Εξέταση στη Φυσική ΙΙ

Τμήμα Χημικών Μηχανικών
Πολυτεχνική Σχολή
Πανεπιστήμιο Πατρών

Διδάσκων:	Μπαλής Νικόλαος
Διάρκεια Εξέτασης:	2 ώρες
Ημερομηνία Εξέτασης:	Τετάρτη 15 Ιουλίου 2020
Ονοματεπώνυμο:	
Εξάμηνο:	
ΑΜ:	

Θέμα 1

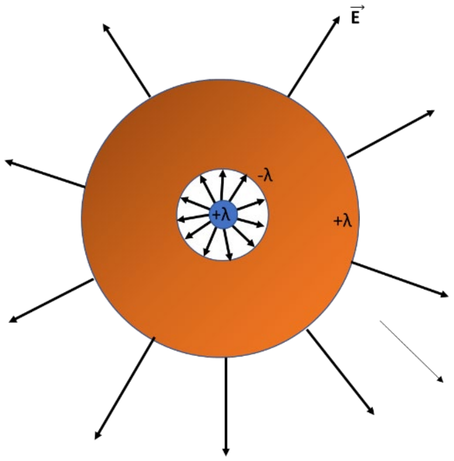
Ένα μακρύ ομοαξονικό καλώδιο αποτελείται από εσωτερικό συμπαγή κυλινδρικό αγωγό ακτίνας α και έναν εξωτερικό ομοαξονικό κυλινδρικό αγωγό εσωτερικής ακτίνας b και εξωτερικής c. Ο εξωτερικός κύλινδρος δεν έχει φορτία και στηρίζεται σε μονωτικά στηρίγματα. Ο εσωτερικός έχει γραμμική πυκνότητα φορτίου +λ. Βρείτε τη γραμμική κατανομή φορτίου στην εσωτερική και εξωτερική επιφάνεια του εξωτερικού κυλίνδρου. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση r από τον άξονα, στο χώρο εξωτερικά του καλωδίου. (Σημ.: Θεωρείστε τη γραμμική πυκνότητα φορτίου επαρκή προσέγγιση για να περιγράψουμε το κατά τα άλλα τρισδιάστατο πρόβλημα)

(Μονάδες 3)

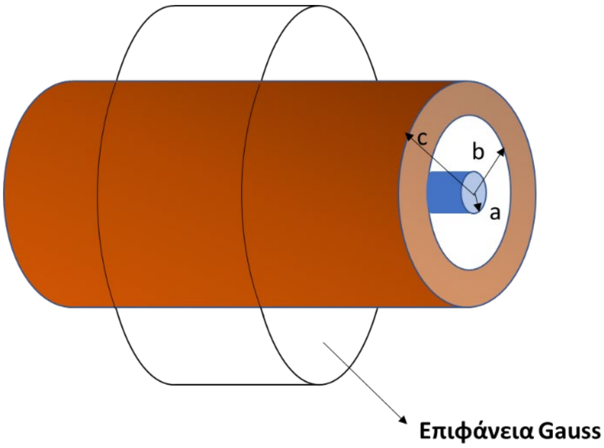
Λύση:

Αφού ο εσωτερικός αγωγός έχει γραμμική πυκνότητα +λ, εξ΄επαγωγής απέναντι του, στην εσωτερική επιφάνεια του εξωτερικού αγωγού θα «εμφανιστεί» φορτίο με αντίστοιχη γραμμική κατανομή αντίθετου προσήμου -λ, ενώ με την ιδία λογική στην εξωτερική επιφάνεια του εξωτερικού αγωγού θα «εμφανιστεί» φορτίο γραμμικής κατανομής +λ.
Τελικά η κατανομή των φορτίων του καλωδίου θα είναι ως εξής:

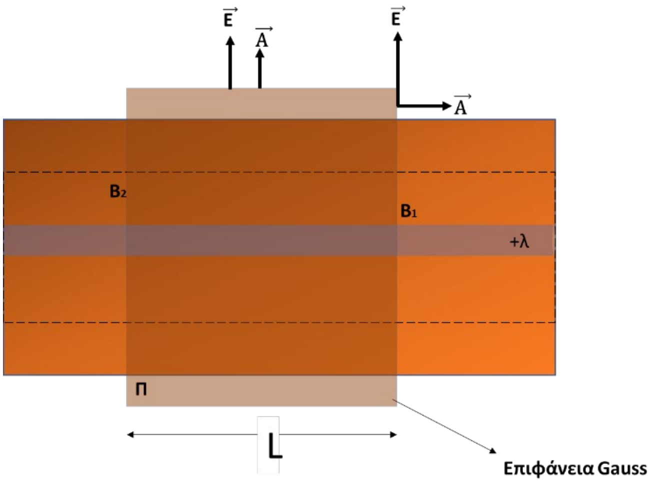
Κάτοψη



Για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο θεωρούμε κυλινδρική επιφάνεια Gauss ακτίνας r όπως στο σχήμα.



Πλάγια όψη



Το ηλεκτρικό πεδίο κατευθύνεται ακτινικά προς τα έξω και διαπερνά κάθετα σε κάθε σημείο την πλευρική επιφάνεια (Π) του γκαουσιανού κυλίνδρου ενώ δεν διέρχεται σε κανένα σημείο από τις βάσεις (Β1 και Β2) αυτού.

Αξιοποιώ όσα ξέρω για τη χρησιμότητα του ν. Gauss σε τέτοιες γεωμετρίες:

$$\int \boldsymbol{E} d\boldsymbol{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

ο οποίος σε δεύτερο χρόνο μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\int_{B_1} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{A} + \int_{B_2} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{A} + \int_{\Pi} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

όπου βέβαια τα ολοκληρώματα που αντιστοιχούν στις δυο βάσεις του κυλίνδρου μηδενίζονται καθώς μηδενίζονται και τα αντίστοιχα εσωτερικά γινόμενα.

Τελικά δεν έχω παρά να κάνω τις πράξεις:

$$E \cdot 2\pi r \cdot L = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \ ,$$

όπου $\lambda = \frac{Q_{enc}}{L} \rightarrow Q_{enc} = \lambda \cdot L$

και τελικά:

$$E \cdot 2\pi r \cdot L = \frac{\lambda \cdot L}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi r\, \varepsilon_0}$$

Θέμα 2

Η συνάρτηση του ηλεκτρικού δυναμικού ενός συστήματος σε σφαιρικές συντεταγμένες δίνεται από την έκφραση:

$$V(r, \theta, \varphi) = -E_A R \cos\theta \left[\frac{r}{R} + A\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]$$

όπου τα A, E_A και R είναι σταθερές με το A να είναι καθαρός αριθμός, το E_A να έχει μονάδες ηλεκτρικού πεδίου και το R να έχει μονάδες μήκους.

Να βρεθούν:

(α) Η τιμή του A εάν επιβάλουμε στο δυναμικό να είναι μηδέν επάνω στην επιφάνεια που ορίζεται από την εξίσωση r = R (σφαίρα)

(β) Οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου σε σφαιρικές συντεταγμένες

(γ) Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου επάνω στον άξονα z και σε απόσταση 2R από την αρχή των συντεταγμένων.

(Μονάδες 3)

Λύση:

(α) Αφού το δυναμικό μηδενίζεται επάνω στη σφαίρα (περιοχή r=R) ισχύει:

$$0 = -E_A R\cos\theta\left[\frac{R}{R} + A\left(\frac{R}{R}\right)^2\right] \to A = -1$$

(β) Θα χρησιμοποιήσω τις εξισώσεις που συνδέουν τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου με το δυναμικό, σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = E_A R\cos\theta\left[\frac{1}{R} - 2A\frac{R^2}{r^3}\right] = E_A R\cos\theta\left[\frac{1}{R} + 2\frac{R^2}{r^3}\right]$$
$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = -E_A R\, sin\,\theta\left[\frac{1}{R} + A\frac{R^2}{r^3}\right] = -E_A R\sin\theta\left[\frac{1}{R} - \frac{R^2}{r^3}\right]$$
$$E_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

(γ) Τα σημεία επάνω στον άξονα z χαρακτηρίζονται από τη συνθήκη θ=0. Η συνιστώσα E_θ μηδενίζεται, η συνιστώσα E_ϕ είναι ούτως ή άλλως μηδέν, επομένως

$$E_r = E_A R\left[\frac{1}{R} + 2\frac{R^2}{8R^3}\right] = \frac{5}{4}E_A$$

συνιστώσα που ταυτίζεται με το μέτρο του πεδίου.

Θέμα 3

Ευθύγραμμος συμπαγής κύλινδρος μεγάλου μήκους, με τον άξονά του παράλληλο στον άξονα z, διαρρέεται από ρεύμα πυκνότητας J. Το μέτρο της J μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$J = \frac{2I_0}{\pi\alpha^2}\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]\ \gamma\iota\alpha\ r \le a,$$

$$J = 0, \gamma\iota\alpha\ r \ge a$$

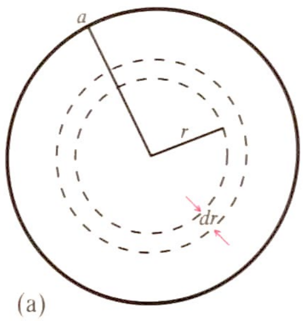
όπου α είναι η ακτίνα του κυλίνδρου, r η ακτινική απόσταση από τον άξονά του και I_o μια σταθερά σε μανάδες ρεύματος. Θεωρείστε ότι η ολοκλήρωση του J σε όλη την έκταση της διατομής του σύρματος δίνει το I

α) δείξτε ότι τι I_o είναι το ολικό ρεύμα που διαρρέει ολόκληρη τη διατομή του σύρματος,

β) από τον νόμο του Ampere , βρείτε μια έκφραση για το B στη περιοχή r≥α,

(Μονάδες 4)

Λύση:

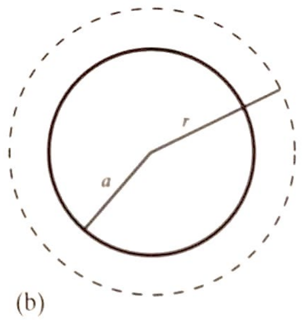


(a)

α) Διαιρούμε την κυκλική διατομή του κυλίνδρου σε λεπτούς ομόκεντρους δακτυλίους ακτίνας r και πάχους dr (σχήμα α). Ο κάθε δακτύλιος διαρρέεται από ρεύμα

$$\mathrm{dI} = \mathrm{J}(2\pi \mathrm{rdr}) = \frac{4\mathrm{I}_0}{\mathrm{a}^2}\left[1-\left(\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{a}}\right)^2\right]\mathrm{rdr} \quad (1)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την συνάρτηση της πυκνότητας ρεύματος στην περιοχή r≤α.



(b)

Ολοκληρώνοντας την (1) από 0 έως α παίρνουμε το ολικό ρεύμα $\mathrm{I}_{ολ}$:

$$\mathrm{I}_{ολ} = \int_0^{\alpha} \mathrm{dI} = \frac{4\mathrm{I}_0}{\mathrm{a}^2}\int_0^{\mathrm{a}}\left(1-\frac{\mathrm{r}^2}{\mathrm{a}^2}\right)\mathrm{rdr} = \frac{4\mathrm{I}_0}{\mathrm{a}^2}\left[\frac{1}{2}\mathrm{r}^2 - \frac{1}{4}\frac{\mathrm{r}^4}{\mathrm{a}^2}\right]_0^{\mathrm{a}} = \mathrm{I}_\mathrm{o}$$

b) Εφαρμόζουμε το ν. Ampere κατά μήκος κυκλικής διαδρομής με ακτίνα r>α (σχήμα β):

$$\oint \mathrm{B}\cdot \mathrm{dl} = \mathrm{B}(2\pi \mathrm{r}) = \mu_0 \mathrm{I}_{ολ} = \mu_0 \mathrm{I}_\mathrm{o} \rightarrow \mathrm{B}(\mathrm{r}) = \frac{\mu_0 \mathrm{I}_0}{2\pi \mathrm{r}}$$