Εξέταση στη Φυσική ΙΙ

Τμήμα Χημικών Μηχανικών
Πολυτεχνική Σχολή
Πανεπιστήμιο Πατρών

Διδάσκων:	Μπαλής Νικόλαος
Διάρκεια Εξέτασης:	2 ώρες
Ημερομηνία Εξέτασης:	Τετάρτη 15 Ιουλίου 2020
Ονοματεπώνυμο:	
Εξάμηνο:	
ΑΜ:	

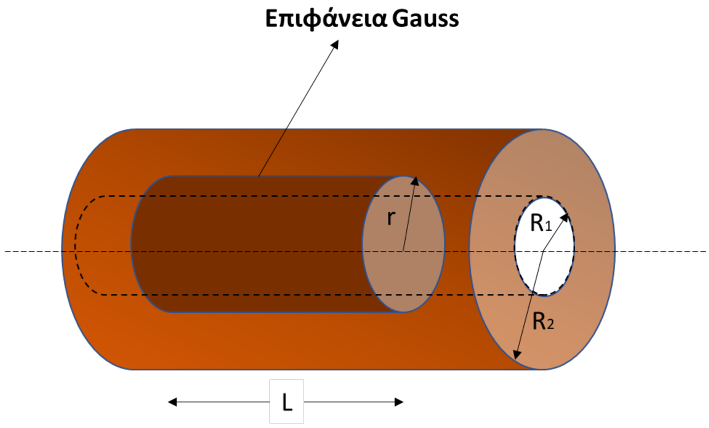
Θέμα 1

Μονωτικός σωλήνας απείρου μήκους, εσωτερικής ακτίνας R_1 και εξωτερικής R_2, είναι φορτισμένος ηλεκτρικά με ομοιόμορφη χωρική κατανομή φορτίου ίση με ρ. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ στην περιοχή μέσα στο υλικό του σωλήνα εάν γνωρίζετε ότι το $\vec{E}$ κατευθύνεται από το κέντρο του σωλήνα ακτινικά προς τα έξω.

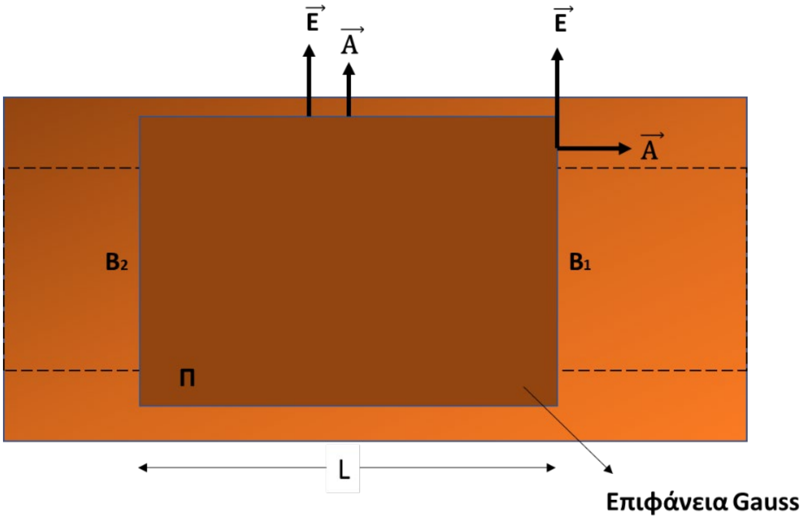
(Μονάδες 3)

Λύση:

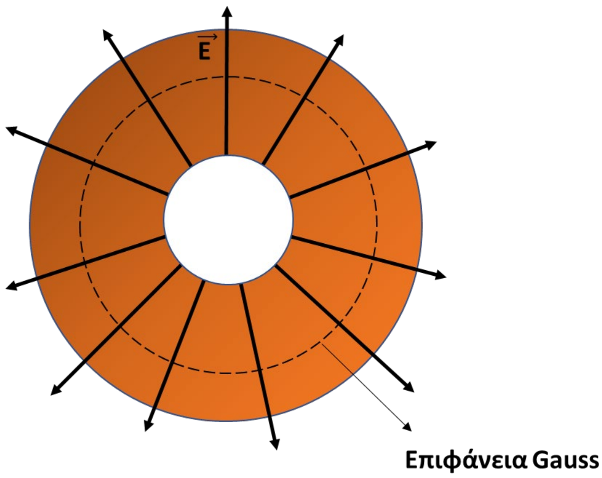
Θεωρούμε κυλινδρική επιφάνεια Gauss ακτίνας r και μήκους L όπως στο διπλανό σχήμα. Το ηλεκτρικό πεδίο κατευθύνεται ακτινικά προς τα έξω με αποτέλεσμα η πλάγια όψη και η κάτοψη του συστήματος να έχουν την παρακάτω μορφή:



Πλάγια όψη



Κάτοψη



Το ηλεκτρικό πεδίο λοιπόν διαπερνά κάθετα σε κάθε σημείο την πλευρική επιφάνεια (Π) του γκαουσιανού κυλίνδρου ενώ δεν διέρχεται σε κανένα σημείο από τις βάσεις (Β1 και Β2) αυτού.

Αξιοποιώ όσα ξέρω για τη χρησιμότητα του ν. Gauss σε τέτοιες γεωμετρίες:

$$\int \boldsymbol{E} d\boldsymbol{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

ο οποίος σε δεύτερο χρόνο μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\int_{B_1} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{A} + \int_{B_2} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{A} + \int_{\Pi} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

όπου βέβαια τα ολοκληρώματα που αντιστοιχούν στις δυο βάσεις του κυλίνδρου μηδενίζονται καθώς μηδενίζονται και τα αντίστοιχα εσωτερικά γινόμενα.

Τελικά δεν έχω παρά να κάνω τις πράξεις:

$$E \cdot 2\pi r \cdot L = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \ (1)$$

Επειδή $\rho = \frac{Q}{V} \rightarrow \rho = \frac{Q_{enc}}{V} \rightarrow Q_{enc} = \rho \cdot \pi L(r^2 - R_1^2)$ (2)

Τελικά από (1) και (2):

$$E \cdot 2\pi r \cdot L = \frac{\rho \cdot \pi L(r^2 - R_1^2)}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\rho \cdot (r^2 - R_1^2)}{2r\ \varepsilon_0}$$

Θέμα 2

Σε κάποια περιοχή του χώρου, οι σφαιρικές συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου είναι ίσες με:

$$E_r = \frac{2bcos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = \frac{bsin\theta}{r^3}$$

$$E_\varphi = 0$$

όπου b είναι μια σταθερά σε $V \cdot m^2$. Να βρεθεί το δυναμικό σε αυτό το χώρο εάν γνωρίζουμε ότι μηδενίζεται σε ένα σημείο στον άξονα z που απέχει απόσταση R από την αρχή των συντεταγμένων.

Λύση:

Αφού E_φ = 0 τότε $\partial V/\partial \varphi$ = 0 που σημαίνει ότι το V δεν εξαρτάται από το φ. Από την

E_r = -$\partial V/\partial r$ με ολοκλήρωση ως προς r παίρνουμε:

$$V = \frac{bcos\theta}{r^2} + u(\theta)$$

Από την θ-συνιστώσα του πεδίου παίρνουμε:

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\vartheta V}{\vartheta \theta} \rightarrow \frac{bsin\theta}{r^2} = \frac{bsin\theta}{r^2} - \frac{du}{d\theta}$$

Επομένως

$$\frac{du}{d\theta} = 0$$

και άρα η u είναι μια αριθμητική σταθερά και όχι μια συνάρτηση του θ. Έτσι

$$V = \frac{bcos\theta}{r^2} + u$$

Για να βρούμε τη u χρησιμοποιούμε την συνοριακή συνθήκη ότι V=0 σε ένα σημείο στον άξονα z που απέχει απόσταση R από την αρχή των συντεταγμένων. Στις σφαιρικές συντεταγμένες, ο άξονας z αντιστοιχεί σε θ=0 και το σημείο αυτό βρίσκεται σε r=R και έτσι

$$0 = \frac{bcos0}{R^2} + u$$

Οπότε

$$u = -\frac{b}{R^2}$$

και τελικά:

$$V = \frac{bcos\theta}{r^2} - \frac{b}{R^2}$$

Θέμα 3

Με τη βοήθεια του νόμου του Ampere να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο παντού στο χώρο ενός σωλήνα απείρου μήκους με εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική ακτίνα R_2, ο οποίος διαρρέεται από ομοιόμορφη πυκνότητα ρεύματος J (ρεύμα ανά μονάδα επιφάνειας κάθετη στη ροή του ρεύματος) κατά μήκος του άξονά του.

(4 μονάδες)

Λύση:

Οι δυναμικές γραμμές του **B** στην προκειμένη περίπτωση είναι ομόκεντροι κύκλοι με κοινό κέντρο επάνω στον άξονα του αγωγού. Το **B** είναι εφαπτόμενο σε κάθε τέτοιο κύκλο με φορά που δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.
Για να εφαρμόσουμε τον ν. Ampere επιλέγουμε μια κλειστή καμπύλη, η οποία ουσιαστικά ταυτίζεται με τη δυναμική γραμμή. Έτσι το διάνυσμα d**l** το οποίο αντιστοιχεί στη γραμμή που τρέχει πάνω στον νοητό κύκλο είναι κάθε φορά παράλληλο με το **B** ώστε τελικά το εσωτερικό τους γινόμενο να είναι ίσο με το γινόμενο των μέτρων τους. Τελικά

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint B \cdot dl = \mu_0 . I_{enc} \quad (1)$$

Στο εξωτερικό του αγωγού, δηλαδή στην περιοχή με κάθε $r>R_2$ το περικλειόμενο ρεύμα προκύπτει ως εξής:

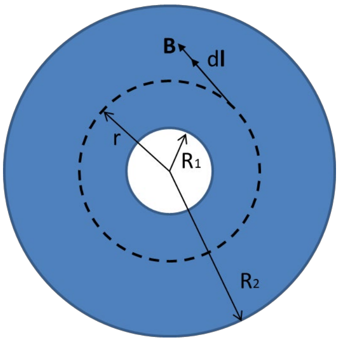
$$J = \frac{I_{enc}}{A} \rightarrow I_{enc} = \pi(R_2^2 - R_1^2) \cdot J \quad (2)$$

Όπου με Α συμβολίσαμε το εμβαδόν της διατομής τους αγωγού από την οποία διέρχεται το περικλειόμενο ρεύμα. Αν θεωρήσουμε τα φορτία ομοιόμορφα κατανεμημένα πάνω στη διατομή, αυτό σημαίνει ότι η συνεισφορά τους στη δημιουργία Β σε δεδομένη απόσταση από τον αγωγό είναι σταθερή, άρα το μέτρο του Β είναι επίσης σταθερό και έτσι μπορεί να βγει έξω από το ολοκλήρωμα.

Τελικά:

$$(1), (2) \rightarrow \oint B \cdot dl = \mu_0 . I_{enc} \rightarrow B\oint dl = \mu_0 . \pi(R_2^2 - R_1^2) \cdot J$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 . \pi(R_2^2 - R_1^2) \cdot J \rightarrow B = \frac{\mu_0 . (R_2^2 - R_1^2) \cdot J}{2r}$$



Σε περιοχές με $R_1<r<R_2$ το εμβαδόν της διατομής που περικλείει μια δυναμική γραμμή-καμπύλη εφαρμογής ν. Ampere είναι $A= \pi(r^2 - R_1^2)$, οπότε κατ' αναλογία με όσα υπολογίσαμε νωρίτερα θα ισχύει:

$$B = \frac{\mu_0 . (r^2 - R_1^2) \cdot J}{2r}$$

Στο εσωτερικό της κοιλότητας είναι **B**=0 καθώς δεν περικλείεται κάποιο ρεύμα