Παράδειγμα 4.2.

Είχαμε δει μια φορτισμένη γραμμή πεπερασμένου μήκους με ομοιόμορφο φορτίο Q εκτείνεται στον άξονα x από το $x = a$ έως το $x = b$ και βρήκαμε το ηλεκτρικό πεδίο στην αρχή των αξόνων ίσο με:

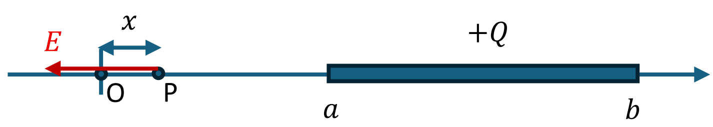
$$E_O = \frac{kQ}{ab}$$

Να βρεθούν (α) το πεδίο $E(x)$ σε σημείο P με τυχαία συντεταγμένη $x < a$ και (β) η δυναμική ενέργεια ενός υποθετικού δοκιμαστικού φορτίου q όταν αυτό τοποθετηθεί στο παραπάνω σημείο P. Πάρτε ως σημείο αναφοράς την αρχή των αξόνων

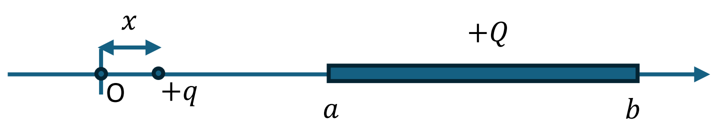
Λύση: (α) Θέλω το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P το οποίο απέχει x από την αρχή των αξόνων. Εάν θεωρήσουμε ότι τώρα το P είναι η νέα αρχή, τότε τα άκρα της ράβδου θα απέχουν από αυτό απόσταση $a - x$ και $b - x$ αντίστοιχα και επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα εφαρμόζοντάς το στο P. Έτσι το μέτρο του E είναι το

$$|E(x)| = k\frac{Q}{(a-x)(b-x)}$$

με φορά προς τα αριστερά.



(β) Τοποθετούμε σημειακό υποθετικό φορτίο $q \ll Q$ στο σημείο P



Θέλουμε την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια. Για μη ομογενές ηλεκτρικό πεδίο αυτή δίνεται από τη σχέση

$$U(x) = -\int qE(x)dx + c$$

Επειδή E είναι προς τα αριστερά

$$E(x) = -k\frac{Q}{(a-x)(b-x)}$$

Επομένως

$$U(x) = kqQ\int \frac{1}{(a-x)(b-x)}dx + c$$

Σπάω το κλάσμα σε απλούστερα

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x} = \frac{Ab + Ba - (A+B)x}{(a-x)(b-x)}$$

Επειδή στην αρχική έκφραση απουσιάζει ο γραμμικός όρος x, τότε αναγκαστικά $A + B = 0 => B = -A$ ενώ ο σταθερός όρος πρέπει να είναι ίσος με τη μονάδα. Έτσι

$$Ab + Ba = 1 => A(b-a) = 1$$

$$U(x) = \frac{kqQ}{b-a}\int \left\{\frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x}\right\}dx + c$$

$$U(x) = \frac{kqQ}{b-a}ln\left(\frac{b-x}{a-x}\right) + c$$

Για τη σταθερά ολοκλήρωσης απαιτούνται αρχικές συνθήκες, π.χ. $U(0) = 0$

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ

Το ηλεκτρικό δυναμικό V είναι εξ ορισμού η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ανά φορτίο q

$$V = \frac{U}{q}$$

Μονάδες Volt

$$1\,V = \frac{J}{C}$$

Το q είναι το δοκιμαστικό ή υποθετικό σημειακό φορτίο που φέρουμε κοντά σε μια πηγή για να μετρήσουμε τη δυναμική ενέργεια. Η πηγή έχει το δικό της φορτίο $Q \gg q$. Για ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο κατά τον άξονα y

$$V = \frac{q|E|y}{q} = |E|y$$

Για μη ομογενές E

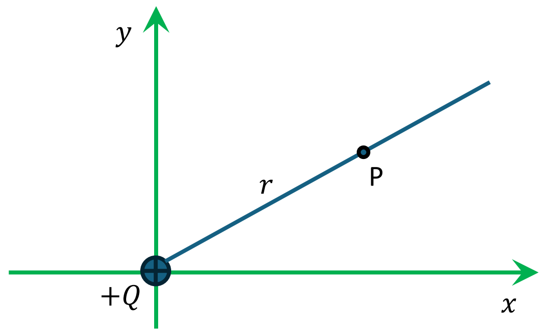
$$V = \frac{1}{q}\left[-\int qE(x)dx\right] + c$$

$$V = -\int E(x)dx + c$$

Το ηλεκτρικό δυναμικό όπως και δυναμική δεν ορίζεται απόλυτα αλλά πάντα έχουμε ένα σημείο το οποίο αυθαίρετα το παίρνουμε ως $V = 0$, γνωστό ως γείωση.

1) Δυναμικό σημειακού φορτίου

$$E = \frac{kQ}{r^2}$$



$$V = -\int E(r)dr + c = -\int \frac{kQ}{r^2} dr + c$$

$$V = \frac{kQ}{r} + c$$

Επιλέγω το άπειρο ως σημείο μηδενικού δυναμικού, δηλαδή παίρνω

$$V(\infty) \to 0$$

Αντικαθιστώ στην παραπάνω

$$0 = 0 + c$$

δηλαδή $c = 0$ και

$$V = \frac{kQ}{r}$$

2) Δυναμικό μεταλλικής σφαίρας, φορτίου Q ακτίνας R

$$E = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{kQ}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$$

Το V για $r < R$ είναι εύκολο

$$V = -\int E(r)dr + c = V = -0 + c = c$$

για $r > R$

$$V = -\int E(r)dr + c'$$

$$V = \frac{kQ}{r} + c'$$

Οπότε

$$V = \begin{cases} c, & r < R \\ \frac{kQ}{r} + c', & r \geq R \end{cases}$$

Όταν έχουμε διαφορετικούς χώρους, είναι διαφορετικές στις σταθερές και τις βρίσκουμε απαιτώντας τη συνέχεια του δυναμικού. Π.χ. εάν μας δίνεται ότι η γείωση είναι στο $r = 0$, δηλαδή $V(0) = 0$, τότε $c = 0$

Για να βρω την άλλη σταθερά, επιβάλω

$$V(R^-) = V(R^+)$$

$$0 = \frac{kQ}{R} + c'$$

$$c' = -\frac{kQ}{R}$$

$$V = \begin{cases} 0, & r < R \\ \dfrac{kQ}{r} - \dfrac{kQ}{R}, & r \geq R \end{cases}$$