Παράδειγμα 5.8. … Συνέχεια

(α) Να βρεθεί το δυναμικό παντού στο χώρο που παράγει ένα *ηλεκτρικό δίπολο*, δηλαδή ένα ζεύγος ίσων και αντίθετων σημειακών φορτίων $\pm q$ σε απόσταση $2a$ μεταξύ τους. Πάρτε τα φορτία συμμετρικά επάνω στον άξονα z και χρησιμοποιήστε τις σφαιρικές συντεταγμένες r και θ.

$$V = kq\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2racos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2racos\theta}}\right)$$

(β) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο του διπόλου σε σφαιρικές συντεταγμένες για μεγάλες αποστάσεις

$r \gg a$.

Λύση:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

Εάν δεν είχαμε την προσέγγιση θα εκτελούσαμε κανονικά της παραγωγίσεις οι οποίες είναι σχετικά δύσκολες αλλά όχι αδύνατες

Για $r \gg a$

θέτω

$$x = \frac{a}{r} \ll 1$$

Θα χρησιμοποιήσω το ανάπτυγμα taylor μέχρι και το γραμμικό όρο του εξής

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx$$

$$(1 + x)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$$

Για $x \to -x$

$$(1 - x)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

Εμείς έχουμε

$$(r^2 + a^2 - 2racos\theta)^{-\frac{1}{2}} = r^{-1}\left(1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r}cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}} = r^{-1}(1 + x^2 - 2xcos\theta)^{-\frac{1}{2}} \approx$$
$$= r^{-1}(1 - 2xcos\theta)^{-\frac{1}{2}} \approx r^{-1}(1 + xcos\theta)$$

Ομοίως

$$(r^2 + a^2 + 2racos\theta)^{-\frac{1}{2}} \approx r^{-1}(1 - xcos\theta)$$

Το δυναμικό απλοποιείται σε

$$V \approx \frac{kq}{r}[(1 + xcos\theta) - (1 - xcos\theta)]$$

Τελικά

$$V \approx 2\frac{kq}{r}xcos\theta = 2\frac{kqa}{r^2}cos\theta$$

Δυναμικό διπόλου. Θέλουμε τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου και άρα παραγωγίζουμε

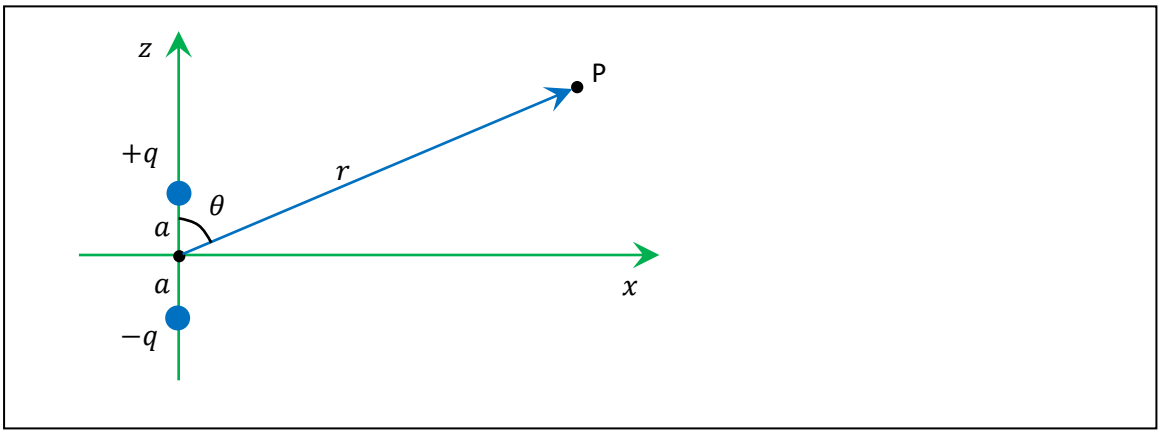
$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = 4\frac{kqa}{r^3}cos\theta$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = 2\frac{kqa}{r^3}sin\theta$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

Στο παρακάτω σχήμα, σχεδιάστε το E για τις γωνίες $\theta = 0, 45°, 90°$ για

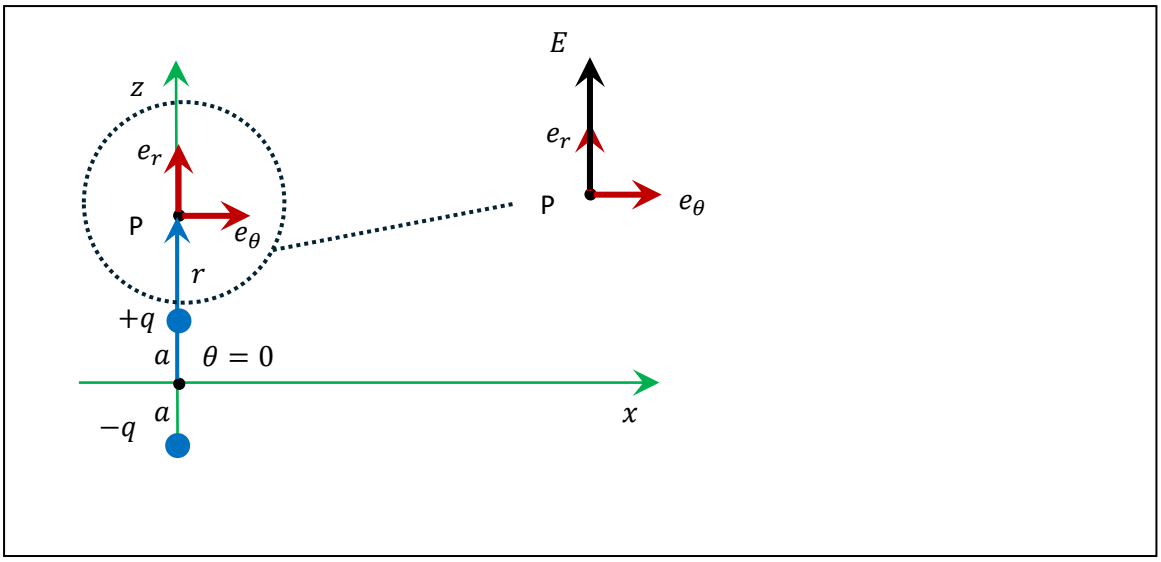
$$2\frac{kqa}{r^3} = 1$$



Για $\theta = 0$ είμαστε πάνω στον άξονα z και το μοναδιαίο $\vec{e}_r$ ταυτίζεται με το μοναδιαίο $\vec{e}_z$

$$E_r = 2cos0 = 2$$

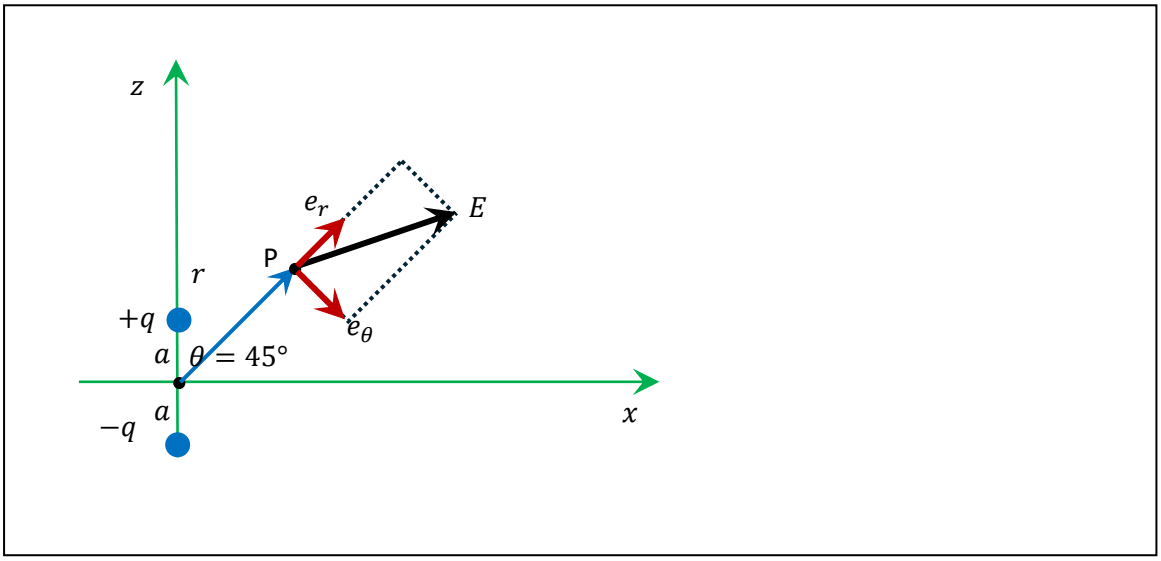
$$E_\theta = sin0 = 0$$



Στις 45°

$$E_r = 2cos45° = \sqrt{2}$$

$$E_\theta = sin45° = \sqrt{2}/2$$



<u>Ερώτηση κρίσεως</u>: ποια γωνία σχηματίζει το E με το r; <u>Απάντηση</u>: από το σχήμα βλέπουμε ότι αυτή η γωνία α δίνεται από την

$$tan\alpha = \frac{E_\theta}{Er} = \frac{1}{2}$$

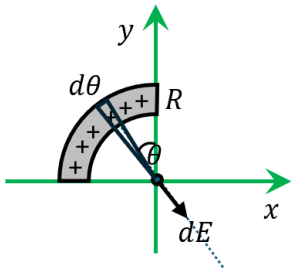
ή $\alpha = 26.5°$

Ερώτηση: ποια γωνία σχηματίζει το E με το x;

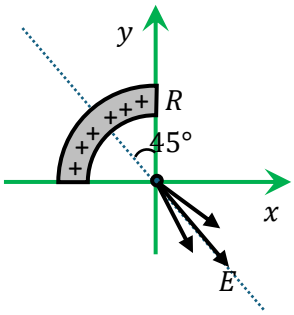
Απάντηση: $45 - \alpha = 18.5°$

Συνέχεια Φροντιστηρίου 12^{ης} Μαρτίου

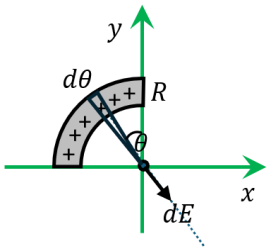
Άσκηση 3 Λεπτός δακτύλιος ακτίνας R ομοιόμορφα φορτισμένος με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ κόβεται σε τέσσερα ίσα μέρη, και ένα από αυτό τοποθετείται όπως στο παρακάτω σχήμα. Δεδομένου του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E} = kQ\vec{e}_r/r^2$ ενός σημειακού φορτίου, όπου Q είναι το φορτίο του, r είναι η απόσταση από αυτό με $\vec{e}_r$ το αντίστοιχο μοναδιαίο κατά μήκος του r, και k η γνωστή σταθερά του ηλεκτρισμού, να βρεθεί η x-συντεταγμένη του ηλεκτρικού πεδίου στην αρχή των συντεταγμένων Ο. (<u>Σημείωση</u>: Το μήκος τόξου s γωνίας θ επάνω σε κύκλο ακτίνας ρ είναι ίσο με ρθ).

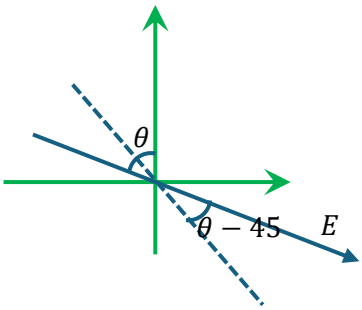


Εάν φανταστούμε έναν άξονα στην $\theta = 45°$, αυτός διχοτομεί συμμετρικά την κατανομή και άρα σε κάθε σε κάθε φορτίο που βρίσκεται πάνω από αυτόν τον άξονα υπάρχει συμμετρικά και ένα φορτίο από κάτω έτσι ώστε το συνιστάμενο E να είναι κατά μήκος αυτού του άξονα



Επομένως αρκεί να θυμίσω μόνο τη συνιστώσα που είναι στις 45 μοίρες δηλαδή





$$dE' = dEcos(\theta - 45)$$

$$dE' = k\frac{dq}{R^2}cos(\theta - 45)$$

$$dE' = k\frac{dq}{R^2}cos(\theta - 45)$$

Από γραμμική πυκνότητα φορτίου = φορτίο / μήκος τόξου

$$\lambda = \frac{dq}{ds} = \frac{dq}{Rd\theta}$$

$$dE' = k\frac{\lambda Rd\theta}{R^2}cos(\theta - 45)$$