Α΄ Πρόοδος Φυσικής ΙΙ

Τμήμα Χημικών Μηχανικών
Πολυτεχνική Σχολή
Πανεπιστήμιο Πατρών

Διδάσκων:	Μπαλής Νικόλαος
Διάρκεια Εξέτασης:	2 ώρες
Ημερομηνία Εξέτασης:	Τρίτη 7 Μαΐου 2019
Ονοματεπώνυμο:	
Εξάμηνο:	
ΑΜ:	

Θέματα Β

1. α) Να υπολογισθεί με τη μέθοδο της ολοκληρώσεως το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο Α (0,x), που οφείλεται σε έναν ομοιόμορφα φορτισμένο λεπτό δίσκο ακτίνας R. Υποθέστε ότι το x είναι θετικό. Θεωρείστε ότι ο δίσκος βρίσκεται τοποθετημένος επί του επιπέδου yz με το κέντρο του στην αρχή των αξόνων. Ο δίσκος έχει θετική επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ. Θεωρείστε γνωστό ότι το πεδίο στο σημείο Α, που οφείλεται σε απειροστό δακτύλιο του εν λόγω δίσκου και ομόκεντρου με αυτόν, με πάχος dr και φορτίο dQ είναι ίσο με:

$$d\boldsymbol{E} = dE_x \boldsymbol{i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\boldsymbol{i}$$

όπου α, η ακτίνα του δακτυλίου.

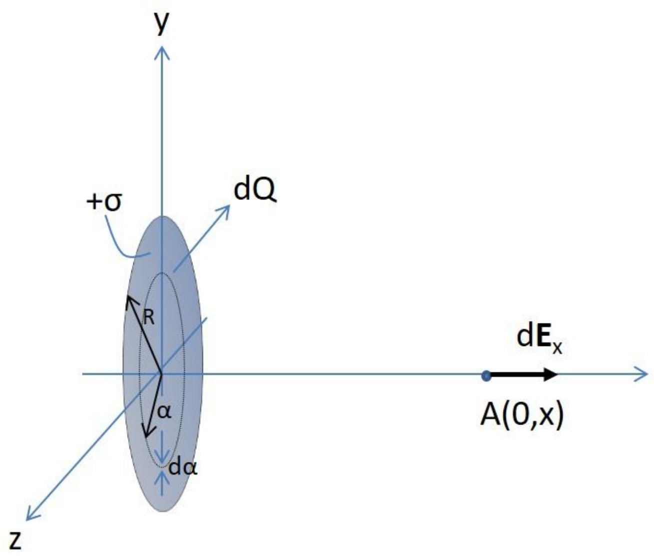
β) Να γραφεί ο τύπος που αποδίδει το πεδίο στο σημείο Α αν θεωρήσουμε R>>x.

Λύση:

α) Θεωρώντας γνωστό ότι το ηλεκτρικό πεδίο που συνεισφέρει ο δακτύλιος απειροστού πάχους dr, ακτίνας α και φορτίου dQ δίνεται από τη σχέση:

$$dE = dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

δεν έχω παρά να την ολοκληρώσω σε όλη την επιφάνεια του δίσκου από α=0 έως α=R.



Το συνολικό φορτίο του δακτυλίου είναι:

$$\sigma = \frac{dQ}{dA} \text{ ή } dQ = \sigma dA$$
$$= \sigma(2\pi a da)$$
$$= 2\pi\sigma a da \ (2)$$

Συνδυάζοντας (1) και (2) προκύπτει:

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi\sigma a d a x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ ή}$$

$$E_x = \int_0^R \frac{1}{2}\frac{\sigma x}{\varepsilon_0}\frac{\alpha}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,da$$

$Θέτω\ x^2 + a^2 = z\ \ και\ αντικαθιστω\ da = \frac{dz}{2a}$

$Άρα\ E = E_x = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_{x^2}^{x^2+R^2} \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\, a\, \frac{dz}{2a} = \frac{\sigma x}{4\varepsilon_0}\int_{x^2}^{x^2+R^2}\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\, dz =$

$= \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{x}\right)^2}}\right).$

β)Αν R>>x τότε R/x → R και $\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{x}\right)^2}} \to 0$*, άρα* $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

(3 μονάδες)

2. Ένας πολύ μακρύς ευθύγραμμος σωλήνας (κοίλος κύλινδρος) έχει εσωτερική ακτίνα α και εξωτερική b. Ο σωλήνας φέρει φορτίο ανά μονάδα μήκους +λ όπου λ μια θετική σταθερά με μονάδες C/m. Ένα γραμμικό φορτίο είναι κατανεμημένο κατά μήκος του άξονα του σωλήνα με γραμμική πυκνότητα +λ. α) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο ως συνάρτηση του λ και της απόστασης r από τον άξονα του σωλήνα, για i) r<a, ii)a<r<b,iii)r>b. Δείξτε τα αποτελέσματά σας σε μια γραφική παράσταση του E ως συνάρτηση του r. b) Ποιο είναι το φορτίο ανά μονάδα μήκους πάνω i) στην εσωτερική επιφάνεια του σωλήνα; ii) στην εξωτερική επιφάνεια του σωλήνα;

Λύση:

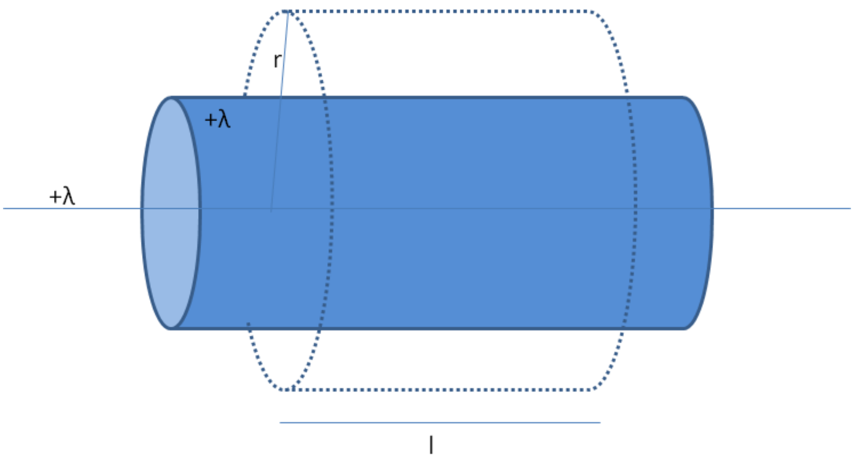
α) Χρησιμοποιούμε μια κυλινδρική επιφάνεια Gauss μήκους l and ακτίνας r η οποία έχει την γραμμή φορτίου κατά μήκος του άξονα της. Το φορτίο που αντιστοιχεί σε μήκος l της γραμμής φορτίου είναι q =λ l.

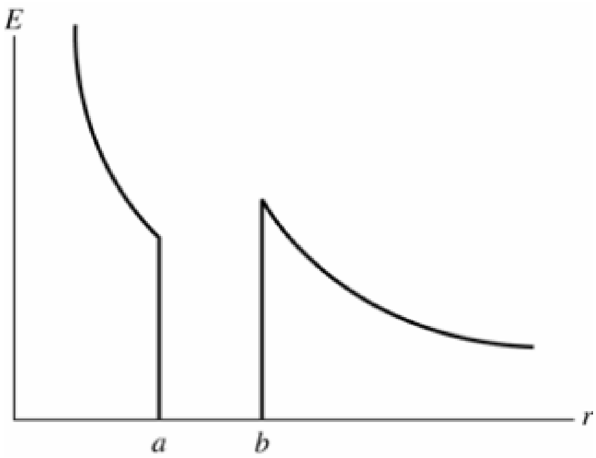
i) r<a: $E(2\pi rl) = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$ και $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

ii) a<r<b: Στο εσωτερικό αγωγού:E=0

iii) r>b: $E(2\pi rl) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{2\,\lambda l}{\varepsilon_0} \kappa\alpha\iota\ E = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 r}$.

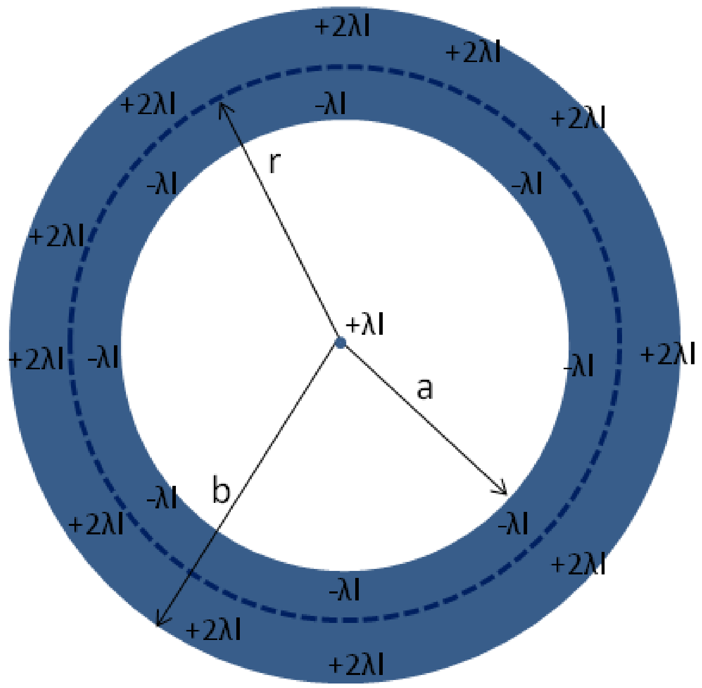
Στην τελευταία περίπτωση, η γραφική απεικόνιση είναι η ακόλουθη:





(b) (i) Η κυλινδρική επιφάνεια Gauss ακτίνας r, όπου a <r <b , πρέπει να περικλείει μηδενικό φορτίο, ούτως ώστε να μηδενίζεται το πεδίο, καθώς βρισκόμαστε στο εσωτερικό ενός αγωγού. Καθώς η επιφάνεια Gauss περιλαμβάνει το φορτίο +λl της γραμμής φορτίου, θα πρέπει να περιλαμβάνει και ένα φορτίο -λl στην εσωτερική επιφάνεια του εξωτερικού κυλίνδρου. Επομένως η γραμμική πυκνότητα φορτίου στην εσωτερική επιφάνεια του εξωτερικού κυλίνδρου πρέπει να είναι −λ.

(ii) Από τη στιγμή που το συνολικό γραμμικό φορτίο του εξωτερικού κυλίνδρου είναι +λ και στην εσωτερική επιφάνεια υπάρχει −λ, στην εξωτερική αντιστοιχεί φορτίο ανά μονάδα μηκους+2λ.



(4 μονάδες)

3. Σε κάποια περιοχή του χώρου, οι κυλινδρικές συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου είναι ίσες με:

$$E_\rho = \frac{5c\rho^4}{R^5} sin(5\varphi)$$

$$E_\varphi = \frac{5c\rho^4}{R^5} cos(5\varphi)$$

$$E_z = 0$$

όπου c είναι μια σταθερά σε $Volts$ και η R μια άλλη σταθερά σε m. Να βρεθεί το αντίστοιχο ηλεκτρικό δυναμικό σε αυτό το χώρο εάν γνωρίζουμε ότι μηδενίζεται σε ένα σημείο στον άξονα y που απέχει απόσταση R από την αρχή των συντεταγμένων.

Αφού $E_z = 0$ τότε $\partial V/\partial z = 0$ που σημαίνει ότι το V δεν εξαρτάται από το z. Από την $E_\rho = -\partial V/\partial \rho$ με ολοκλήρωση ως προς ρ παίρνουμε

$$V = -\frac{c\rho^5}{R^5} sin(5\varphi) + \beta(\varphi)$$

Από την φ-συνιστώσα του πεδίου παίρνουμε

$$E_\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi} => \frac{5c\rho^4}{R^5} cos(5\varphi) = \frac{5c\rho^4}{R^5} cos(5\varphi) - \frac{1}{\rho}\frac{d\beta}{d\varphi}$$

Επομένως

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = 0$$

και άρα η β είναι μια αριθμητική σταθερά και όχι μια συνάρτηση του φ. Έτσι

$$V = -\frac{c\rho^5}{R^5} sin(5\varphi) + \beta$$

Για να βρούμε τη β χρησιμοποιούμε την συνοριακή συνθήκη ότι $V = 0$ σε ένα σημείο στον άξονα y που απέχει απόσταση R από την αρχή των συντεταγμένων. Στις πολικές συντεταγμένες, ο άξονας y αντιστοιχεί σε $z = 0$ και $\varphi = \pi/2$ και το σημείο αυτό βρίσκεται σε $\rho = R$ και έτσι

$$0 = -c \times 1^5 sin(5\pi/2) + \beta$$

οπότε

$$\beta = c$$

Έτσι:

$$V = -c\frac{\rho^5}{R^5} sin(5\varphi) + c$$

(3 μονάδες)

Καλή Επιτυχία!