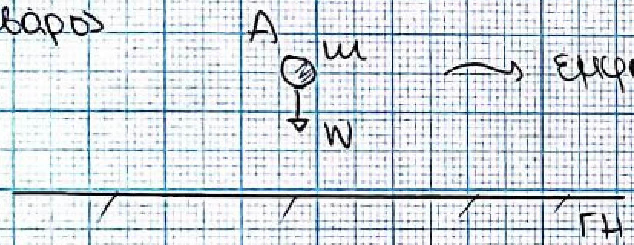
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

13-03-24

2ο ΜΑΘΗΜΑ

Βαρυτικό πεδίο: το ανιχνεύω στο Α φέρνοντας σημειακή μάζα m

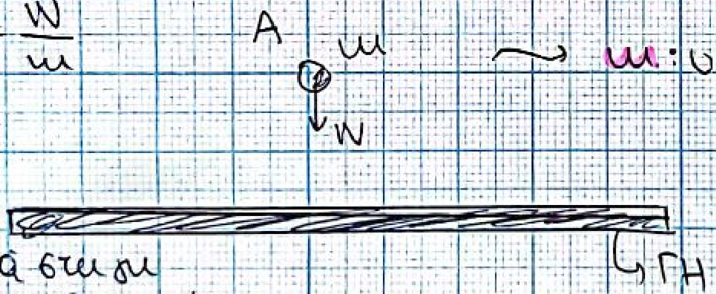
W: βάρος



→ εμφανίζεται στη m η δύναμη του βάρους

$\vec{g} = \frac{\vec{W}}{m}$

⇓



→ m: υποθετική ή δοκιμαστική μάζα

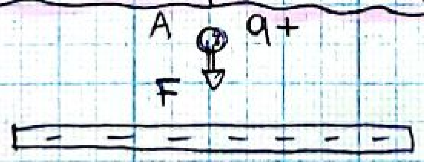
g: περιγράφει ισχύ πεδίου

κοντά στη γη

$g \cong 9.81\ m/s^2$

μάζα $M >> m$

|| όμοιως ⇒ **Βαρυτικό πεδίο με ηλεκτρισμό**



$|Q| >> q$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}}$$

Ορισμός ηλεκτρικού πεδίου

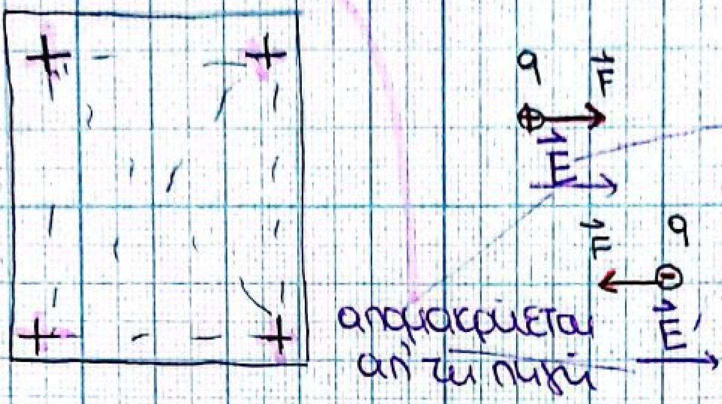
όπου q: υποθετικό φορτίο ή δοκιμαστικό

ΟΧΙ ΤΗΣ ΠΗΓΗΣ

- $\vec{E}$ ίδια φορά με $\vec{F}$, όταν $q>0$
- $\vec{E}$ αντίθετη φορά με $\vec{F}$, όταν $q<0$

Παράδειγμα

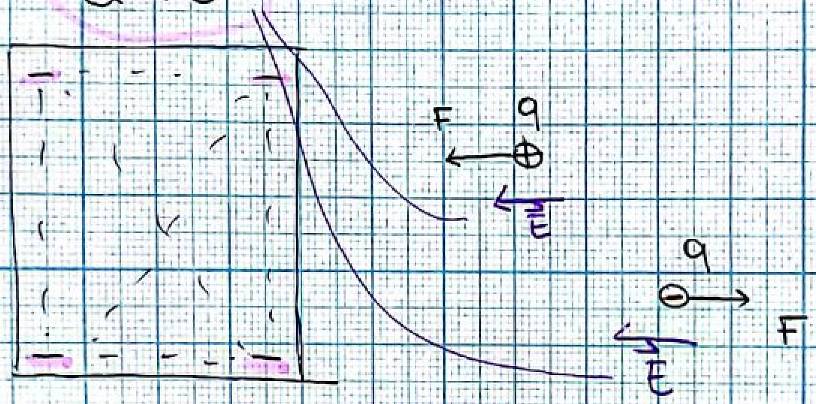
ΠΗΓΗ ΦΟΡΤΙΟΥ $Q>0$



Το πεδίο εξαρτάται ΜΟΝΟ απ' τη πηγή του φορτίου

$Q>0$ {
αρνητικό φορτίο : F με φορά αριστερά
θετικό φορτίο : F με φορά δεξιά

ΠΗΓΗ $Q<0$

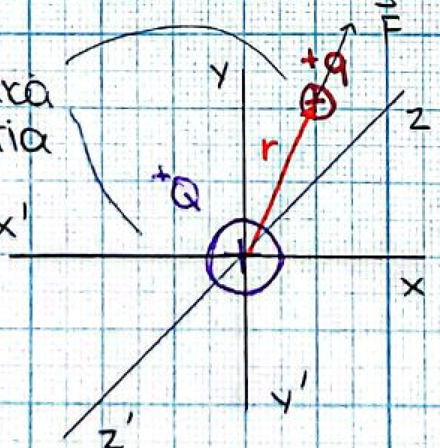


$1^{η}$ περίπτωση: Έστω Q σημειακό φορτίο στο (0,0,0)

Ποιο πεδίο $\vec{E}$ δημιουργεί στο χώρο

δύο σημειακά φορτία

Q: ΠΗΓΗ



φέρνω $2^{ο}$ $q \ll Q$ σε τυχαίο σημείο που περιγράφεται απ' το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$

$\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q} \xrightarrow[\text{Coulomb}]{\text{ισχύει ο νόμος του}} F = \dfrac{KQq}{r}$

$\vec{F}$ ίδια φορά // με το $\vec{r}$

$Q>0 \rightsquigarrow \vec{E} \uparrow\uparrow \vec{r}$

$Q<0 \rightsquigarrow \vec{E} \uparrow\downarrow \vec{r}$

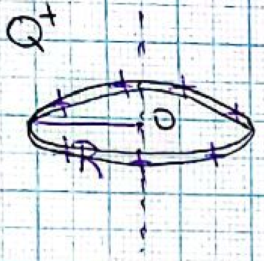
Ηλ. πεδίο σημειακού φορτίου $\Rightarrow \boxed{E = \dfrac{KQ}{r^2}}$ εξαρτάται μόνο απ' τη ΠΗΓΗ

$\vec{E} = E\,\vec{e}_r$ $\qquad$ $\vec{e}_r = c\cdot\vec{r}$ → μοναδιαίο διάνυσμα $\parallel \vec{r}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \dfrac{kQ}{r^2}\vec{e}_r}$ $\qquad$ $|\vec{e}_r| = 1 \Rightarrow 1 = |\vec{e}_r| = c|\vec{r}| \Rightarrow \boxed{c = \dfrac{1}{|\vec{r}|} = \dfrac{1}{r}}$

Ηλ. πεδίο σημειακού φορτίου

2η περίπτωση: Φορτισμένος δακτύλιος (μηδενικού πάχους) (ομοιόμορφα) ακτίνας R

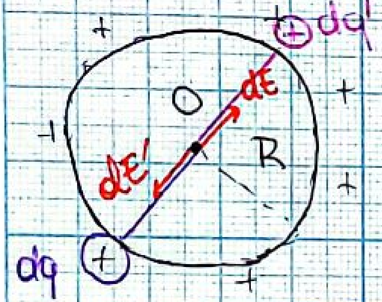


α) $\vec{E}$: κέντρο του δακτυλίου

β) $\vec{E}$: μεσοκάθετος

γ) $\vec{E}$: τυχαίο σημείο P στο χώρο ~ εκτός ύλης

α) Πεδίο στο κέντρο του δακτυλίου



φορτίο Q ομοιόμορφο

"τεμαχίζω" σε $N \to \infty$ στοιχειακά φορτία

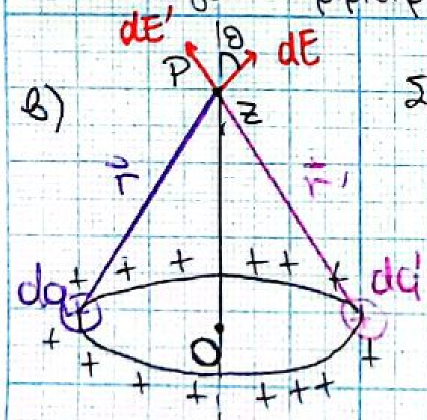
$\boxed{dq = \dfrac{Q}{N}}$

$\sim dE = k\dfrac{dq}{R^2}$

αν αθροίσουμε όλα τα αντιδιαμετρικά dq αλληλοαναιρούνται λόγω συμμετρίας, Δηλ. $\vec{E} = 0$ στο κέντρο

$dE' = k\dfrac{dq'}{R^2}$

β)



Σημείο P επάνω στη μεσοκάθετο

$(OP) = z$

αλληλοαναιρούνται ΜΟΝΟ οι οριζόντιες συνιστώσες, κ' επιβιώνουν μόνο οι κάθετες συνιστώσες $dE_z = dE\cos\theta$

$\Rightarrow \boxed{dE_z = k\dfrac{dq\cos\theta}{r}}$

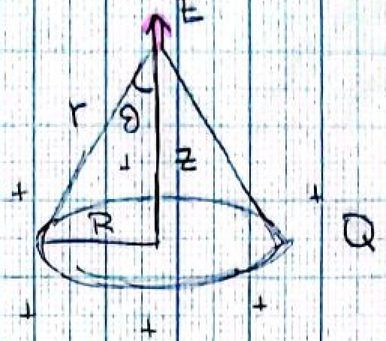
Άρα το ολικό ηλ. πεδίο θα είναι κατακόρυφο

φορά προς τα πάνω

↑ με $E = \int_0^{2\pi} dE_z = k\int \dfrac{dq\cos\theta}{r^2} \xrightarrow[r^2 = σταθ]{\theta = σταθ} E = \dfrac{k\cos\theta}{r^2}Q$

Σαρώθηκε με το CamScanner

$$\boxed{E = \frac{KQ}{r^2}\cos\theta}$$



Δεδομένο Q, z, R

↓

$$\cos\theta = \frac{z}{r}, \qquad r = \sqrt{z^2+R^2}$$

$$\longrightarrow \boxed{E = K\frac{Qz}{(z^2+R^2)^{3/2}}}$$ → μαθηματική διατύπωση

~ Ειδικές περιπτώσεις ~

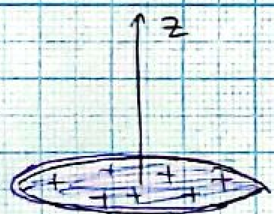
(α) για $z=0 \rightsquigarrow E=0$, λογικό λόγω γεωμετρίας

(β) για $z\to\infty$ ή $z \gg R \rightsquigarrow E \cong \frac{KQz}{z^3} \Rightarrow E \cong \frac{KQ}{z^2}$

↓

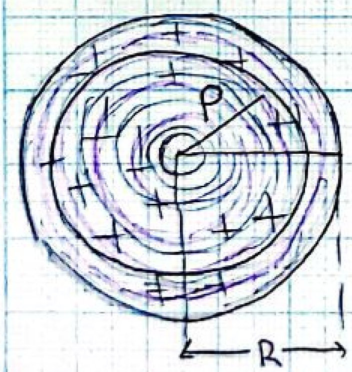
$R\to 0 \rightsquigarrow E\to 0$

3η Περίπτωση: Ομοιόμορφα φορτισμένος δίσκος μηδενικού πάχους, ακτίνας R, φορτίο Q



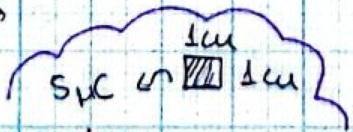
α) E στην μεσοκάθετο σ' απόσταση z

"τεμαχίζω" τον δίσκο σε $N\to\infty$ λεπτούς δακτυλίους πάχους $d\rho$ και φορτίου dq



ένας λεπτός δακτύλιος δημιουργεί πεδίο $\boxed{dE = \frac{K\,dq\,z}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}}$ σ' ένα σημείο τυχαίο

επομένως $E = K\int_{\rho=0}^{R}\frac{z\,dq}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}$



πυκνότητα φορτίου (φορτίο/επιφάνεια) $\rightsquigarrow \sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$

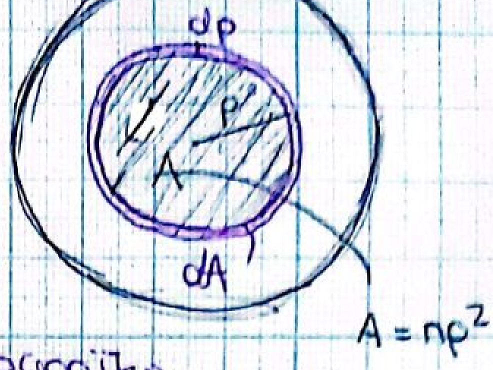
$dq = \sigma\, dA$ → στοιχειώδης επιφάνεια του δακτυλίου

Εμβαδόν δακτυλίου

Ευρεση εμβαδού

(α)' $dA = \pi(\rho+d\rho)^2 - \pi\rho^2$

$\boxed{dA = 2\pi\rho\, d\rho}$ → διαφορικό 2ης τάξης



(β)' Εμβαδόν $A = \pi\rho^2$ → διαφορίζω τη σχέση

εμβαδόν $\boxed{dA = 2\pi\rho\, d\rho}$

(γ)' "κόβω" τον δακτύλιο και τον μετατρέπω σε παραλληλόγραμμο μήκους 2πρ και πάχους dρ

$\boxed{dA = 2\pi\rho\, d\rho}$ → ίδιος τύπος, εύρεση με τρεις τρόπους

$$dq = \sigma dA \Rightarrow dq = \frac{Q}{\pi R^2}\cdot 2\pi\rho\, d\rho \quad \text{άρα}$$

$$\sigma \downarrow \frac{Q}{\pi R^2}$$

$$E = kz\int_{\rho=0}^{R} \frac{2\pi\rho\, d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

το διαφορικό του

θέτω $\omega = \rho^2 + z^2 \Rightarrow d\omega = 2\rho\, d\rho$

$$E = kz\pi\int_{\omega=z^2}^{z^2+R^2} \frac{d\omega}{\omega^{3/2}}$$

ολοκλήρωμα δύναμης $\frac{1}{\omega^4} = \omega^{-4}$

$$E = kz\pi\left[\frac{\omega^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right]_{z^2}^{z^2+R}$$

4η περίπτωση: Άπειρη γραμμή φορτίου

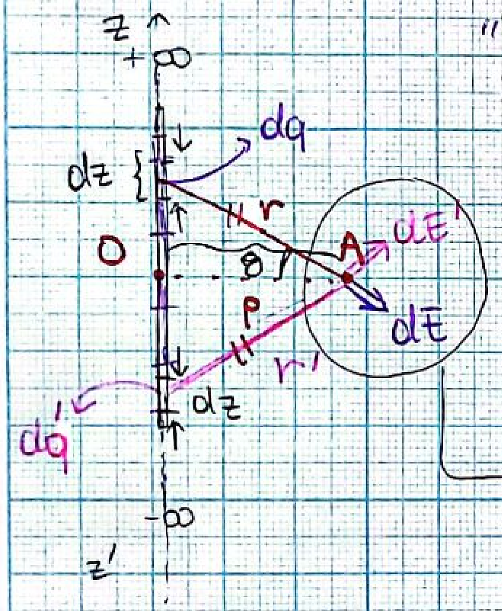
$+\infty$ - - - - - - - - - - - - $-\infty$

$^+Q = +\infty$

Γραμμική πυκνότητα φορτίου λ
↳ φορτίο / μονάδα μήκους
ανά

E που δημιουργεί στον χώρο σε τυχαίο σημείο που απέχει απόσταση ρ

"τεμαχίζω" σε στοιχειώδη φορτία dq και ορίζω σύστημα συντ/μένων



$$\boxed{dE = k\frac{dq}{r^2}}$$

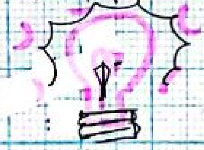
$dq' = dq$ → αλληλοαναιρούνται

A: $dE_p = dE\cos\theta$

$dE = \frac{k\,dq}{r^2}$

$dE_p = \frac{\lambda\,dz}{r^2}k\cos\theta \Rightarrow$

Γραμμική πυκνότητα $dq = \lambda dz$



→ Εκφράζω τα z, r συναρτήσει του θ για να γίνει πιο εύκολη η ολοκλήρωση

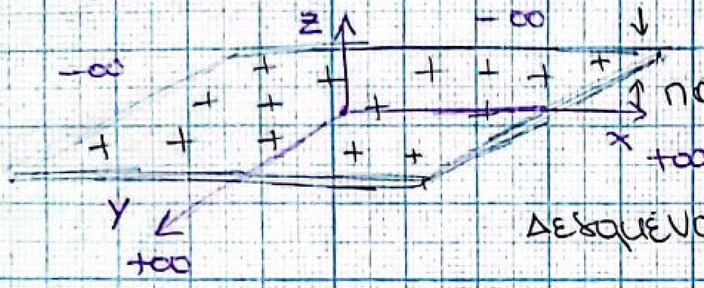
$$\begin{cases} z = \rho\tan\theta \\ r = \dfrac{\rho}{\cos\theta} \\ dz = \rho\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow dE_p = \cancel{\rho} k\lambda \frac{d\theta}{\cancel{\cos^2\theta}}\frac{\cos^2\theta}{\rho^2}\cos\theta$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{k\lambda}{\rho}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta = \frac{2k\lambda}{\rho}}$$

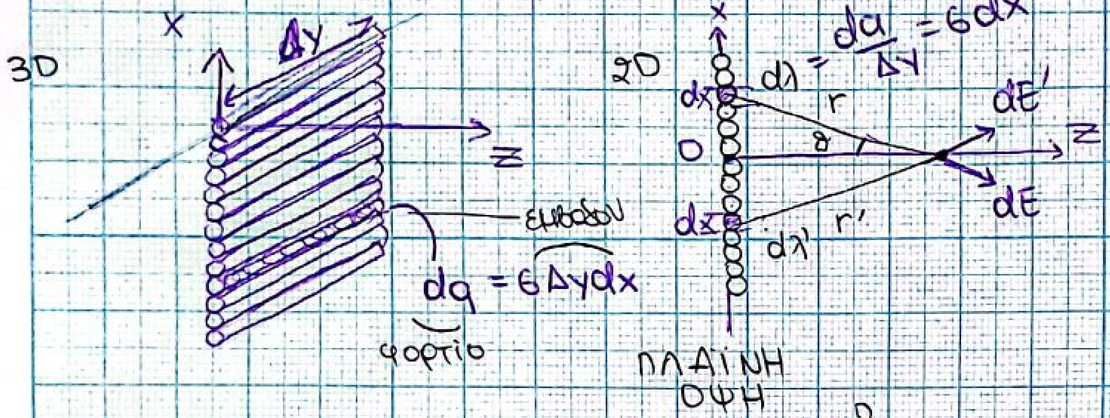
ΜΑΘΗΜΑ 4ο 20/03/2024

5η περίπτωση: Άπειρο φορτισμένο λεπτό φύλλο



Δεδομένο σ: $\frac{\text{φορτίο}}{\text{εμβαδό}}$ } Να βρεθεί E σ' απόσταση z

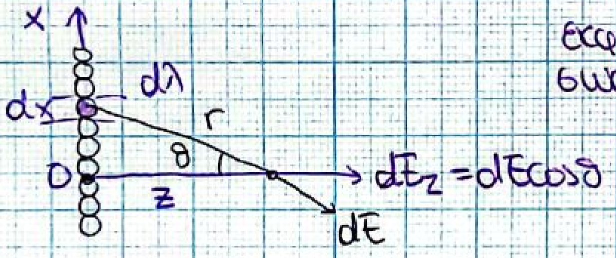
"Τεμαχίζω" σ' άπειρες γραμμές φορτίου



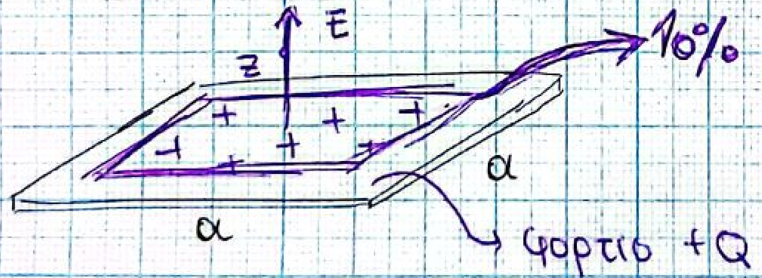
Όπως στην 4η περίπτωση: $E = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dE\cos\theta$, $dE = \frac{2k\,d\lambda}{r}$

$$E = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2k\frac{d\lambda}{r}\cos\theta = 2k\sigma\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{r}\cos\theta \Rightarrow \boxed{E = 2k\sigma}$$

εκφράζω όλα συναρτήσει του θ



* Πεπερασμένο εμβαδόν α^2 *

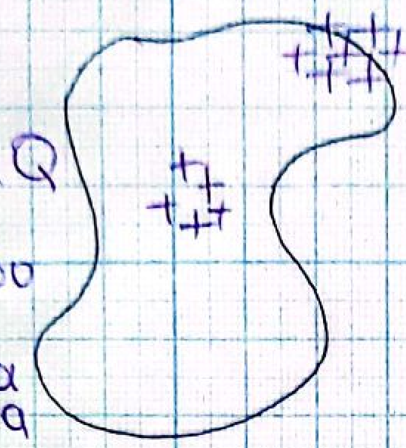


$z << \alpha$

$E \simeq 2k\sigma$

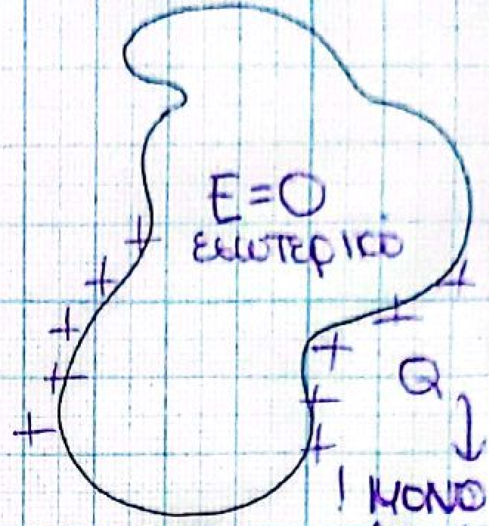
$\sigma = \frac{Q}{\alpha^2}$

τυχαίο σχήμα



φορτίο όπου αρχικά τοποθετείσα σ' επιφάνεια & χώρο

ΜΟΝΩΤΗΣ



Q

! ΜΟΝΟ στην εξ. επιφάνεια!

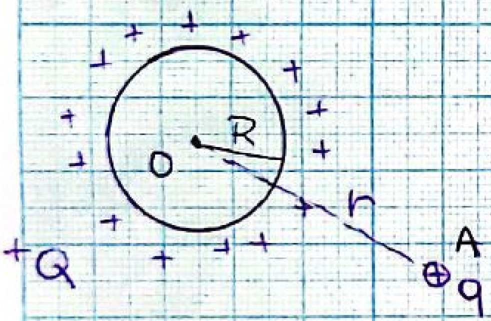
ΑΓΩΓΟΣ

ΜΑΘΗΜΑ 5º — 21/03/2024

6η περίπτωση: Ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα

(6α) επιφανειακά φορτισμένη μεταλλική ή/και μονωτής

→ τοποθετημένο φορτίο στην επιφάνεια $\vec{E}_{εξωτ}=\frac{F}{q}$

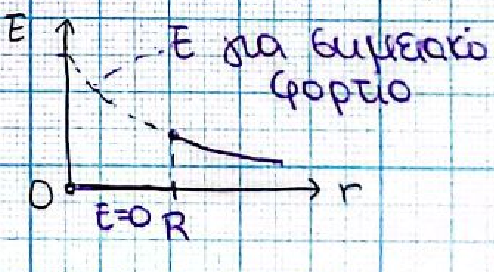


r: απόσταση ΟΑ

$$E=\begin{cases}0, & r<R\\ \frac{kQ}{r^2}, & r\geq R\end{cases}$$

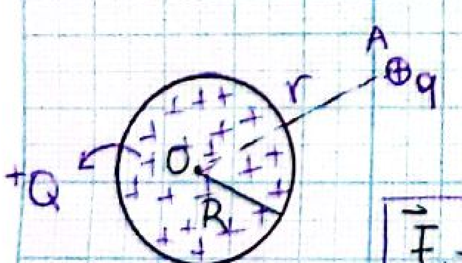
ή $\vec{E}=0$ μέσα

$\vec{E}=\frac{kQ}{r^2}\vec{e}_r$ εξωτερικά



(6β) χωρικά ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα

η σφαίρα συμπεριφέρεται ως σημειακό φορτίο συγκεντρωμένο στο κέντρο Ο!

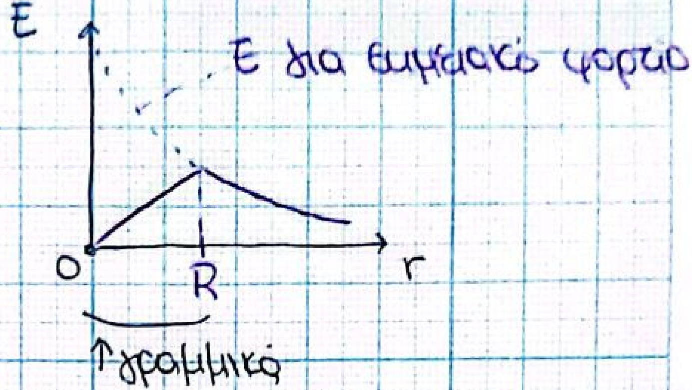


εξωτερικά

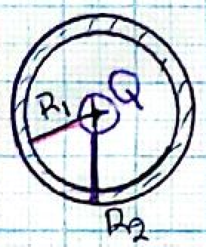
$$\boxed{\vec{E}=\frac{kQ}{r^2}\vec{e}_r}$$

εσωτερικά αποδεικνύεται ότι το E αυξάνει γραμμικά

$$E = \begin{cases} K\dfrac{Q}{R^3}r \,, & r<R \\ K\dfrac{Q}{r^2} \,, & r \geq R \end{cases}$$



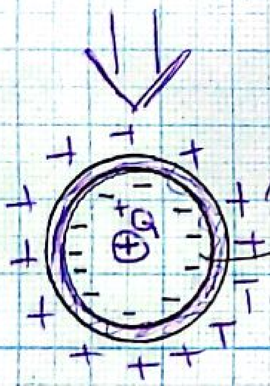
Πρόβλημα: Να βρεθεί το E παντού στο χώρο, του εξής σχηματισμού:



α) σημειακό φορτίο ^+Q στο κέντρο

β) σφαιρικός μεταλλικός φλοιός $R_1<R_2$

Λύση:



Λόγω επαγωγής:

εμφανίζεται ^+Q στο $r=R_2$

εμφανίζεται ^-Q στο $r=R_1$

$$E = \begin{cases} K\dfrac{Q}{r^2} \,, & r \leq R_1 \text{ και } r \geq R_2 \\ 0 \,, & R_1<r<R_2 \end{cases}$$