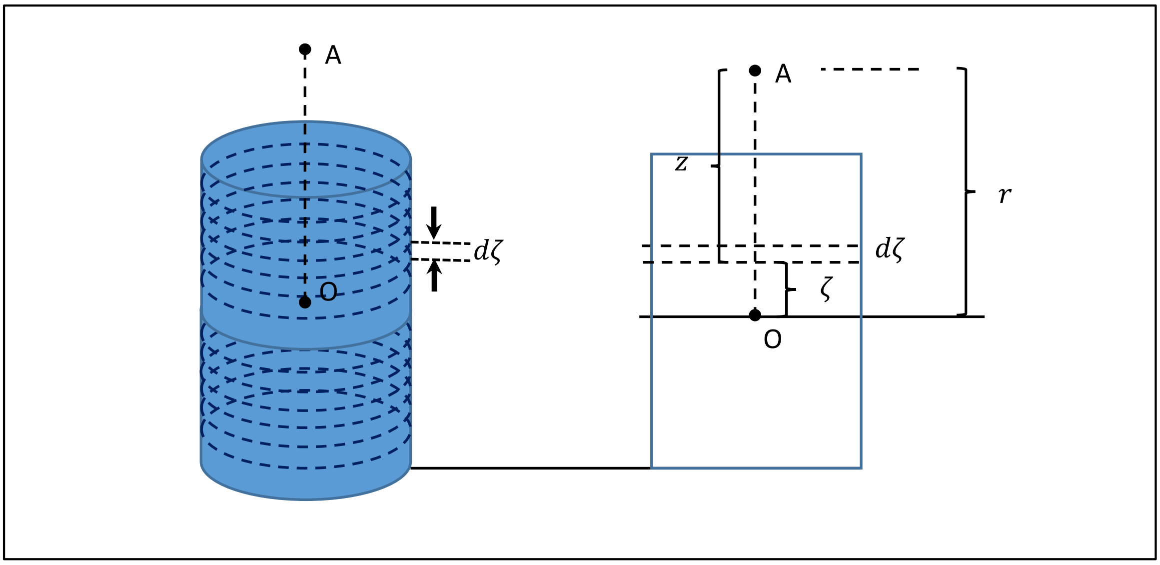
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ UNIVERSITY OF PATRAS	ΤΜΗΜΑ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τελική Εξέταση Φυσικής Διδάσκων: Δ. Κουζούδης
Ημερομηνία	24 Ιουνίου 2015
Ονοματεπώνυμο:	
ΑΜ: (Ηλεκτρ. Γραμματεία)	

Υποδείξεις προς τους φοιτητές: α) Η εξέταση είναι με κλειστές σημειώσεις και βιβλία, και αποτελείται από 5 ισοδύναμα προβλήματα. Επιτρέπεται η χρήση των τυπολογίων που ετοίμασε ο διδάσκοντας. β) Απαγορεύεται η χρήση κινητών τηλεφώνων αλλά και οποιασδήποτε είδους ηλεκτρονικής συσκευής, συμπεριλαμβανομένων και των αριθμομηχανών τσέπης αφού όλες οι απαντήσεις είναι αναλυτικές. γ) Οι απαντήσεις πρέπει να είναι πλήρεις (αλλά όχι πολύ φλύαρες). Αποτελέσματα χωρίς τεκμηρίωση δεν θα γίνονται δεκτά ακόμα και εάν είναι αριθμητικώς σωστά. δ) Επειδή κάποιοι φοιτητές συνεχίζουν να γράφουν και μετά το πέρας της εξέτασης, δηλώνω ότι μετά την αποχώρησή μου από την αίθουσα δεν πρόκειται να δεχτώ κανένα γραπτό αφού δεν είναι δυνατό να ελέγξω τον προορισμό του. Καλή επιτυχία!

ΘΕΜΑ 1) Να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο ενός ομοιόμορφα φορτισμένου συμπαγούς κυλίνδρου ακτίνας R και μικρού μήκους L με χωρική πυκνότητα φορτίου ρ κατανεμημένη σε όλο τον όγκο του, σε σημείο Α επάνω στον άξονά του και σε απόσταση r από το κέντρο του Ο, όπου $r > L/2$ (στον εξωτερικό χώρο του κυλίνδρου). Δίνονται στον παρακάτω πίνακα τα ηλεκτρικά πεδία φορτισμένου λεπτού α) δακτυλίου, β) δακτυλίου με εξωτερική – εσωτερική ακτίνα και γ) δίσκου αντίστοιχα, επάνω στη μεσοκάθετο τους (μπορεί να μη χρειαστούν όλα). Επίσης θα χρειαστείτε το ολοκλήρωμα δύναμης $\int x^a dx = x^{a+1}/(a+1)$:

α	β	γ
$\frac{kQz}{(z^2+R^2)^{3/2}}$	$\frac{2kQ}{\pi(R_2^2-R_1^2)} \times \left(\frac{z}{\sqrt{z^2+R_1^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R_2^2}}\right)$	$\frac{2kQ}{R^2}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$

<u>Λύση</u>: Τεμαχίζω σε λεπτούς δίσκους πάχους $d\zeta$ και ακτίνας R, ο καθένας απέχει απόσταση $z = r - \zeta$ από το σημείο Α



Πεδίο δίσκου:

$$dE = \frac{2kdq}{R^2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

Πυκνότητα φορτίου

$$dq = \rho dV = \rho\pi R^2 dz$$

Επειδή όλα τα dE είναι συγγραμμικά, μπορούμε απλά να αθροίσουμε τα μέτρα τους. Ολοκλήρωση σε όλο τον κύλινδρο K:

$$E = \int_K dE = \frac{2k}{R^2}\int_{z=r+L/2}^{r-L/2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)\rho\pi R^2 dz$$

$$E = 2k\rho\pi\int_{z=r+L/2}^{r-L/2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)dz$$

$$E = 2k\rho\pi\left\{\int_{z=r+L/2}^{r-L/2} dz - \int_{z=r+L/2}^{r-L/2}\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}dz\right\}$$

$$E = 2k\rho\pi\left\{[z]_{z=r+L/2}^{r-L/2} - \left[\sqrt{z^2 + R^2}\right]_{z=r+L/2}^{r-L/2}\right\}$$

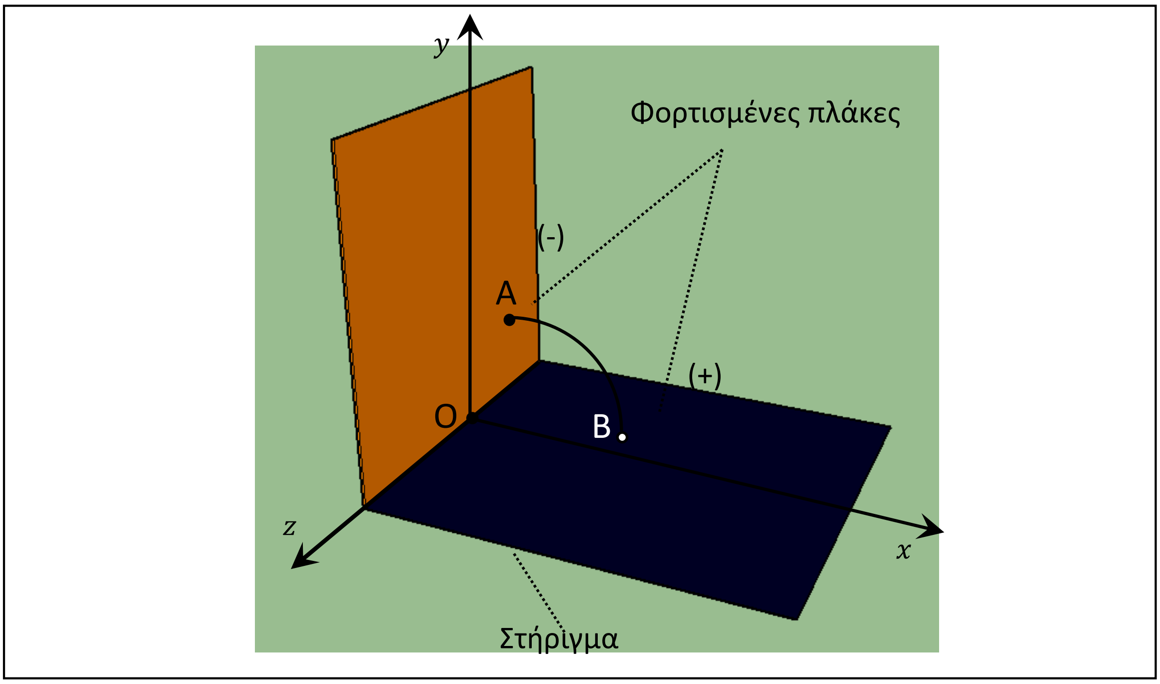
$$E = 2k\rho\pi\left\{\sqrt{(r + L/2)^2 + R^2} - \sqrt{(r - L/2)^2 + R^2} - L\right\}$$

ΘΕΜΑ 2) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δυο ομοιόμορφα φορτισμένες <u>αγώγιμες</u> ημιάπειρες πλάκες αμελητέου πάχους με μια κοινή ακμή στον άξονα z οι οποίες βρίσκονται κάθετα μεταξύ τους, η θετική στο επίπεδο $x - z$ και η αρνητική στο επίπεδο $y - z$ (εξυπακούεται ότι οι δυο πλάκες δεν έρχονται σε επαφή μεταξύ τους στον άξονα z, δηλαδή υπάρχει μικρό διάκενο εκεί). Ζητούνται τα εξής:

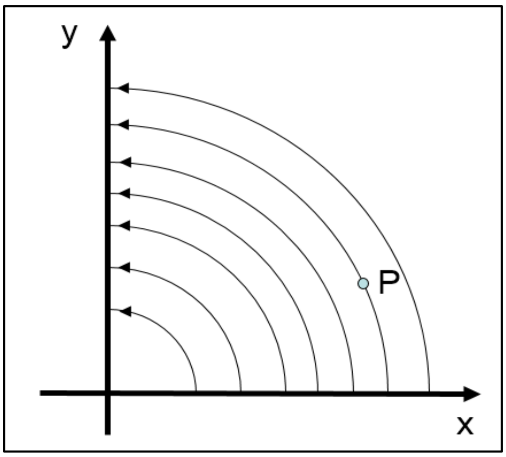
α) (4 μονάδες) Να σχεδιασθούν οι δυναμικές γραμμές στο $1^{ο}$ τεταρτημόριο του επιπέδου x-y εάν γνωρίζετε ότι το πεδίο είναι παντού κατά μήκος ενός από τα μοναδιαία διανύσματα στις κυλινδρικές συντεταγμένες και κάθετο στις δυο πλάκες.

β) (4 μονάδες) Να σχεδιασθούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες στο $1^{ο}$ τεταρτημόριο του επιπέδου x-y. (στο επίπεδο οι ισοδυναμικές επιφάνειες αναπαρίστανται ως τομές)

γ) (12 μονάδες) Θεωρώντας ότι το δυναμικό είναι συνάρτηση των κυλινδρικών συντεταγμένων, βρείτε τη συνάρτηση αυτή $V(\rho,\varphi,z)$ εάν γνωρίζετε ότι το ηλεκτρικό πεδίο δεν μεταβάλλεται επάνω σε οποιοδήποτε τόξο κύκλου 90^0, όπως το ΑΒ στο σχήμα, με αρχή και πέρας στις δυο πλάκες και κέντρο επάνω στον άξονα z και ότι η θετική πλάκα είναι γειωμένη και η αρνητική κρατιέται σε δυναμικό $-10\ V$.



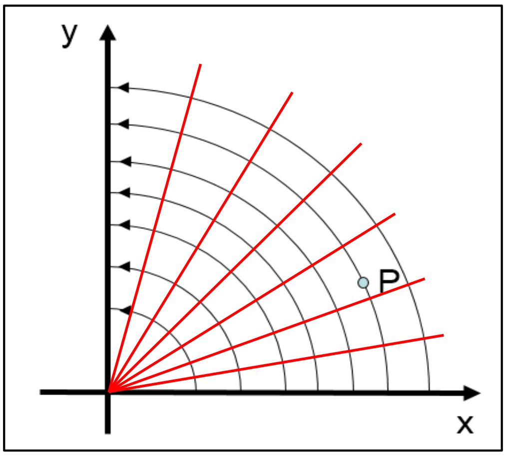
<u>Λύση</u>: α) Το πεδίο πρέπει να είναι κάθετο στην επιφάνεια των αγωγών και επομένως οι δυναμικές γραμμές θα είναι κάπως έτσι:



Αφού είναι κατά μήκος ενός μοναδιαίου, τότε αναγκαστικά θα είναι κατά μήκος του $\vec{e}_{\varphi}$ και έτσι

$$\vec{E} = E(\rho, \varphi, z)\vec{e}_{\varphi}$$

β) Οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι κάθετες στις Δ.Γ. και επομένως θα είναι κάπως έτσι:



Δηλαδή είναι επίπεδα που περνούν από τον άξονα z.

γ) Από τις σχέσεις $E - V$ στις κυλινδρικές συντεταγμένες έχουμε

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = -E_{\rho} = 0$$

Άρα το V δεν εξαρτάται από το ρ. Ομοίως

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -E_{z} = 0$$

Άρα το V δεν εξαρτάται από το z. Αντιθέτως

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -E_{\varphi}(\rho, \varphi, z) => \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -\rho E_{\varphi}(\rho, \varphi, z)$$

Αφού το V δεν εξαρτάται από το ρ τότε πρέπει το E_{φ} να είναι ανάλογο του $1/\rho$ (για να αναιρεθεί η εξάρτηση του ρ). Επίσης το V δεν εξαρτάται από το z και άρα και το E_{φ} δεν πρέπει να εξαρτάται από το z. Επομένως

$$E_{\varphi} = \frac{1}{\rho} f(\varphi)$$

Αφού το πεδίο δεν μεταβάλλεται επάνω στο τόξο ΑΒ, τότε δεν εξαρτάται από την γωνία φ και άρα

$$E_{\varphi} = \frac{c}{\rho}$$

όπου c =σταθερά.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -\frac{c}{\rho} => \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -c => V = -c\varphi + d$$

όπου d =σταθερά. Από τις συνοριακές συνθήκες $V(0) = 0 => d = 0$ και $V(\pi/2) = -10$ δηλαδή

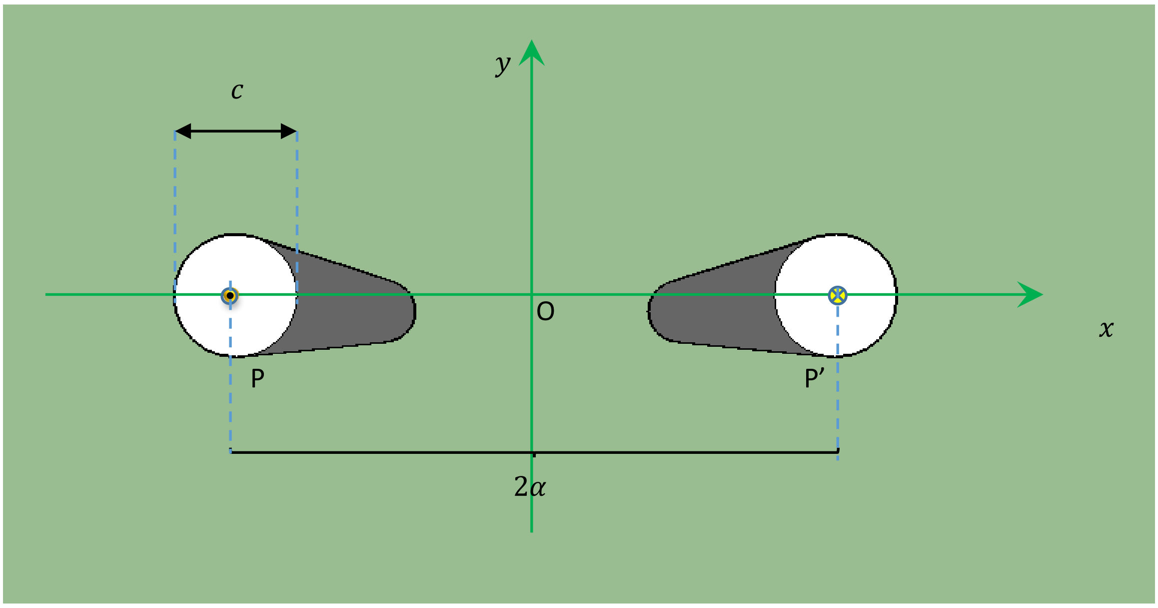
$$-10 = -\frac{c\pi}{2} => c = \frac{20}{\pi}$$

Επομένως

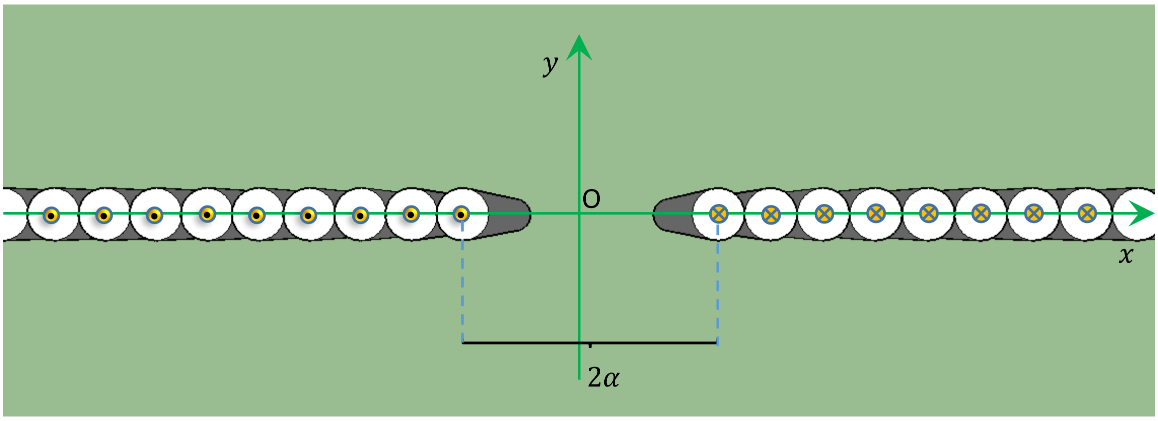
$$V = -\frac{20}{\pi}\varphi$$

ΘΕΜΑ 3) Στο παρακάτω σχήμα οι δυο λεπτοί κυλινδρικοί αγωγοί P και P' διαμέτρου c ο καθένας, τέμνουν τη σελίδα κάθετα, είναι απείρου μήκους και διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα I και με τη φορά που σημειώνεται.

α) (5 μονάδες) Να βρεθεί το μέτρο και η φορά του συνιστάμενου μαγνητικού πεδίου που παράγουν οι δυο αγωγοί στο σημείο O της σελίδας το οποίο ισαπέχει από αυτούς και που το λαμβάνουμε ως την αρχή των συντεταγμένων



β) (15 μονάδες) Θεωρήστε τις παρακάτω δυο πεπερασμένες συστοιχίες αγωγών όπως αυτών στο μέρος α, οι οποίες βρίσκονται επάνω στον άξονα x συμμετρικά ως προς το O, η μια μεταξύ των ορίων $x = \alpha$ και $x = \beta$, ενώ η άλλη μεταξύ των $x = -\alpha$ και $x = -\beta$. Όλοι οι αγωγοί διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα I με τη φορά που σημειώνεται. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του μέρους α, υπολογίστε με ολοκλήρωση το μέτρο και τη φορά του συνιστάμενου μαγνητικού πεδίου που παράγουν οι δυο συστοιχίες στο σημείο O. Σημείωση: Θεωρήστε ότι η διάμετρος c του κάθε αγωγού είναι πολύ μικρή $c \to 0$ και έτσι σε ένα μικρό απειροστό μήκος dx βρίσκεται ένας αριθμός από τέτοιους αγωγούς. Πρέπει να υπολογίσετε αυτόν τον αριθμό θεωρώντας ότι οι αγωγοί είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι μέσα σε κάθε συστοιχία.



Λύση:

α) Είδαμε ότι στο εξωτερικό του χώρο, ένας κυλινδρικός αγωγός συμπεριφέρεται σαν ευθύγραμμος λεπτός αγωγός και έτσι το μαγνητικό του πεδίο δίνεται από την Εξ. 8.16

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi$$

Στο σημείο Ο τα δυο παραγόμενα πεδία έχουν φορά προς τα κάτω και έτσι το συνιστάμενο πεδίο είναι κατά τη διεύθυνση $-y$. Και οι δυο αγωγοί απέχουν απόσταση $\rho = \alpha$ από το σημείο Ο και έτσι το μέτρο του συνιστάμενο πεδίου ισούται με

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\alpha} + \frac{\mu_0 I}{2\pi\alpha} = \frac{\mu_0 I}{\pi\alpha}$$

β) Μπορούμε να θεωρήσουμε τους αγωγούς σε ζεύγη και να πούμε ότι σε τυχαία απόσταση $\pm x$ από το Ο βρίσκεται ένα τέτοιο ζεύγος το οποίο σύμφωνα με το αποτέλεσμα του μέρους α παράγει στο Ο πεδίο

$$\frac{\mu_0 I}{\pi x}$$

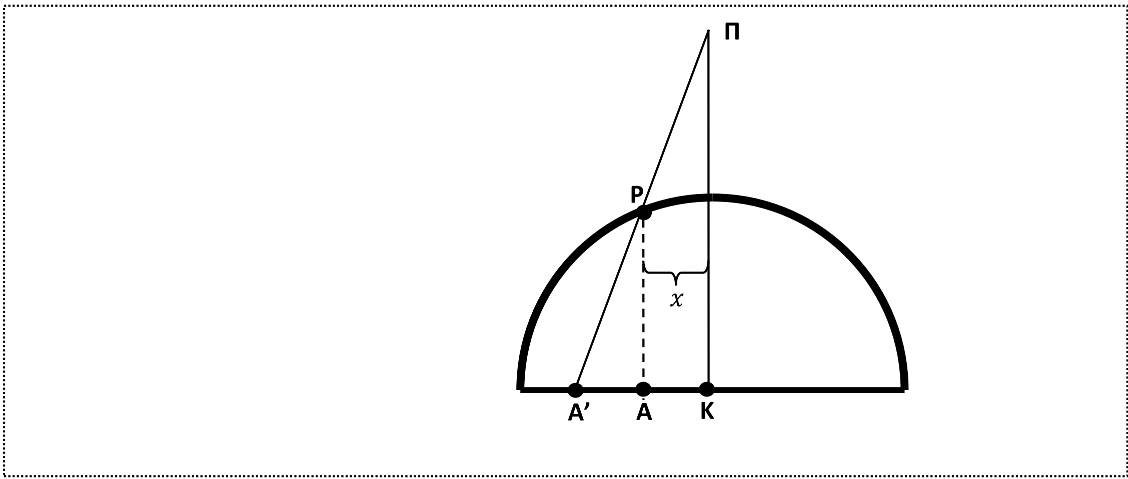
προς τα κάτω. Εάν τεμαχίσω τον άξονα-x σε απειροστά τμήματα μήκους dx το καθένα, τότε θα υπάρχει ένας συνολικός αριθμός $dN = dx/c$ τέτοιων αγωγών μέσα σε αυτό και άρα θα παράγουν μαγνητικό πεδίο στο Ο ίσο με:

$$dB = dN\frac{\mu_0 I}{\pi x} = \frac{\mu_0 I}{\pi c x}dx$$

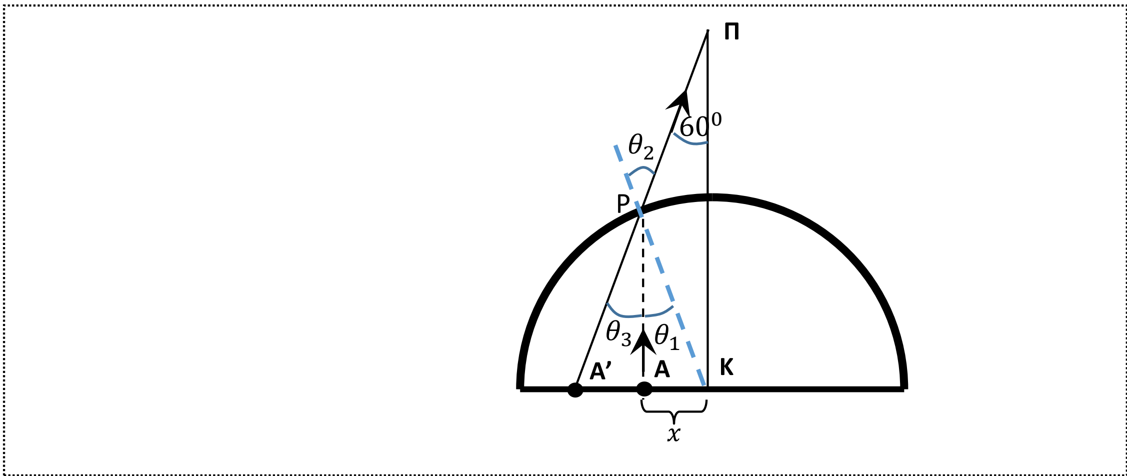
Επειδή όλα τα dB είναι συγγραμμικά, μπορούμε απλά να αθροίσουμε τα μέτρα τους. Με ολοκλήρωση από το $x = \alpha$ έως το $x = \beta$ παίρνουμε:

$$B = \int_{x=a}^{\beta} dB = \frac{\mu_0 I}{\pi c}\int_{x=a}^{\beta}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I}{\pi c}(ln\beta - lna) = \frac{\mu_0 I}{\pi c}ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

ΘΕΜΑ 4) (10 μονάδες) Σημειακή ατέλεια Α βρίσκεται επάνω στην επίπεδη επιφάνεια ενός γυάλινου ημισφαιρικού φακού με δείκτη διάθλασης $n = 3/2$, σε απόσταση x από το κέντρο καμπυλότητας Κ του φακού (βλέπε σχήμα). Ένας παρατηρητής που ο οφθαλμός του βρίσκεται στο σημείο Π, έχει την εντύπωση ότι το Α βρίσκεται στην θέση Α' της επίπεδης επιφάνειας. Εάν η γωνία ΚΠΑ' είναι ίση με 60^0 και η φωτεινή ακτίνα από το Α χρειάζεται χρόνο t για φτάσει στο σημείο Ρ, να βρεθεί το x.



<u>Λύση</u>. Φέρουμε στο σημείο Ρ την ακτίνα ΡΚ η οποία είναι και η τοπική κάθετος. Οι γωνίες πρόσπτωσης θ_1 και διάθλασης θ_2 ορίζονται ως προς αυτήν.



Η γωνία θ_3 είναι εντός-εκτός και επί τα αυτά με την δεδομένη και άρα είναι ίσες

$$\theta_3 = 60^0$$

Από τον νόμο του Snell

$$n_1 sin\theta_1 = n_2 sin\theta_2$$

Για τον αέρα $n_2 = 1$ οπότε

$$n_1 sin\theta_1 = sin\theta_2$$

Όμως $\theta_2 = \theta_1 + \theta_3 = \theta_1 + 60^0$ οπότε:

$$n_1 sin\theta_1 = sin(\theta_1 + 60^0)$$

$$n_1 sin\theta_1 = sin\theta_1 cos60^0 + cos\theta_1 sin60^0$$

$$\frac{3}{2} sin\theta_1 = \frac{1}{2} sin\theta_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} cos\theta_1$$

$$sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} cos\theta_1 => tan\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Έστω y η απόσταση ΡΑ. Αφού απαιτείται χρόνος t για να καλύψει το φως αυτή την απόσταση, τότε η ταχύτητά του είναι ίση με

$$v = \frac{y}{t}$$

Από τον ορισμό του δείκτη διάθλασης

$$n_1 = \frac{c}{v} = \frac{ct}{y} => y = \frac{ct}{n_1}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΡΑΚ

$$tan\theta_1 = \frac{x}{y}$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω

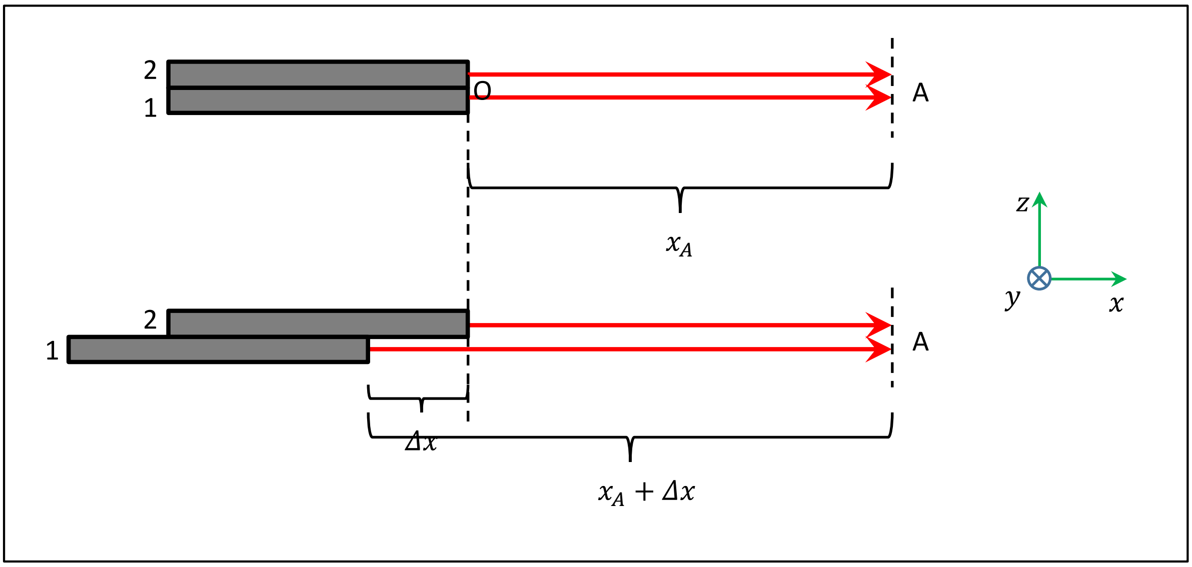
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{xn_1}{ct} => x = \frac{\sqrt{3}ct}{2n_1}$$

ΘΕΜΑ 5) Δυο οπτικές ίνες 1 και 2 παράλληλες στον άξονα x που εκπέμπουν δέσμες με φως διαφορετικής συχνότητας f_1 και f_2 αντίστοιχα, με ίσο πλάτος ηλεκτρικού πεδίου E_0 πολωμένο κάθετα και έξω από τη σελίδα (και για τις δυο συχνότητες), τοποθετούνται μέσα σε σκοτεινό θάλαμο, πλήρως ευθυγραμμισμένες και κολλητά η μια με την άλλη με τις άκρες τους στο σημείο Ο που εκπέμπουν φως να είναι στο $x = 0$ και να σημαδεύουν το σημείο Α στο $x = x_A$. Στο σημείο Ο όπου εκπέμπουν οι δυο ίνες, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως η αρχή των συντεταγμένων, το μαγνητικό πεδίο είναι ίσο με μηδέν την χρονική στιγμή $t = 0$.

α) (**6 μονάδες**) Να δοθεί η πλήρης μαθηματική έκφραση (διανυσματική μορφή) του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου στο σημείο Α της κάθε δέσμης για κάθε χρόνο t (πάνω σχήμα)

β) (**3 μονάδες**) Να βρεθεί η πυκνότητα ενέργειας της κάθε δέσμης στο σημείο Α (πάνω σχήμα) γ) (**11 μονάδες**): Έστω ότι η ίνα 1 μετατοπίζεται κατά Δx προς τον αρνητικό άξονα x (κάτω σχήμα). Να υπολογίσετε το μήκος κύματος και το μέτρο του συνιστάμενου ηλεκτρικού πεδίου στο A θεωρώντας ότι οι δυο συχνότητες είναι πολύ κοντά η μια στην άλλη (αλλά όχι ίσες) και χρησιμοποιώντας την προσέγγιση $f_1 - f_2 \approx 0$.

Σημείωση. Προσέξτε οι απαντήσεις σας να είναι συναρτήσει των δεδομένων f_1, f_2, E_0, x_A και Δx αλλιώς δεν θα θεωρούνται σωστές.



Λύση:

α) Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, αρχικά οι δυο ίνες είναι ευθυγραμμισμένες και εκπέμπουν κύματα που δίνονται από τα ηλεκτρικά πεδία

$$\vec{E}_1 = -E_0 \vec{e}_y sin(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$\vec{E}_2 = -E_0 \vec{e}_y sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

(δεν υπάρχει αρχική φάση αφού στο $x = 0, t = 0$ μας δίνεται ότι $B = 0$). Οι κυκλικές συχνότητες είναι ίσες με $\omega_1 = 2\pi f_1$ και $\omega_2 = 2\pi f_2$, τα μήκη κύματος $\lambda_1 = c/f_1$ και $\lambda_2 = c/f_2$, ενώ οι κυματάριθμοι $k_1 = 2\pi/\lambda_1 = 2\pi f_1/c$ και $k_2 = 2\pi f_2/c$. Επομένως στο σημείο A με $x = x_A$ έχουμε:

$$\vec{E}_1 = -E_0 \vec{e}_y sin \frac{2\pi f_1}{c}(x_A - ct)$$

$$\vec{E}_2 = -E_0 \vec{e}_y sin \frac{2\pi f_2}{c}(x_A - ct)$$

Το μέτρο του μαγνητικού πεδίου είναι ίσο με

$$B_0 = E_0/c$$

Τα $\vec{E}$, $\vec{B}$ και η διεύθυνση διάδοσης (ο άξονας x) αποτελούν τρισορθογώνιο σύστημα αναφοράς επομένως το $\vec{B}$ είναι κατά μήκος του άξονα $-z$. Επίσης το $\vec{B}$ είναι σε πλήρη φάση με το $\vec{E}$ (έχουν το ίδιο ημίτονο) και έτσι:

$$\vec{B}_1 = -\frac{E_0}{c}\ \vec{e}_z sin\frac{2\pi f_1}{c}(x_A - ct)$$

$$\vec{B}_2 = -\frac{E_0}{c}\vec{e}_z sin\frac{2\pi f_2}{c}(x_A - ct)$$

Η πυκνότητα ενέργειας δίνεται από την $u = \varepsilon_0 E^2$ επομένως:

$$u_1 = \varepsilon_0 {E_0}^2 sin^2\left[\frac{2\pi f_1}{c}(x_A - ct)\right]$$

$$u_2 = \varepsilon_0 {E_0}^2 sin^2\left[\frac{2\pi f_2}{c}(x_A - ct)\right]$$

β)

Λόγω του επιπλέον Δx, τα ηλεκτρικά πεδία στο σημείο Α είναι ίσα με

$$\vec{E}_1 = -E_0\vec{e}_y sin\left[\frac{2\pi f_1}{c}(x_A - ct)\right]$$

$$\vec{E}_2 = -E_0\vec{e}_y sin\left[\frac{2\pi f_2}{c}(x_A + \Delta x - ct)\right]$$

Το συνιστάμενο πεδίο ισούται με

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -E_0\vec{e}_y\left\{sin\left[\frac{2\pi f_1}{c}(x_A - ct)\right] + sin\left[\frac{2\pi f_2}{c}(x_A + \Delta x - ct)\right]\right\}$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική σχέση

$$sina + sinb = 2sin(\frac{a+b}{2})cos(\frac{a-b}{2})$$

οδηγεί στο

$$\vec{E} = -2E_0\vec{e}_y sin\left[\frac{2\pi\bar{f}}{c}(x_A - ct) + \pi f_2\frac{\Delta x}{c}\right]cos\left[\frac{2\pi\delta f}{c}(x_A - ct) + \pi f_2\frac{\Delta x}{c}\right]$$

όπου $\bar{f}$ η μέση τιμή των f_1, f_2 και δf η ημιδιαφορά τους. Για κοντινές συχνότητες $\delta f\ \approx 0$ και

$$\vec{E} = -2E_0\vec{e}_y sin\left[\frac{2\pi\bar{f}}{c}(x_A - ct) + \pi f_2\frac{\Delta x}{c}\right]cos\left[\pi f_2\frac{\Delta x}{c}\right]$$

Το παραπάνω ηλεκτρικό πεδίο έχει συχνότητα

$$\bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

και άρα μήκος κύματος

$$\bar{\lambda} = \frac{c}{\bar{f}} = \frac{2c}{f_1 + f_2}$$

Το μέτρο αυτού του ηλεκτρικού πεδίου ισούται με

$$E_0' = 2E_0 cos\left[\pi f_2\frac{\Delta x}{c}\right]$$