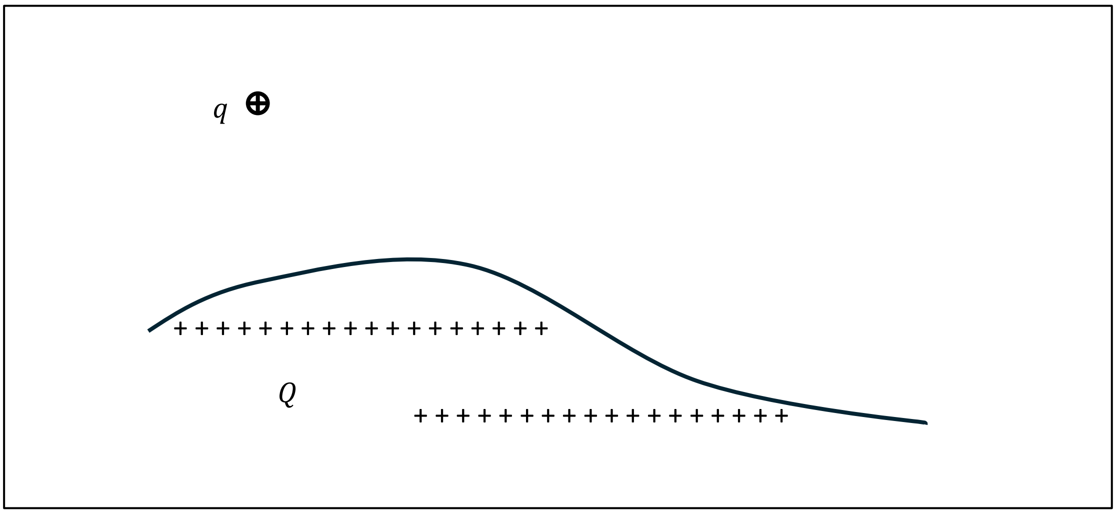
ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ

Το ηλεκτρικό δυναμικό V είναι εξ ορισμού η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ανά φορτίο q

$$V = \frac{U}{q}$$



Για μη ομοιογενές E

$$V = -\int E dx + c$$

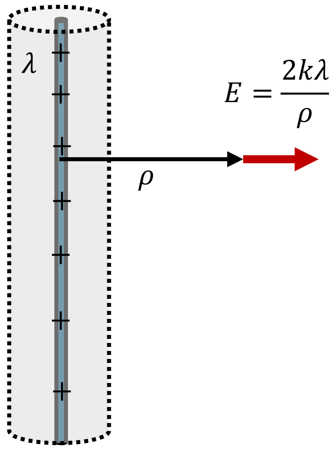
Για ομοιογενές E

$$V = -Ex + c$$

Είδαμε το δυναμικό μιας σημειακής πηγής Q στην αρχή των αξόνων

$$V = \frac{kQ}{r}$$

Παράδειγμα: Δυναμικό άπειρης γραμμής φορτίου με $+\lambda$ φορτίο/μήκος σε απόσταση ρ από αυτή. Αναφορά $V = 0$ παντού επάνω στον κύλινδρο $\rho = 1\ m$.



Μη ομοιογενές κατά μήκος του ρ, τότε θα πρέπει να ολοκληρώσουμε για να βρούμε το πεδίο

$$V = -\int E d\rho + c = -2k\lambda \int \frac{d\rho}{\rho} + c = -2k\lambda\ ln\rho + c$$

Για να βρούμε το c εφαρμόζουμε τις συνοριακές συνθήκες $V(1) = 0$

$$0 = -2k\lambda\ ln1 + c$$

Προκύπτει $c = 0$ και

$$V = -2k\lambda\ ln\rho$$

Εναλλακτικά εάν μου έδιναν $V = V_0$ επάνω στην επιφάνεια $\rho = \rho_0$, θα είχα

$$V_0 = -2k\lambda\ ln\rho_0 + c$$

$$c = V_0 + 2k\lambda\ ln\rho_0$$

και η έκφραση του δυναμικού θα ήταν

$$V = -2k\lambda\ ln\rho + V_0 + 2k\lambda\ ln\rho_0$$

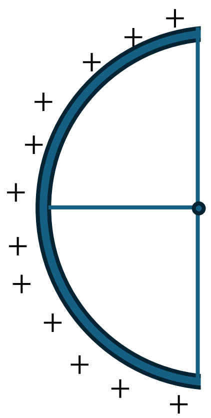
$$V = V_0 + 2k\lambda\ ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να υπολογίσουμε το δυναμικό μιας συνεχής κατανομής φορτίου, "τεμαχίζοντας την κατανομή" σε στοιχειώδη φορτία dq και να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του σημειακού φορτίου

$$dV = \frac{kdq}{r}$$

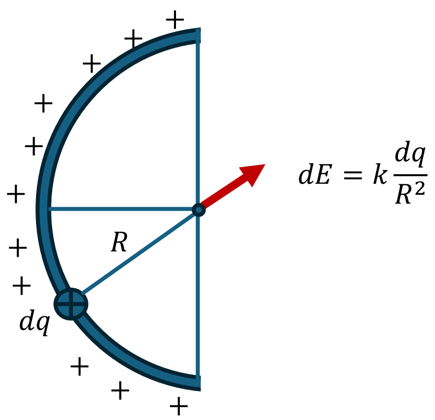
Και ολοκληρώνουμε σε όλη την κατανομή.

<u>Παράδειγμα</u>: (α) Να βρεθεί το E του ομοιόμορφα φορτισμένου ημιδακτυλίου ακτίνας R και φορτίου Q στο κέντρο του και (β) Να βρεθεί το αντίστοιχο δυναμικό.

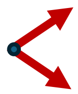


<u>Λύση</u>:

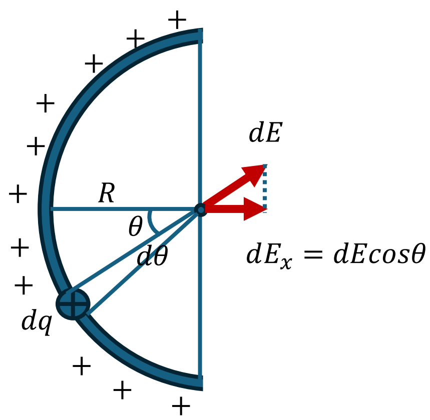
"Τεμαχίζουμε την κατανομή" σε στοιχειώδη φορτία dq



Για κάθε dq από την μέση και κάτω του δακτυλίου, υπάρχει συμμετρικά ένα άλλο dq από την μέση και κάτω και τα δυο πεδία που δημιουργούνται, έχουν αντίθετες y συνιστώσες => ολικό E έχει μόνο x συνιστώσα.



Θα θεωρήσω λοιπόν μόνο την E_x του ολικού πεδίου αφού $E_y = 0$.



$$E = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} dE_x = \frac{k}{R^2}\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} dq\, cos\theta$$

Πρέπει να εκφράσω το q συναρτήσει του θ. Επειδή ομοιόμορφα φορτισμένο

$$\frac{dq}{Q} = \frac{d\theta}{\pi} => dq = Q\frac{d\theta}{\pi}$$

Έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται

$$E = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} dE_x = \frac{kQ}{\pi R^2}\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} cos\theta d\theta = \frac{kQ}{\pi R^2}[sin(\pi/2) - sin(-\pi/2)] = \frac{2kQ}{\pi R^2}$$

(β) Επειδή το E υπολογίσθηκε μόνο σε ένα σημείο, δεν έχουμε μια έκφραση των συντεταγμένων και άρα δεν μπορώ να χρησιμοποιήσω τον τύπο

$$V = -\int Edx + c$$

Εναλλακτικά, το κάθε dq δημιουργεί στο κέντρο ένα στοιχειώδες δυναμικό

$$dV = k\frac{dq}{R}$$

Το ολικό δυναμικό προκύπτει με ολοκλήρωση

$$V = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} dV = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} k\frac{dq}{R} = \frac{k}{R}\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} dq = \frac{k}{R}Q$$

Στον υπολογισμό του V από τον τύπο

$$V(x) = -\int E(x)dx + c$$

Μας ενδιαφέρουν κάποιες φορές οι διαφορές

$$\Delta V = V_2 - V_1 = V(x_2) - V(x_1) = -\int_{x_1}^{x_2} E(x)dx$$

<u>Παράδειγμα</u>: Στην παραπάνω γραμμή φορτίου, να βρεθεί η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων με κυλινδρικές συντεταγμένες $(\rho, \varphi, z) = (2,0,0)$ και $(4,0,0)$

<u>Λύση</u>:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{2k\lambda}{\rho} d\rho = -2k\lambda\, ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = -2k\lambda\, ln2$$

Αντίθετα, μπορώ να βρω το E από το V

$$V(x) = -\int E(x)dx + c$$

$$E(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

Το δυναμικό μέχρι τώρα το είδαμε σε μια διάσταση, γενικά όμως είναι στο χώρο μια συνάρτηση και των τριών διαστάσεων

$$V = V(x, y, z)$$

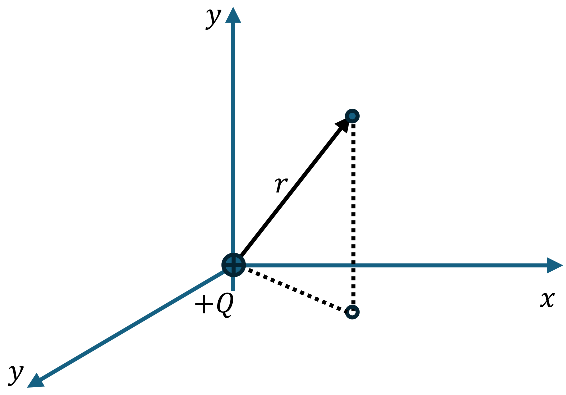
Τότε

$$E_x = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial V(x)}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial V(x)}{\partial z}$$

<u>Παράδειγμα</u>: Σημειακό φορτίο $+Q$ στην αρχή των αξόνων. Να βρεθούν οι καρτεσιανές συνιστώσες του δυναμικού σε τυχαίο σημείο (x, y, z)



Λύση:

Γνωρίζουμε ότι το V σε σημείο που απέχει απόσταση r από το φορτίο Q ισούται με

$$V = k\frac{Q}{r} = k\frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

(στις τρεις διαστάσεις, το διάνυσμα θέσης δίνεται από γενικευμένο Πυθαγόρειο)

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -kQ\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{kQ}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{kQ}{r^2}\frac{1}{2}2x = \frac{kQ}{r^2}x$$

ομοίως συμμετρικά

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{kQ}{r^2}y$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{kQ}{r^2}z$$