Εξέταση στη Φυσική ΙΙ

Τμήμα Χημικών Μηχανικών
Πολυτεχνική Σχολή
Πανεπιστήμιο Πατρών

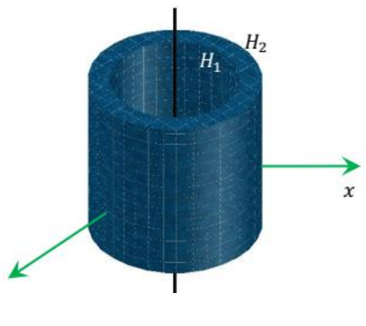
Διδάσκων:	Μπαλής Νικόλαος
Διάρκεια Εξέτασης:	3 ώρες
Ημερομηνία Εξέτασης:	Τετάρτη 11 Σεπτεμβρίου 2019
Ονοματεπώνυμο:	
Εξάμηνο:	
ΑΜ:	

ΘΕΜΑΤΑ

1. Μια ομοιόμορφα φορτισμένη γραμμή άπειρου μήκους με γραμμική πυκνότητα φορτίου +λ έχει τοποθετηθεί επάνω στον άξονα z. Έστω ότι παίρνουμε ως επιφάνεια Gauss την επιφάνεια που ορίζεται από δυο κυλινδρικές επιφάνειες H_1 και H_2, με ακτίνες R_1 και $R_2=4R_1$ αντίστοιχα, και κοινό ύψος 2h. Θεωρείστε τον άξονά των κυλινδρικών επιφανειών επάνω στον άξονα z καθώς και δυο επίπεδους δακτυλίους $Δ_1$ και $Δ_2$ κάθετους στον άξονα z και στις θέσεις $z=\pm h$ με εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική R_2 ο καθένας, ώστε να "σφραγίζουν" τον χώρο ανάμεσα στις δυο κυλινδρικές επιφάνειες (βλ. σχήμα 1).

(α) Σχεδιάστε τις δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου που οφείλεται στην γραμμική κατανομή και υπολογίστε: (β) την ηλεκτρική ροή επάνω στην H_1, (γ) την ηλεκτρική ροή επάνω στην H_2 και (δ) την ηλεκτρική ροή επάνω στους δακτυλίους $Δ_1$ και $Δ_2$. (ε) Πόση είναι η συνολική ροή διαμέσου της επιφάνειας Gauss; Είναι αυτό το αποτέλεσμα σύμφωνο με τον νόμο του Gauss; Γιατί εδώ είναι (πρακτικά) δυνατή η εφαρμογή του ν.Gauss;

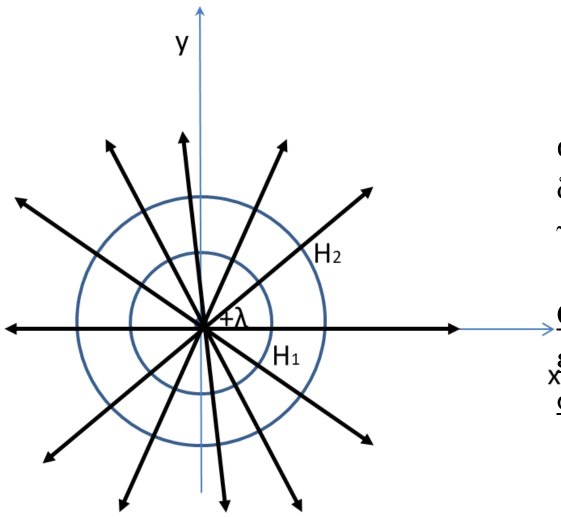
Σημ.: Δίνεται ότι το εμβαδό της επιφάνειας του H_2 ισούται με 1.6 cm^2 ενώ το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί η φορτισμένη γραμμή στο σημείο $(x,y,z= R_2,0,0)$ είναι ίσο με 500 N/C.



Σχήμα 1

(3 μονάδες)

Λύση:



α) Οι δυναμικές γραμμές είναι …άπλα οι δυναμικές γραμμές μιας άπειρης γραμμικής κατανομής φορτίου.

Οι επιφάνειες Gauss ως νοητές και μόνο επιφάνειες δεν παίζουν κανένα ρόλο στον σχεδιασμό των γραμμών.

β) $\Phi_1 = \int E_1 \cdot dA \cos 180 = -E_1 \int dA = -E_1 \cdot A_1$ (1)

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{L \cdot 2\pi R_1}{L \cdot 2\pi R_2} \rightarrow A_1 = \frac{1}{4} A_2 = 0.4 \text{ cm}^2$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{2k\lambda}{R_1}}{\frac{2k\lambda}{R_2}} = \frac{R_2}{R_1} \rightarrow E_1 = 4 \cdot 500 = 2000 \text{ N/C}$$

Άρα απο (1) προκύπτει ότι $\Phi_1 = -0.08 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$

γ) $\Phi_2 = \int E_2 \cdot dA \cos 0 = E_2 \int dA = E_2 \cdot A_2 = 500 \cdot 1.6 = 0.08 \text{ Nm}^2/\text{C}$

δ) Η ηλεκτρική ροή επάνω στους δακτυλίους είναι μηδενική, καθώς τα διανύσματα του πεδίου είναι κάθετα με αυτά που αντιστοιχούν στο εμβαδόν των επιφανειών αυτών, άρα το αντίστοιχο εσωτερικό γινόμενο είναι μηδέν.

ε) Η συνολική ροή είναι:

$\Phi_{tot} = \Phi_{H1} + \Phi_{H2} + \Phi_{\Delta 1} + \Phi_{\Delta 2} = -0.08 \text{ Nm}^2/\text{C} + 0.08 \text{ Nm}^2/\text{C} + 0 + 0 = 0$

Το αποτέλεσμα είναι σύμφωνο με το ν. Gauss καθώς το περικλειόμενο στην επιφάνεια Gauss φορτίο, είναι μηδενικό.

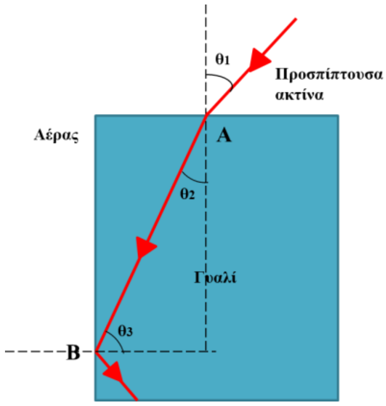
$$\Phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = 0$$

Ο ν. Gauss είναι εδώ εφαρμόσιμος, καθώς λόγω της συμμετρίας του προβλήματος (άπειρη κατανομή φορτίου) το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου πάνω στην επιφάνεια Gauss είναι σταθερό και έτσι μπορεί να «βγει έξω» από το ολοκλήρωμα.

2. Στο σχήμα μια ακτίνα φωτός εισέρχεται σε ένα γυάλινο πλακίδιο στο σημείο Α με γωνία πρόσπτωσης $\theta_1=45.0^o$ και στη συνέχεια υφίσταται ολική εσωτερική ανάκλαση στο σημείο Β. Ποια ελάχιστη τιμή για το δείκτη διάθλασης του γυαλιού μπορούμε να συνάγουμε από αυτές τις πληροφορίες;

(2 μονάδες)

Λύση:



Κατ' αρχήν χρησιμοποιώ το νόμο της ανάκλασης για την πρώτη διεπιφάνεια:

$$\sin\theta_1 \cdot n_1 = \sin\theta_2 \cdot n_2 \rightarrow \sin\theta_2 \cdot n_2 = \sin\theta_1 \quad (1)$$

Η συνθήκη ολικής ανάκλασης στη δεύτερη διεπιφάνεια είναι:

$$\sin\theta_3 \cdot n_2 \geq n_1 \cdot \sin 90^o \rightarrow \sin\theta_3 \cdot n_2 \geq 1 \; (2)$$

Επίσης ισχύει $\theta_2+\theta_3=90^o \rightarrow$ η (2) γίνεται:

$$\cos\theta_2 \cdot n_2 \geq 1 \rightarrow \cos\theta_2^2 \cdot n_2^2 \geq 1 \;\; (3)$$

Άρα λόγω της τετριμμένης τριγωνομετρικής σχέσης:

$$\sin\theta_2^2 + \cos\theta_2^2 = 1, \text{ θα έχω:}$$

$$(3) \rightarrow (1 - \sin\theta_2^2) \cdot n_2^2 \geq 1 \xrightarrow{(1)} \left(1 - \frac{\sin^2\theta_1}{n_2^2}\right) n_2^2 \geq 1$$

και

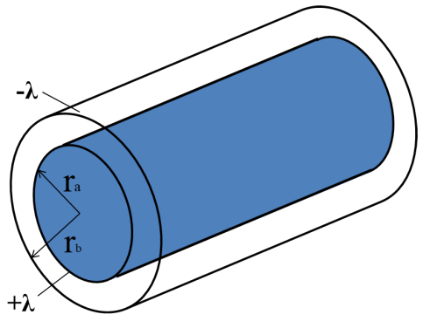
$$n_2^2 - \sin^2\theta_1 \geq 1$$

Τελικά ,

$$n_{2(min)} = \sqrt{1+\sin^2 45^o} = 1.22$$

3. Ο εσωτερικός κύλινδρος ενός μακριού, κυλινδρικού πυκνωτή έχει ακτίνα r_a και (κατά μήκος του) γραμμική πυκνότητα φορτιού $+\lambda$. Περιβάλλεται από ομοαξονικό αγώγιμο φλοιό με εσωτερική ακτίνα r_b και γραμμική πυκνότητα φορτίου $-\lambda$.

α) Σχεδιάστε τις δυναμικές γραμμές του κυλινδρικού αυτού πυκνωτή. β) Ποια είναι η πυκνότητα ενέργειας στην περιοχή μεταξύ των αγωγών σε απόσταση r από τον άξονα; γ) Ολοκληρώστε την πυκνότητα ενέργειας που υπολογίστηκε στο ερώτημα (β) στον χώρο μεταξύ των αγωγών για μήκος L του πυκνωτή και βρείτε τη συνολική ενέργεια πεδίου ανά μονάδα μήκους (U/L). δ) Υπολογίστε τη χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους του πυκνωτή και υπολογίστε το λόγο U/L. (Για τους υπολογισμούς σας χρησιμοποιήστε την εξίσωση $U=\frac{Q^2}{2C}$ και θεωρείστε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των κυλίνδρων $V_{ab}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}$). Το αποτέλεσμά σας συμφωνεί με αυτό που βρέθηκε στο ερώτημα (γ);

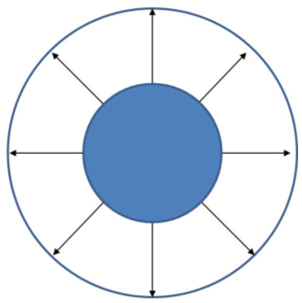


Σχήμα 3

(2 μονάδες)

Λύση:

α) Στο σχήμα βλέπουμε την κάτοψη του πυκνωτή και τις Δ.Γ του ηλεκτρικού πεδίου.



β) Μεταξύ των αγωγών το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου δίνεται από τον τύπο:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

ενώ και για $r<r_a$ (εσωτερικό αγωγού) και για $r_a< r < r_b$(άθροισμα περικλειόμενου φορτιού μηδενικό) έχω **E**=0.

Η πυκνότητα ενέργειας σε απόσταση r από τον άξονα ισούται με:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_0 r^2}$$

γ) $u = \frac{U}{V} \rightarrow U = \int u\, dV = 2\pi L \int urdr = \frac{L\,\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r}$ $\;\; και \;\; \frac{U}{L} = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}$

δ) Αφού $V_{ab}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}$ και

$$C = \frac{Q}{Vab} = \frac{\lambda L}{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{r_b}{r_a}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{C}{L} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{r_b}{r_a}}$$

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{r_b}{r_a} = \frac{\lambda^2 L}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}$$

το οποίο συμφωνεί με το (β).

Λύση:

4. Με τη βοήθεια του νόμου του Ampere να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο παντού στο χώρο ενός σωλήνα απείρου μήκους με εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική ακτίνα R_2, ο οποίος διαρρέεται από ομοιόμορφη πυκνότητα ρεύματος J (ρεύμα ανά μονάδα επιφάνειας κάθετη στη ροή του ρεύματος) κατά μήκος του άξονά του.

(3 μονάδες)

Λύση:

Οι δυναμικές γραμμές του **B** στην προκειμένη περίπτωση είναι ομόκεντροι κύκλοι με κοινό κέντρο επάνω στον άξονα του αγωγού. Το **B** είναι εφαπτόμενο σε κάθε τέτοιο κύκλο με φορά που δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.
Για να εφαρμόσουμε τον ν. Ampere επιλέγουμε μια κλειστή καμπύλη, η οποια ουσιαστικά ταυτίζεται με τη δυναμική γραμμή. Έτσι το διάνυσμα **dl** το οποίο αντιστοιχεί στη γραμμή που τρέχει πάνω στον νοητό κύκλο είναι κάθε φορά παράλληλο με το **B** ώστε τελικά το εσωτερικό τους γινόμενο να είναι ίσο με το γινόμενο των μέτρων τους. Τελικά

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \oint B\cdot dl = \mu_0 \cdot I_{enc} \quad (1)$$

Στο εξωτερικό του αγωγού, δηλαδή στην περιοχή με κάθε $r>R_2$ το περικλειόμενο ρεύμα προκύπτει ως εξής:

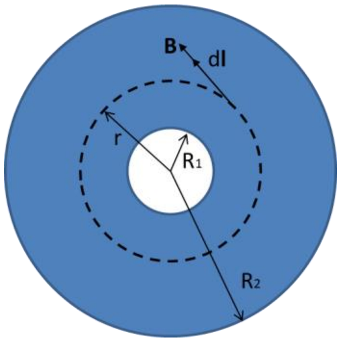
$$J = \frac{I_{enc}}{A} \rightarrow I_{enc} = \pi(R_2^2 - R_1^2)\cdot J \quad (2)$$

Όπου με Α συμβολίσαμε το εμβαδόν της διατομής τους αγωγού από την οποία διέρχεται το περικλειόμενο ρεύμα. Αν θεωρήσουμε τα φορτία ομοιόμορφα κατανεμημένα πάνω στη διατομή, αυτό σημαίνει ότι η συνεισφορά τους στη δημιουργία B σε δεδομένη απόσταση από τον αγωγό είναι σταθερή, άρα το μέτρο του B είναι επίσης σταθερό και έτσι μπορεί να βγει έξω από το ολοκλήρωμα.

Τελικά:

$$(1), (2) \rightarrow \oint \oint \mathrm{B} \cdot \mathrm{dl} = \mu_0 .\, \mathrm{I}_{\mathrm{enc}} \rightarrow \mathrm{B} \oint dl = \mu_0 . \pi(\mathrm{R}_2^2 - \mathrm{R}_1^2) \cdot \mathrm{J}$$

$$\mathrm{B} \cdot 2\pi \mathrm{r} = \mu_0 . \pi(\mathrm{R}_2^2 - \mathrm{R}_1^2) \cdot \mathrm{J} \rightarrow \mathrm{B} = \frac{\mu_0 . (\mathrm{R}_2^2 - \mathrm{R}_1^2) \cdot \mathrm{J}}{2r}$$



Σε περιοχές με $R_1<r<R_2$ το εμβαδόν της διατομής που περικλείει μια δυναμική γραμμή-καμπύλη εφαρμογής ν. Ampere είναι A= $\pi(r^2 - \mathrm{R}_1^2)$, οπότε κατ’ αναλογία με όσα υπολογίσαμε νωρίτερα θα ισχύει:

$$\mathrm{B} = \frac{\mu_0 . (r^2 - \mathrm{R}_1^2) \cdot \mathrm{J}}{2r}$$

Στο εσωτερικό της κοιλότητας είναι **B**=0 καθώς δεν περικλείεται κάποιο ρεύμα