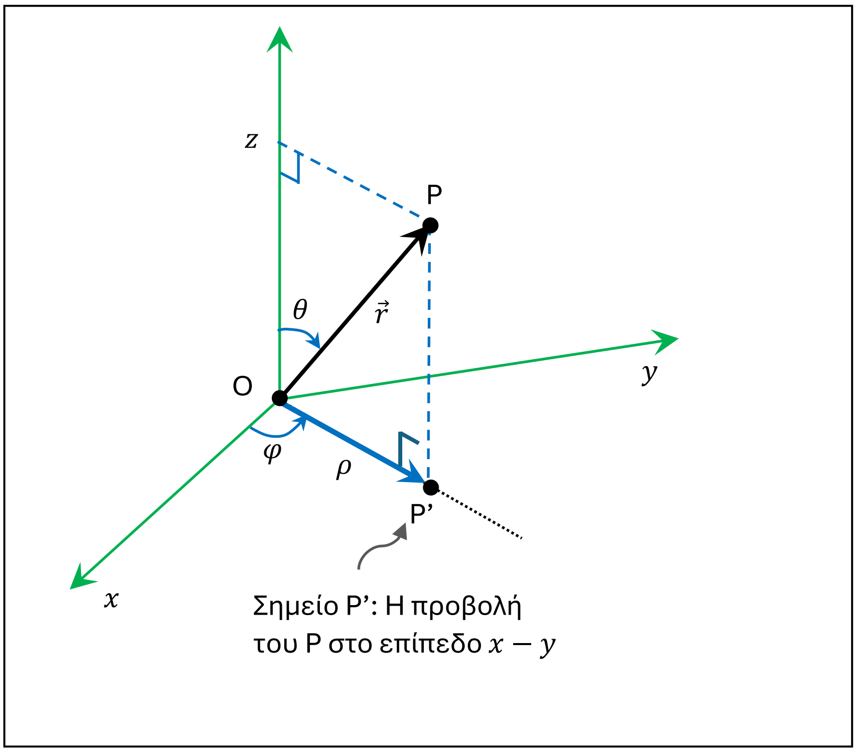
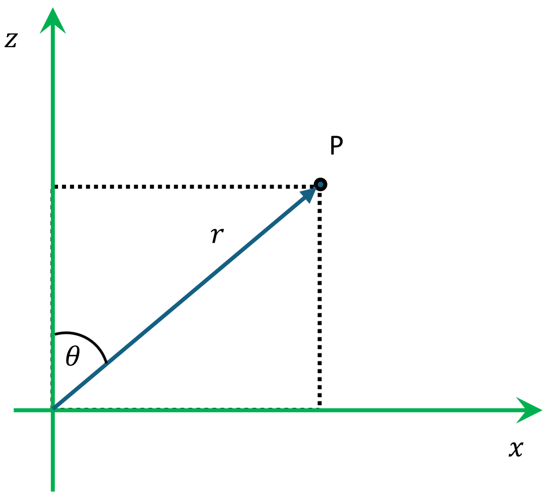
ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ



συντεταγμένες είναι οι r, θ, φ

Θεωρήστε την παρακάτω ειδική περίπτωση $\varphi = 0$ όπου το σημείο βρίσκεται πάνω στον άξονα zx



Στο παραπάνω σχήμα εάν υπάρχει και $\varphi \neq 0$ τότε απλά περιστρέφουμε αυτό το σχήμα γύρω από τον άξονα z κατά φ

Όρια $\varphi = 0, 2\pi$ και $\theta = 0, \pi$

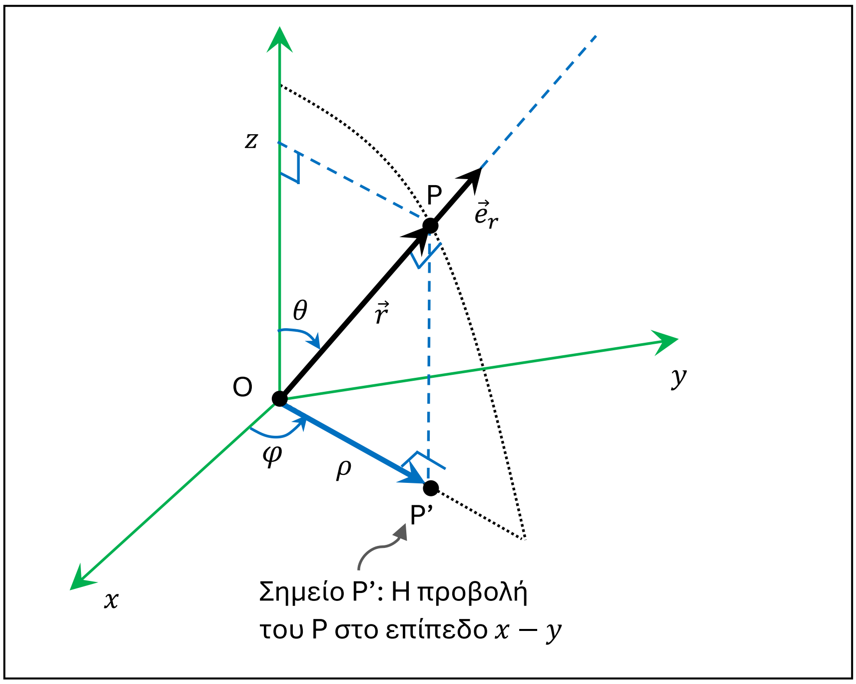
Μοναδιαία,

$\vec{e}_r$: Μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση αύξησης του r κρατώντας τις 2 γωνίες σταθερές

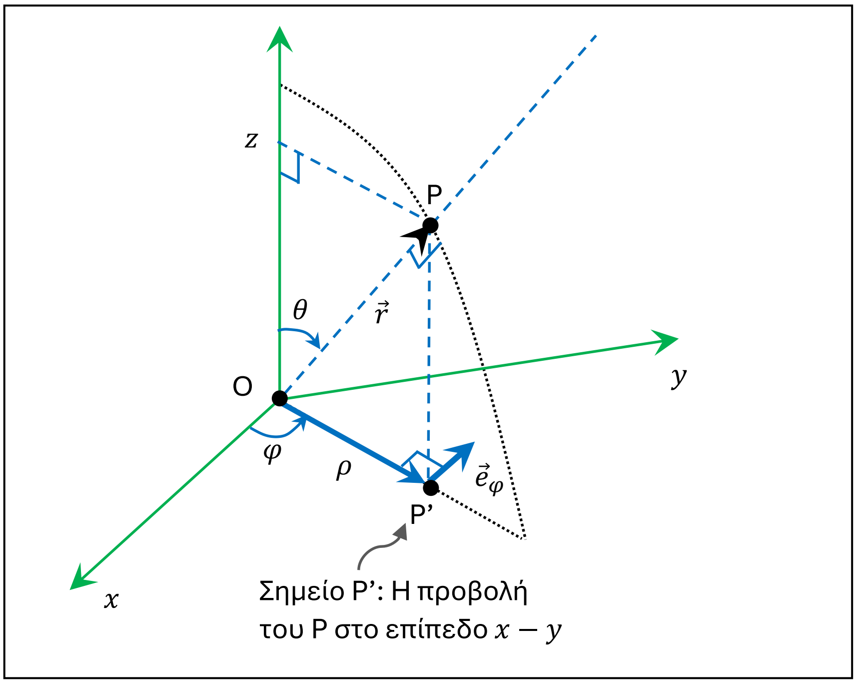
$\vec{e}_\varphi$: Μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση αύξησης του φ κρατώντας τις άλλες 2 μεταβλητές σταθερές

$\vec{e}_\theta$: Μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση αύξησης του θ κρατώντας τις άλλες 2 μεταβλητές σταθερές

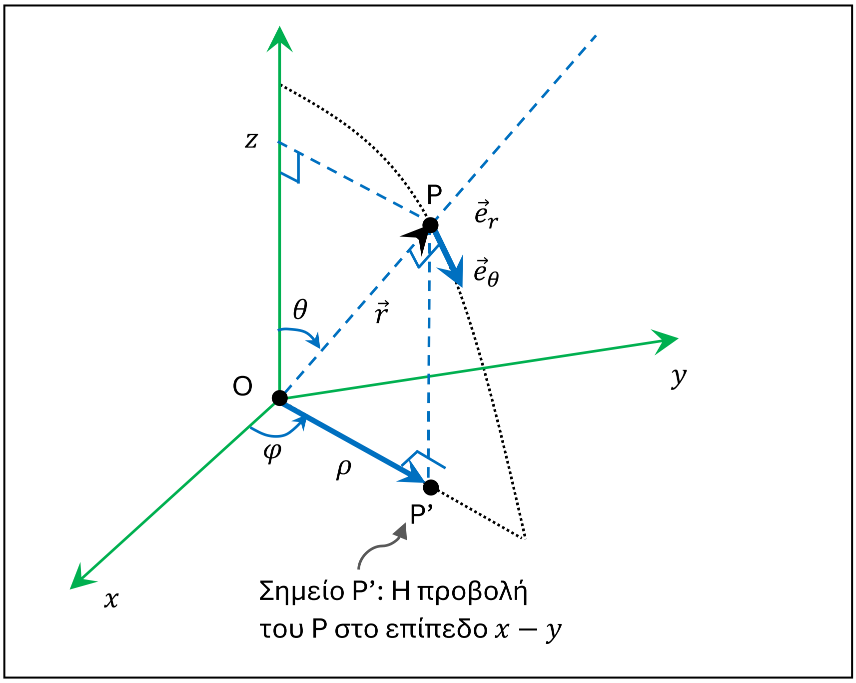
$\vec{e}_r$:



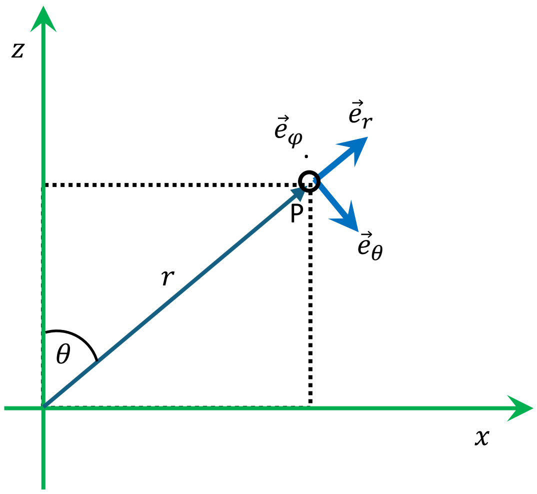
$\vec{e}_\varphi$:



$\vec{e}_\theta$:



Αποτελούν τρισορθογώνιο σύστημα και άρα μπορώ να αναπτύξω οποιοδήποτε διάνυσμα συναρτήσει αυτών των 3 μοναδιαίων



Μετατροπή από σφαιρικές σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$x = rsin\theta cos\varphi$$

$$y = rsin\theta sin\varphi$$

$$z = rcos\theta$$

Αντίστροφα, μετατροπή από καρτεσιανές σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$tan\theta = \frac{\rho}{z} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

$$tan\varphi = \frac{y}{x}$$

Μπορούμε να εκφράσουμε το δυναμικό στις σφαιρικές ενταγμένες και να έχουμε

$$V = V(r, \theta, \varphi)$$

Όπως οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα, έτσι και το ηλεκτρικό πεδίο μπορούμε να το εκφράσουμε στην ανάρτηση των μοναδιαίων στις σφαιρικές συντεταγμένες

$$\vec{E} = E_r\vec{e}_r + E_\theta\vec{e}_\theta + E_\varphi\vec{e}_\varphi$$

αποδεικνύεται από τα μαθηματικά ότι αυτές οι τρείς συνιστώσες δίνονται συναρτήσεις του δυναμικού από τις

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

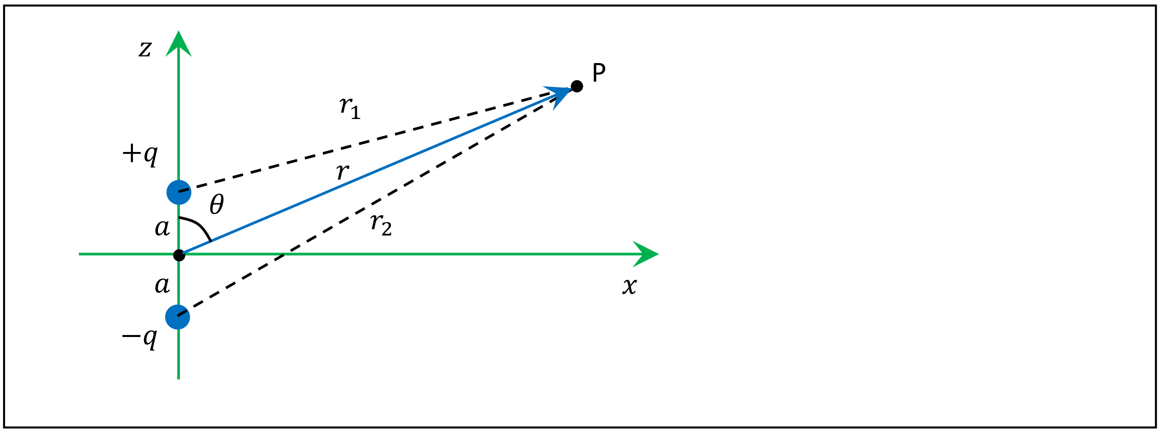
$$E_\varphi = -\frac{\partial V}{\rho \partial \varphi} = -\frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

Παράδειγμα 5.8.

(α) Να βρεθεί το δυναμικό παντού στο χώρο που παράγει ένα *ηλεκτρικό δίπολο*, δηλαδή ένα ζεύγος ίσων και αντίθετων σημειακών φορτίων $\pm q$ σε απόσταση $2a$ μεταξύ τους. Πάρτε τα φορτία συμμετρικά επάνω στον άξονα z και χρησιμοποιήστε τις σφαιρικές συντεταγμένες r και θ.

(β) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο του διπόλου σε σφαιρικές συντεταγμένες για μεγάλες αποστάσεις $r \gg a$.

Λύση: Εφόσον θέλω το δυναμικό σε τυχαίο σημείο P και έχω και άλλα 2 σημεία που είναι τα σημειακά φορτία, μπορώ να τοποθετήσω και τα 3 αυτά σημεία επάνω στο ίδιο επίπεδο το οποίο για ευκολία το παίρνω ως το επίπεδο xz



Φέρω τις απόστασεις r_1 και r_2 του σημείου P από τα σημειακά φορτία

Εάν είχα μόνο το θετικό φορτίο $+q$ θα δημιουργούσε στο σημείο ενδιαφέροντος P δυναμικό ίσο με

$$V_1 = k\frac{q}{r_1}$$

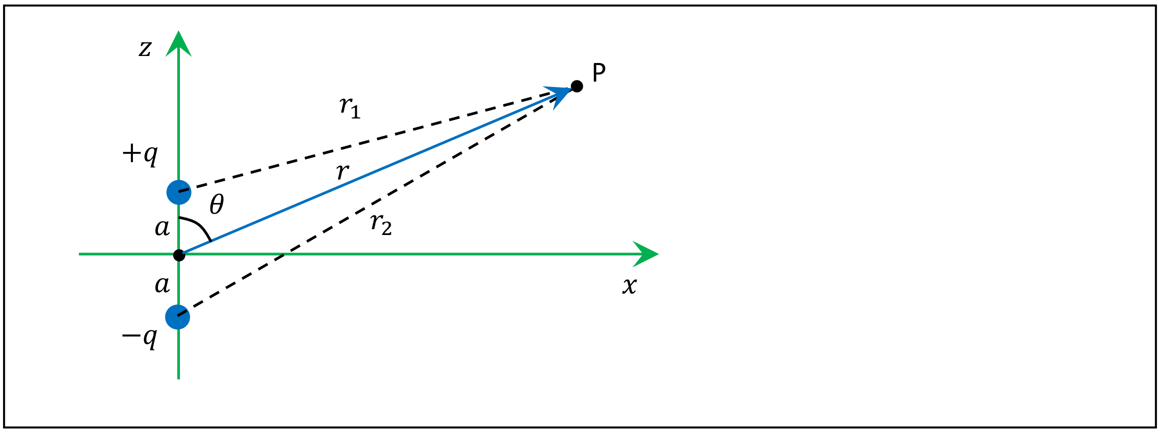
Ομοίως εάν είχα μόνο το αρνητικό φορτίο $-q$ θα δημιουργούσε στο σημείο ενδιαφέροντος P δυναμικό ίσο με

$$V_2 = -k\frac{q}{r_2}$$

Από την αρχή της επαλληλίας έχουμε

$$V = V_1 + V_2 = k\frac{q}{r_1} - k\frac{q}{r_2}$$

Πρέπει να εκφράσω τα r_1, r_2 συναρτήσει των r, θ



Από το νόμο των συνημιτόνων

$$r_1{}^2 = r^2 + a^2 - 2racos\theta$$

$$r_2{}^2 = r^2 + a^2 + 2racos\theta$$

$$V = kq\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2racos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2racos\theta}}\right)$$

Διωνυμική προσέγγιση

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx$$

για $x \ll 1$

$$(r^2 + a^2 \mp 2racos\theta)^{-1/2} = r^{-2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2} \mp \frac{2acos\theta}{r}\right)^{-1/2}$$

Όταν $r \gg a$ Αγνοώ το τετραγωνικό όρο και ο άλλος όρος με το συνημίτονο είναι μικρός σε σχέση με τη μονάδα και άρα μπορώ να χρησιμοποιήσω 2 νομική προσέγγιση

$$\approx r^{-2}\left(1 \pm \frac{1}{2}\frac{2acos\theta}{r}\right)$$