ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1

Η πυκνότητα φορτίου μιας μη ομογενούς αλλά σφαιρικά συμμετρικής κατανομής δίνεται από τη σχέση:

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \qquad \gamma\iota\alpha\ r \leq R$$

$$\rho(r) = 0 \qquad \gamma\iota\alpha\ r \geq R$$

όπου $\rho_0 = \frac{3Q}{\pi R^3}$ είναι μια θετική σταθερά.

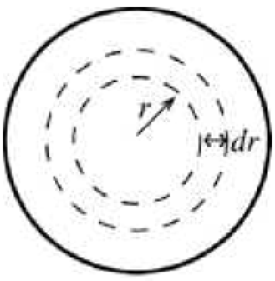
α) Δείξτε ότι το ολικό φορτίο που περιέχεται στην κατανομή είναι Q. (2 μονάδες)

β) Δείξτε ότι για την περιοχή που ορίζεται από $r \geq R$, το ηλεκτρικό πεδιο είναι το ίδιο με αυτό που προκύπτει από ένα σημειακό φορτίο Q στο σημείο r=0. (0,5 μονάδα)

γ) Βρείτε μια έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή r<R. (2,5 μονάδες)

<u>ΛΥΣΗ:</u>

a) Η πυκνότητα φορτίου μεταβάλλεται με την ακτίνα r εντός της σφαίρας.

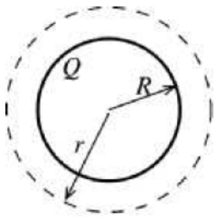


Χωρίζουμε τον όγκο της σφαίρας σε λεπτούς ομόκεντρους σφαιρικούς φλοιούς και ολοκληρώνουμε σε όλο της τον όγκο προκειμένου να βρούμε το ολικό φορτίο.
Ο όγκος ενός στοιχειώδους φλοιού είναι $dV=4\pi r^2 dr$ και το φορτίο που περιέχει είναι $dq=\rho(r)\, dV=4\pi r^2\rho_0(1-r/R)dr$.
Το ολικό φορτίο Q βρίσκεται ολοκληρώνοντας:

$$Q = \int dq = \int_0^R 4\pi r^2 \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) dr$$
$$= 4\pi\rho_0 \int_0^R \left(r^2 - \frac{r^3}{R}\right) dr$$

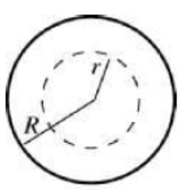
$$Q = 4\pi\rho_0 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right]_0^R = 4\pi\rho_0 \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^4}{4R}\right) = 4\pi\rho_0 \left(R^3/12\right) = 4\pi \frac{3Q}{\pi R^3}\frac{R^3}{12} = Q$$

β) Εφαρμόζουμε ν.Gauss σε μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r>R:



$$\Phi = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \to E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

Η έκφραση είναι ίδια με αυτή που αντιστοιχεί στο πεδίο ενός σημειακού φορτίου Q.



γ) Εφαρμόζουμε ν.Gauss σε μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r<R. Το διαφορετικό εδώ είναι ο περιπλοκότερος υπολογισμός του περικλειόμενου φορτίου.
Για τον υπολογισμό του, χρησιμοποιούμε την ίδια τεχνική με το υποερώτημα (α), όμως εδώ ολοκληρώνουμε από 0 έως r.

$$Q_{enc} = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho_0 \left(1 - \frac{r'}{R}\right) dr' = 4\pi\rho_0 \int_0^r \left(r'^2 - \frac{r'^3}{R}\right) dr'$$

$$Q_{enc} = 4\pi\rho_0 \left[\frac{r'^3}{3} - \frac{r'^4}{4R}\right]_0^r = 4\pi\rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right) = 4\pi\rho_0 r^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{r}{4R}\right)$$

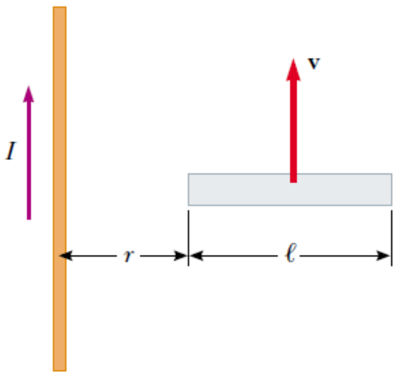
$$\rho_0 = \frac{3Q}{\pi R^3} \text{ έτσι } Q_{enc} = \frac{12Qr^3}{\pi R^3}\left(\frac{1}{3} - \frac{r}{4R}\right) = Q\frac{r^3}{R^3}\left(4 - 3\frac{r}{R}\right)$$

Συνεπώς από το ν.Gauss λαμβάνω:

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{R^3}\left(4 - 3\frac{r}{R}\right)$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}\left(4 - \frac{3r}{R}\right)$$

ΘΕΜΑ 2

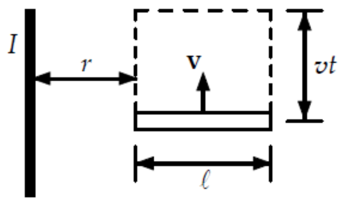


Μία αγώγιμη ράβδος μήκους $\boldsymbol{l}$ κινείται με ταχύτητα **v** παράλληλα σε ένα μεγάλο σύρμα που φέρει ένα σταθερό ρεύμα έντασης $\mathbf{I}$. Ο άξονας της ράβδου παραμένει κάθετος στο σύρμα με το πλησιέστερο άκρο της να βρίσκεται σε απόσταση **r** από το σύρμα (βλ. σχήμα).
Να βρείτε μια έκφραση της επαγόμενης ΗΕΔ στη ράβδο συναρτήσει των γνωστών μεγεθών και των σταθερών ποσοτήτων π,μ_0.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

<u>ΛΥΣΗ:</u>

Αρχικά εκφράζουμε τη μαγνητική ροή δια μέσου της ορθογώνιας περιοχής που σαρώνει η ράβδος σε χρόνο t. Το μαγνητικό πεδίο σε απόσταση x από το σύρμα είναι:



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x},$$

και η ροή:

$$\Phi_B = \int B dA \to \Phi_B = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi x} ut\, dx = \frac{\mu_0 Iut}{2\pi} \int_r^{r+l} \frac{dx}{x}$$

όπου *ut* είναι η απόσταση που έχει διανύσει η ράβδος σε χρόνο t.

Τελικά

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 Iut}{2\pi} [\ln x]_r^{r+l} = \frac{\mu_0 Iut}{2\pi} \left(\ln \frac{r+l}{r}\right)$$

και

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 Iu}{2\pi} \ln(1 + \frac{l}{r})$$