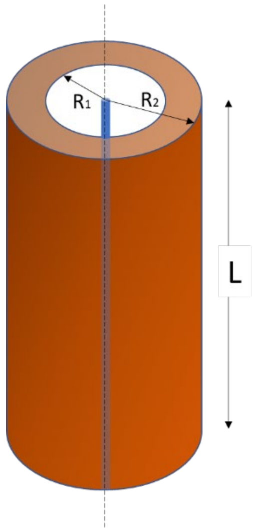
Εξέταση στη Φυσική ΙΙ

Τμήμα Χημικών Μηχανικών
Πολυτεχνική Σχολή
Πανεπιστήμιο Πατρών

Διδάσκων:	Μπαλής Νικόλαος
Διάρκεια Εξέτασης:	2 ώρες
Ημερομηνία Εξέτασης:	Τετάρτη 15 Ιουλίου 2020
Ονοματεπώνυμο:	
Εξάμηνο:	
ΑΜ:	

Θέμα 1



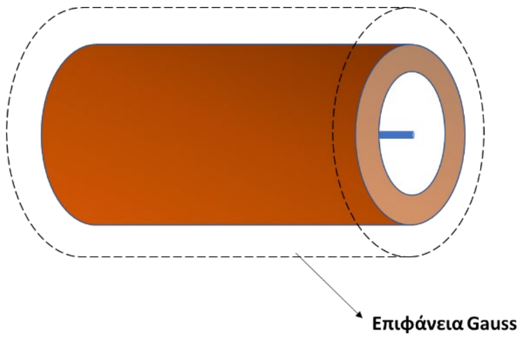
Θεωρούμε έναν πολύ λεπτό συμπαγή κύλινδρο μήκους L ο οποίος έχει ομοιόμορφο φορτίο +Q. Σε δεύτερο χρόνο τοποθετούμε εξωτερικά του έναν αφόρτιστο μεταλλικό σωλήνα μήκους επίσης L, με εσωτερική ακτίνα R_1, και εξωτερική R_2, όπως βλέπουμε στο σχήμα. Περιγράψτε την κατανομή των φορτίων στον μεταλλικό σωλήνα. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο εξωτερικό του συστήματος κύλινδρος-σωλήνας.

(Μονάδες 3)

Λύση:

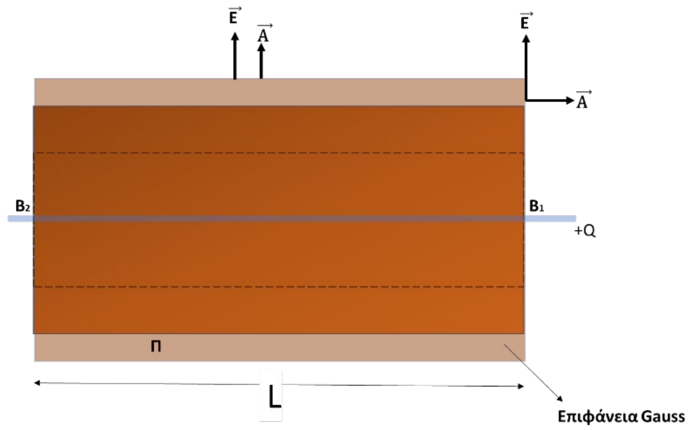
Εξ’ επαγωγής στην εσωτερική επιφάνεια του σωλήνα θα «εμφανιστεί» φορτίο -Q, ίσο και αντίθετο με το φορτίο του κυλίνδρου, ενώ στην εξωτερική του επιφάνεια θα «εμφανιστεί» φορτίο +Q. Η κατανομή των φορτίων είναι επιφανειακή. Στο εσωτερικό του μεταλλικού σωλήνα (αγωγός) το φορτίο είναι μηδέν.

Εκμεταλλευόμενοι την κυλινδρική συμμετρία του προβλήματος για τον υπολογισμό των ηλεκτρικών πεδίων θα αξιοποιήσουμε τον ν. Gauss και θα επιλέξουμε μία κυλινδρική γκαουσιανή επιφάνεια τοποθετημένη με τον άξονά της στον κοινό άξονα του συστήματος κυλίνδρου-σωλήνα. Η ακτίνα της γκαουσιανης αυτής επιφάνειας είναι r>R_2.

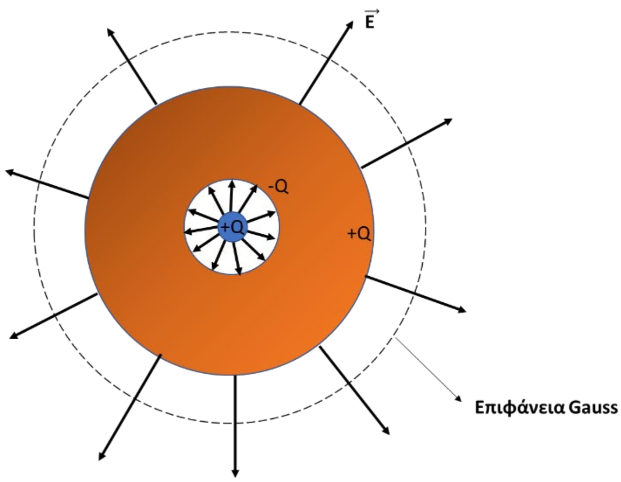


Κατά τα γνωστά, το ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται έχει μια ακτινική κατεύθυνση προς τα έξω όπως φαίνεται στα σχήματα που ακολουθούν, επομένως διαπερνά κάθετα σε κάθε σημείο την πλευρική επιφάνεια (Π) του γκαουσιανού κυλίνδρου ενώ δεν διέρχεται σε κανένα σημείο από τις βάσεις (Β1 και Β2) αυτού.

Πλαϊνή όψη



Κάτοψη



Εφαρμόζοντας το ν. Gauss έχω:

$$\int \boldsymbol{E} d\boldsymbol{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

ο οποίος σε δεύτερο χρόνο μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\int_{B_1} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{A} + \int_{B_2} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{A} + \int_{\Pi} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

όπου βέβαια τα ολοκληρώματα που αντιστοιχούν στις δυο βάσεις του κυλίνδρου μηδενίζονται καθώς μηδενίζονται και τα αντίστοιχα εσωτερικά γινόμενα.

Τελικά δεν έχω παρά να κάνω τις πράξεις:

$$E \cdot 2\pi r \cdot L = \frac{Q}{\varepsilon_0} \to E = \frac{Q}{2\pi r L\, \varepsilon_0}$$

Θέμα 2

Σε κάποια περιοχή του χώρου, οι κυλινδρικές συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου είναι ίσες με:

$$E_\rho = \frac{5c\rho^4}{R^5} \sin(5\varphi)$$
$$E_\varphi = \frac{5c\rho^4}{R^5} cos(\,5\varphi)$$
$$E_z = 0$$

όπου c είναι μια σταθερά σε V και η R μια άλλη σταθερά σε m. Να βρεθεί το αντίστοιχο ηλεκτρικό δυναμικό σε αυτό το χώρο εάν γνωρίζουμε ότι μηδενίζεται σε ένα σημείο στον άξονα y που απέχει απόσταση R από την αρχή των συντεταγμένων.

(Μονάδες 3)

Λύση:

Αφού E_z=0 τότε $\partial V/\partial z = 0$ ου σημαίνει ότι το V δεν εξαρτάται από το z. Από τη σχέση

$$E_\rho = -\, {}^{\partial V}\!/_{\partial \rho}$$

με ολοκλήρωση ως προς ρ παίρνουμε:

$$V = -\frac{c\rho^5}{R^5} \sin(5\varphi) + \beta(\varphi)$$

Από την φ-συνιστώσα του πεδίου παίρνουμε

$$E_{\varphi} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi} \rightarrow \frac{5c\rho^4}{R^5}\cos{(5\varphi)} = \frac{5c\rho^4}{R^5}\cos{(5\varphi)} - \frac{1}{\rho}\frac{d\beta}{d\varphi}$$

Επομένως

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = 0$$

Και άρα η β είναι μια αριθμητική σταθερά και όχι μια συνάρτηση του φ.

Έτσι

$$V = -\frac{c\rho^5}{R^5}\sin(5\varphi) + \beta$$

Για να βρούμε τη β χρησιμοποιούμε τη συνοριακή συνθήκη V=0 σε σημείο του άξονα y που απέχει R από την αρχή των αξόνων. Στις πολικές συντεταγμένες ο άξονας y αντιστοιχεί σε z=0 και φ=π/2 ενώ το σημείο αυτό βρίσκεται σε ρ=R και έτσι:

$$0 = -c \times 1^5 \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \beta$$

Οπότε

$$\beta = c$$

και

$$V = -c\frac{\rho^5}{R^5}\sin(5\varphi) + c$$

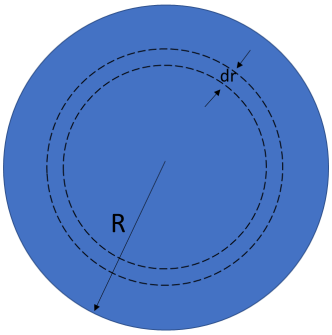
Θέμα 3

Ευθύγραμμο σύρμα μεγάλου μήκους και κυκλικής διατομής με ακτίνα R, διαρρέεται από ρεύμα έντασης I. Η πυκνότητα ρεύματος J δίνεται από την έκφραση J=αr, όπου α σταθερά.

α) Κάνοντας χρήση του γεγονότος ότι η ολοκλήρωση του J σε όλη την έκταση της διατομής του σύρματος δίνει το I, υπολογίστε το α συναρτήσει των I, R.
β) Με τη βοήθεια του ν. Ampere να εκφράσετε το B στις περιοχές i) r<R και ii) r>R συναρτήσει του I.

(Μονάδες 4)

Λύση:



α) Η πυκνότητα ρεύματος δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται συναρτήσει την απόσταση από το κέντρο του αγωγού με βάση την σχέση J=αr. Επιλέγω δακτύλιο απειροστού πάχους dr και έχω:

$$dI = J \cdot dA \rightarrow dI = a \cdot r(2\pi r \cdot dr)$$

Άρα $I = \int dI = \int_0^R 2\pi\alpha r^2 dr = 2\pi\alpha \frac{1}{3} R^3 \rightarrow a = \frac{3I}{2\pi R^3}$

β) i) Εφαρμόζω τον ν. Ampere σε ένα κύκλο ακτίνας r<R

$$\oint B \cdot dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot I_{enc} \rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot I_{enc}}{2\pi r}$$

Στην περίπτωση αυτή βρισκόμαστε στο εσωτερικό του σύρματος. Ο κύκλος πάνω στον οποίο θα πάρω το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα αγκαλιάζει ένα τμήμα του αγωγού ακτίνας r. Για να αποφύγω τη σύγχυση ονομάζω r' τη μεταβλητή ολοκλήρωσης:

$$I_{enc} = \int dI = 2\pi\alpha \int_0^r r'^2 dr' = \frac{2\pi\alpha r^3}{3} = \frac{2\pi}{3} \frac{3I}{2\pi R^3} r^3 = \frac{I\, r^3}{R^3}$$

Άρα

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I_{enc}}{2\pi r} \rightarrow B = \frac{\mu_0 I\, r^2}{R^3}$$

ii) Εφαρμόζω τον ν. Ampere σε ένα κύκλο ακτίνας r>R

$$I_{enc} = I \rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r}$$