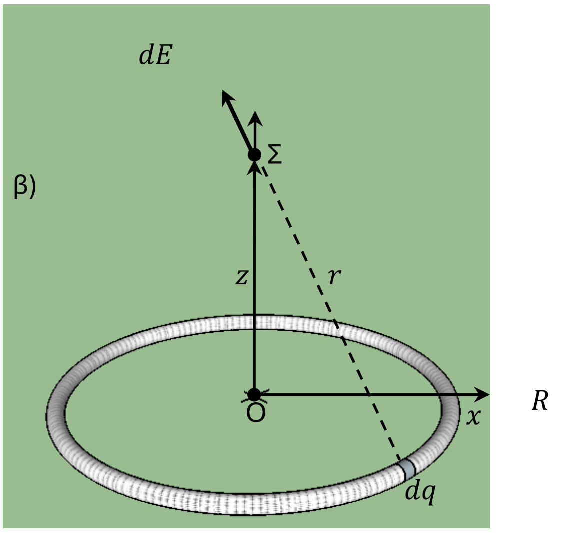
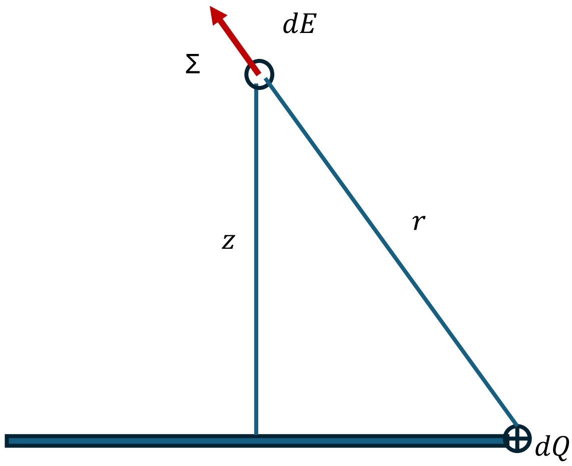
Περίπτωση (β) σε σημείο Σ επάνω στον άξονα που απέχει απόσταση z από το Ο



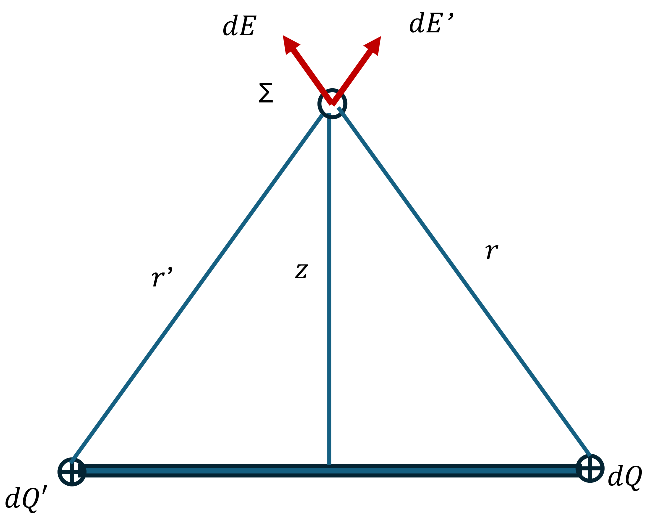
Και πάλι τεμαχίζω σε στοιχειώδη φορτία. Έστω ένα τέτοιο φορτίο dQ στη δεξιά μεριά της πλαγιάς όψης το οποίο δημιουργεί στο σημείο Σ ένα ηλεκτρικό πεδίο dE. Εάν r είναι η απόσταση του στοιχειώδους φορτίου από το σημείο παρατήρησης Σ τότε σύμφωνα με το νόμο του Coulomb

$$dE = k\frac{dQ}{r^2}$$



Πλάγια όψη

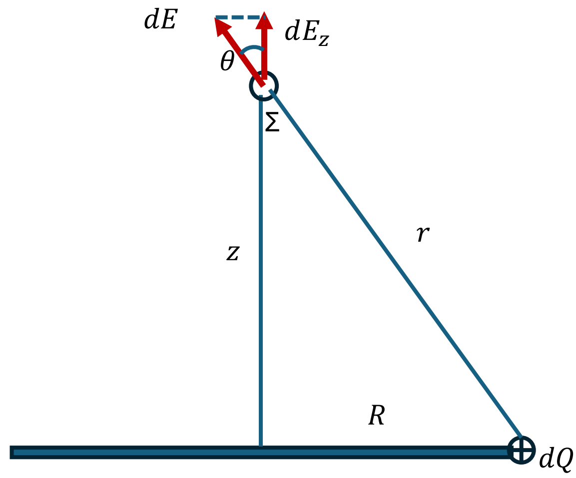
Μπορώ να επιλέξω το τέρμα αριστερά φορτίο dQ' στην πλάγια όψη το οποίο προφανώς είναι ίσο με το αρχικό dQ και απέχει την ίδια απόσταση $r' = r$ όπως και το dQ. Επομένως δημιουργεί στοιχειώδες πεδίο dE' ίσου μέτρου με το προηγούμενο αλλά λόγω της γεωμετρίας έχει αντίθετη οριζόντια συνιστώσα ενώ έχει την ίδια κατακόρυφη



Πλάγια όψη

Επομένως περιμένω να επιβιώσουν μόνο η z συνιστώσες

$$dE_z = dEcos\theta = dE\frac{z}{r}$$



Πλάγια όψη

Ολοκληρώνουμε σε όλο το δακτύλιο και έχουμε

$$E = \int_{\delta\alpha\kappa\tau} dE_z = \int_{\delta\alpha\kappa\tau} dE\frac{z}{r} = k\int_{\delta\alpha\kappa\tau}\frac{dQ}{r^2}\frac{z}{r}$$

$$E = k\frac{z}{r^3}\int_{\delta\alpha\kappa\tau} dQ = k\frac{zQ}{r^3} = k\frac{zQ}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

Φορά // άξονα του δακτυλίου και για θετικό δακτύλιο είναι από το Ο προς το $\pm\infty$

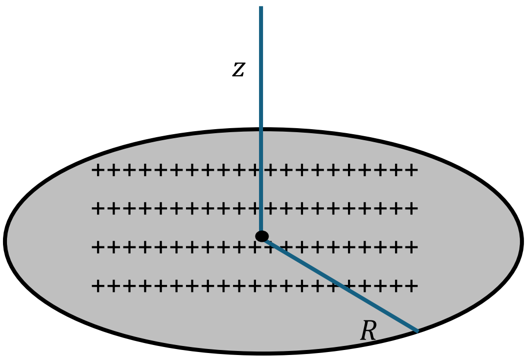
Έλεγχος συνέπειας. Ο παραπάνω τύπος πρέπει να οδηγεί σε γνωστά αποτελέσματα για ειδικές περιπτώσεις όπως είναι οι παρακάτω

- Για $z = 0$ όντως δίνει $E = 0$ (που ισχύει όπως είδαμε στο κέντρο Ο του δακτυλίου)
- Δίνει τις σωστές μονάδες
- Για $z \gg R$ έχουμε $z^2 + R^2 \approx z^2$ και

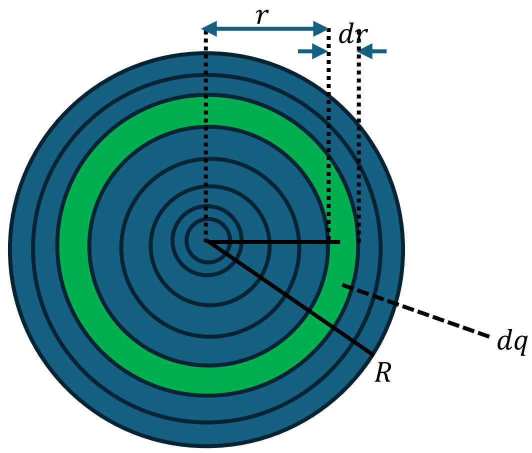
$$E \rightarrow \frac{kQ}{z^2}$$

Που είναι αυτό που θα περιμέναμε για σημειακό φορτίο

Ε) Ηλεκτρικό πεδίο ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου ακτίνας R και φορτίου Q επάνω στον άξονα του σε απόσταση z από το κέντρο του



Τεμαχίζω σε ένα σύνολο δακτυλίων, και θεωρώ έναν από αυτούς με ακτίνα $r < R$, στοιχειώδες πάχος dr και φορτίο dq. Γνωρίζουμε από την προηγούμενη ενότητα ότι αυτός δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο επάνω στον άξονα z κατά μήκος του άξονα αυτού και με μέτρο



$$dE = k\frac{zdq}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

με φορά προς τον $+z$. Ολοκληρώνοντας

$$E = \int_{\delta\iota\sigma\kappa} dE = kz\int_{r=0}^{R} \frac{dq}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

Πρέπει να συσχετίσω το dq με το dr και γνωρίζω ότι για ομοιόμορφη επιφανειακή κατανομή ο λόγος των φορτίων είναι ίσος με το λόγο των εμβαδών

$$\frac{dq}{Q} = \frac{dA}{A}$$

όπου dA είναι το στοιχειώδες εμβαδό του δακτυλίου και $A = \pi R^2$ είναι το εμβαδό όλου του δίσκου

Το dA είναι η διαφορά εμβαδόν του έξω κύκλου μην του μέσα και δηλαδή

$$dA = \pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = 2\pi rdr + \pi dr^2$$

$$dA \approx 2\pi rdr$$

και έτσι ο παραπάνω λόγος γίνεται

$$\frac{dq}{Q} = \frac{2\pi rdr}{\pi R^2}$$

ή

$$dq = Q\frac{2rdr}{R^2}$$

το ολοκλήρωμα γίνεται

$$E = \frac{kQz}{R^2}\int_{r=0}^{R} \frac{2rdr}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Θέτω $x = z^2 + r^2$ και έχω $dx = 2rdr$

$$E = \frac{kQz}{R^2} \int_{r=0}^{R} \frac{dx}{x^{3/2}} = \frac{kQz}{R^2} \int_{r=0}^{R} x^{-3/2} dx$$

$$E = -2\frac{kQz}{R^2}\left[x^{-1/2}\right]_{r=0}^{R}$$

$$E = -2\frac{kQz}{R^2}\left[1/x^{1/2}\right]_{r=0}^{R}$$

$$E = \frac{2kQz}{R^2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$