ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ Ι

ΜΗΧΑΝΙΚΗ – ΚΥΜΑΤΙΚΗ

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ – Π. ΠΕΤΡΙΔΗΣ

1. ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΗ

Ορισμός της στιγμιαίας ταχύτητας

1.1 Ένα υλικό σημείο κινείται επάνω σε μια ευθεία έτσι ώστε η απομάκρυνση του να δίνεται από την εξίσωση $x(t) = At^3 - Bt^2$ όπου $A = 0.2\, m/s^3$ και $B = 0.6\, m/s^2$ αντίστοιχα. Το κινητό ακινητοποιείται στιγμιαία σε χρόνο $t_1 > 0$. Να βρεθεί η απομάκρυνσή του κινητού σε χρόνο $\Delta t = 0.2\, s$ μετά από αυτή τη χρονική στιγμή της στιγμιαίας ακινητοποίησης.

<u>Απάντηση</u>: $-0.7744\, m$

<u>Λύση</u>:

Το υλικό σημείο ακινητοποιείται όταν η στιγμιαία ταχύτητά του μηδενίζεται. Η ταχύτητα είναι εξ' ορισμού ίση με την χρονική παράγωγο της απομάκρυνσης και έτσι:

$$x'(t) = 0 => 3At^2 - 2Bt = 0 => 3At - 2B = 0 => t_1 = \frac{2B}{3A} = \frac{2 \times 0.6}{3 \times 0.2} = 2\, s$$

Θέλουμε την απομάκρυνση μετά από χρόνο $\Delta t = 0.2\, s$ σε σχέση με την παραπάνω χρονική στιγμή και άρα σε χρόνο

$$t_2 = t_1 + \Delta t = 2 + 0.2 = 2.2\, s$$

Από την δεδομένη εξίσωση, η απομάκρυνση κατά αυτή τη χρονική στιγμή είναι ίση με:

$$x(t_2) = At_2^3 - Bt_2^2 = 0.2 \times (2.2)^3 - 0.6 \times (2.2)^2 = -0.7744\, m$$

1.2 Ένα υλικό σημείο κινείται έτσι ώστε η απομάκρυνσή του συναρτήσει του χρόνου να δίνεται από την έκφραση $x(t) = Ae^{-at^2}$ όπου $A = 2\, m$ και $a = 0.4\, s^{-2}$. Να βρεθεί η αντίστοιχη έκφραση της στιγμιαίας ταχύτητας του σημείου

<u>Λύση</u>:

Από την Εξ. 1.9 με παραγώγιση προκύπτει το εξής

$$v(t) = x(t)' = -2atAe^{-ax^2} = -Bte^{-ax^2}$$

όπου $B = 2aA = 0.8\, m/s^2$

1.3 Ένα υλικό σημείο κινείται έτσι ώστε η απομάκρυνσή του συναρτήσει του χρόνου να δίνεται από την έκφραση $x(t) = (A + Bt^2)ln(t/t_0)$ όπου $A = 3\, m$, $B = 0.2\, s^{-2}$ και $t_0 = 2\, s$. Να βρεθεί η αντίστοιχη έκφραση της στιγμιαίας ταχύτητας.

<u>Λύση</u>:

Από την Εξ. 1.9 με παραγώγιση προκύπτει το εξής

$$v(t) = x(t)' = 2Btln\left(\frac{t}{t_0}\right) + (A + Bt^2)\frac{t_0}{t}$$

1.4 Ένας υλικό σημείο κινείται έτσι ώστε η απομάκρυνσή του συναρτήσει του χρόνου να δίνεται από την έκφραση $x(t) = Asin(\omega t + \varphi) + x_0$ όπου $A = 3\ m, \omega = \pi\ rad/s, \varphi = \pi/4$ και $x_0 = 1.2\ m$. Να βρεθεί η αντίστοιχη έκφραση της στιγμιαίας ταχύτητας του ταλαντωτή.

Λύση:

Από τις Εξισώσεις 1.19 προκύπτει ότι η κίνηση είναι ενός αρμονικού ταλαντωτή (μετατοπισμένου κατά x_0 επάνω στον άξονα x). Από την Εξ. 1.9 με παραγώγιση προκύπτει το εξής

$$v(t) = x(t)' = A\omega cos(\omega t + \varphi) = v_0 cos(\pi t + \pi/4)$$

όπου $v_0 = \omega A = 3\pi\ m/s$

1.5 Ένα κινητό διαγράφει ευθύγραμμη τροχιά υπό την επίδραση κάποιας μεταβλητής δύναμης που το αναγκάζει να κινείται έτσι ώστε η απομάκρυνσή του ανά πάσα στιγμή να δίνεται από την $x(t) = at^4 - bt^2$ όπου $a = 0.2\ m/s^4$ και $b = 0.6\ m/s^2$ αντίστοιχα. Να βρεθεί σε ποιες χρονικές στιγμές το κινητό ακινητοποιείται στιγμιαία.

Απάντηση: $0\ s$, $\pm 1.225\ s$

Λύση:

Το υλικό σημείο ακινητοποιείται όταν η στιγμιαία ταχύτητά του μηδενίζεται. Η ταχύτητα είναι εξ' ορισμού ίση με την χρονική παράγωγο της απομάκρυνσης και έτσι:

$$x'(t) = 0 => 4at^3 - 2bt = 0 => 4at^2 - 2b = 0 => {t_1}^2 = \frac{b}{2a} = \frac{0.6}{2 \times 0.2}$$

οπότε είτε $t = 0$ είτε $4at^2 - 2b = 0$ που οδηγεί στην

$$t^2 = \frac{b}{2a} = \frac{0.6}{2 \times 0.2} = \pm 1.225\ s$$

1.6 Ένα κινητό διαγράφει ευθύγραμμη τροχιά υπό την επίδραση κάποιας μεταβλητής δύναμης που το αναγκάζει να κινείται έτσι ώστε η στιγμιαία του ταχύτητα ανά πάσα στιγμή να δίνεται από την $v(t) = at^2 - bt$ όπου $a = 0.3\ m/s^3$ και $b = 0.4\ m/s^2$. Εάν την χρονική στιγμή $t = -1\ s$ η απομάκρυνση του κινητού είναι ίση με $x = 1/5\ m$, να βρεθεί η απομάκρυνσή του την χρονική στιγμή $t = 1\ s$.

Απάντηση: $0.4\ m$

Λύση:

Για να βρούμε την απομάκρυνση, ολοκληρώνουμε την ταχύτητα

$$x(t) = \int v(t)dt = a\frac{t^3}{3} - b\frac{t^2}{2} + c$$

όπου c είναι η σταθερά ολοκλήρωσης την οποία βρίσκουμε εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη $x(-1) = 1/5\ m$:

$$x(-1) = \frac{1}{5} => 0.3\frac{-1}{3} - 0.4\frac{1}{2} + c = 0.2 => -0.1 - 0.2 + c = 0.2 => c = 0.5\ m$$

Επομένως

$$x(t) = a\frac{t^3}{3} - b\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}$$

Την χρονική στιγμή $t = 1\ s$:

$$x(1) = 0.3\frac{1}{3} - 0.4\frac{1}{2} + 0.5 = 0.1 - 0.2 + 0.5 = 0.4\ m$$

1.7 Ένας φοιτητής κατέγραψε τα εξής δεδομένα για την κίνηση ενός κινητού. Να βρεθεί η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού την χρονική στιγμή $t = 2.3\ s$.

$t(s)$	$x(m)$
2.0	9.49
2.1	9.13
2.2	8.70
2.3	7.50
2.4	7.23
2.5	6.20
2.6	5.42
2.7	4.91
2.8	3.99
2.9	2.64
3.0	1.83
3.1	1.21
3.2	0.22

Απάντηση: $-\ 12\ m/s$

Λύση:

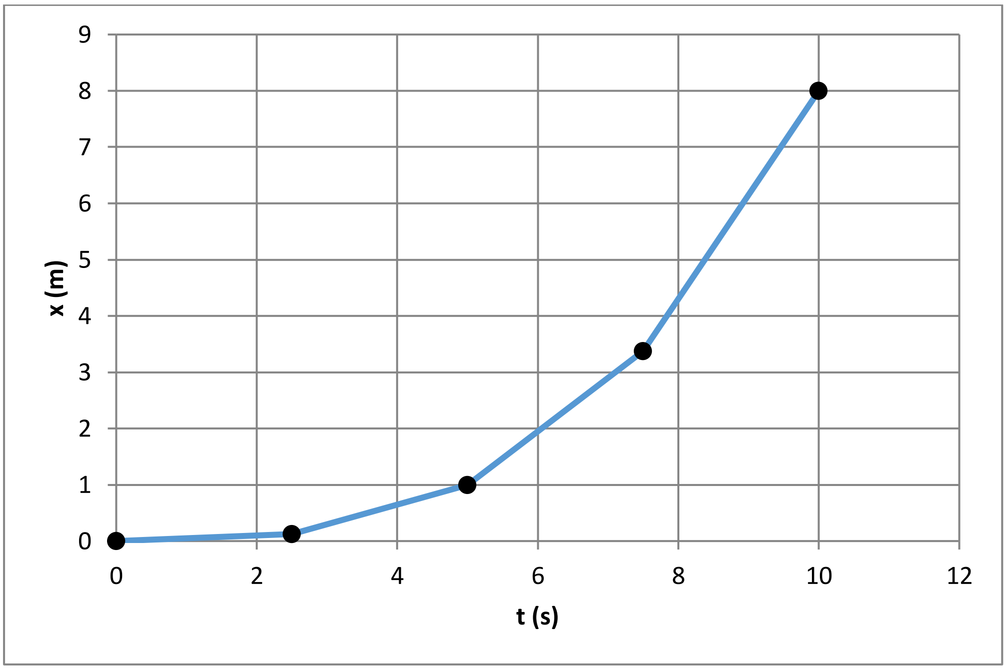
Στο παρόν πρόβλημα δεν μας δίνεται μια συνάρτηση $x(t)$ και επομένως δεν μπορούμε να παραγωγίσουμε αλλά αντ' αυτού έχουμε μια σειρά από διακριτές τιμές. Κρίνοντας από το βήμα του χρόνου στα παραπάνω δεδομένα, το ρολόι του φοιτητή μετρούσε κάθε $0.1\ s$ και έτσι το μικρότερο $\Delta t \to 0$ που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι προσεγγιστικά το $0.1\ s$.

Έτσι διαλέγουμε τις τιμές $t = 2.3\ s$ και $x = 7.5\ m$ από την αντίστοιχη γραμμή του πίνακα και τις τιμές $t_0 = 2.2\ s$, $x = 8.7\ m$ από την προηγούμενη γραμμή και χρησιμοποιούμε προσεγγιστικά την Εξ. 1.2 αντί της Εξ. 1.4 για να υπολογίσουμε την στιγμιαία ταχύτητα ως εξής:

$$v \approx \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{7.5 - 8.7}{2.3 - 2.2} = -\,12\ m/s$$

Γραφική ερμηνεία της ταχύτητας

1.8 Στο παρακάτω σχήμα τα κυκλικά σημεία απεικονίζουν κάποιες μετρήσεις $x - t$ που πήρε ένας φοιτητής για ένα κινητό. Τα σημεία ενώνονται μεταξύ τους με ευθύγραμμα τμήματα. Από την κλίση αυτών των τμημάτων να υπολογισθεί προσεγγιστικά η ταχύτητα του κινητού στους χρόνους των 4 τελευταίων σημείων.



Απάντηση: $0.048, 0.352, 0.96$ και $1.84\ m/s$

Λύση:

Από τη γραφική παράσταση παίρνουμε προσεγγιστικά τα σημεία

$(t, x) = (0{,}0), (2.5{,}0.12), (5.0{,}1.0), (7.5{,}3.4), (10.0\ s, 8.0\ m)$

Από αυτά τα σημεία και τον τύπο της κλίσης

$$\lambda = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

όπου (t, x) ένα από τα παραπάνω σημεία και (t_0, x_0) το προηγούμενό του, παίρνουμε για την κλίση των τελευταίων τεσσάρων σημείων

$\lambda = 0.048, 0.352, 0.96$ και $1.84\ m/s$

1.9 Στην παραπάνω άσκηση να βρεθούν οι ακριβείς τιμές της ταχύτητας στα πειραματικά σημεία εάν γνωρίζουμε ότι αυτά ανήκουν σε μια καμπύλη $x(t)$ η οποία είναι ανάλογη του t^3.

Απάντηση: $0, 0.15, 0.60, 1.35$ και $2.40\ m/s$

Λύση:

Αφού η καμπύλη περνάει από το $(0{,}0)$ τότε θα είναι της μορφής $x = at^3$. Από το τελευταίο σημείο $(10{,}8)$ έχουμε

$$8 = a \times 10^3 \;=>\; a = 0.008\ m/s^3$$

Επομένως

$$x(t) = 0.008t^3$$

και άρα η στιγμιαία ταχύτητα είναι ίση με

$$v(t) = x(t)' = 3 \times 0.008t^2 = 0.024t^2$$

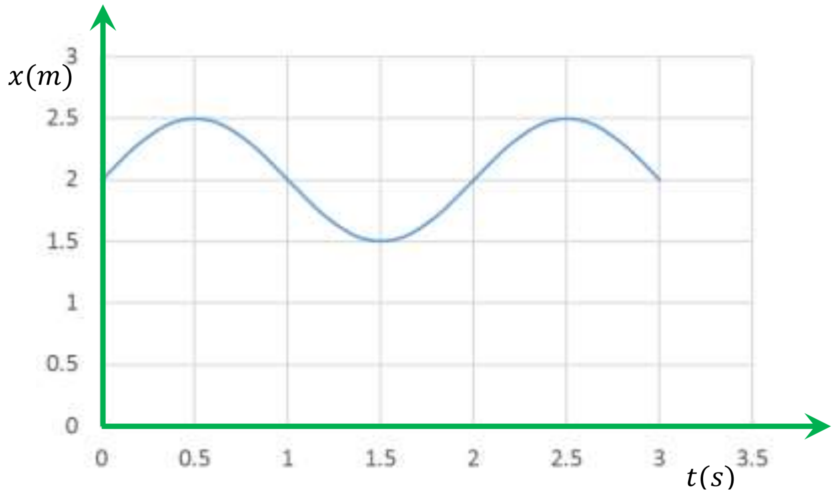
Στα πειραματικά σημεία παίρνουμε:

$v = 0, 0.15, 0.60, 1.35$ και $2.40\ m/s$

1.10 Ένα υλικό σημείο κινείται επάνω σε μια ευθεία έτσι ώστε η απομάκρυνση του να δίνεται από την $x(t) = A + Bsin(\omega t)$ όπου $A = 2\ m$, $B = 0.5\ m$ και $\omega = \pi\ rad/s$. (α) Να γίνει η γραφική παράσταση $x - t$ για χρόνους από 0 έως $3\ s$, (β) Από τη γραφική παράσταση να βρεθούν τα χρονικά διαστήματα όπου η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι θετική, αρνητική, μηδέν και μέγιστη (κατ' απόλυτη τιμή).

Λύση:

(α) Η γραφική παράσταση έχει ως εξής:



(β) Η κλίση της γραφικής παράστασης είναι ίση με την ταχύτητα. Φέρνοντας την εφαπτομένη σε διάφορα σημεία παρατηρούμε τα εξής: Η κλίση (και άρα και η ταχύτητα) στα σημεία Α, Γ και Ε είναι μηδέν. Ενδιάμεσα από αυτά τα σημεία η κλίση είναι εναλλακτικά αρνητική και θετική. Π.χ. στο σημείο Β είναι αρνητική ενώ στο σημείο Δ είναι θετική.

Η έννοια του Διαφορικού

1.11 Να βρεθεί το διαφορικό των παρακάτω συναρτήσεων (α) $x(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ και (β) $x(t) = \alpha e^{-\beta t}$ όπου α, β και γ είναι σταθερές με κατάλληλες μονάδες ώστε τα x να είναι σε m.

<u>Λύση</u>:

(α) Από την Εξ. 1.9 έχουμε

$$dx = x(t)'dt = (2\alpha t + \beta)dt$$

(β) Ομοίως

$$dx = x(t)'dt = -\alpha\beta e^{-\beta t}\, dt$$

1.12 Η στιγμιαία ταχύτητα και η απομάκρυνση ενός κινητού στο $t = 5.2\ s$ είναι αντίστοιχα $v = 12.5\ m/s$ και $x = 3.0\ m$. (α) Να βρεθεί προσεγγιστικά η απομάκρυνση του κινητού μετά από χρόνο $3\ ms$ με τη χρήση της μεθόδου του διαφορικού. (β) Πως αλλάζει το παραπάνω αποτέλεσμα εάν η στιγμιαία ταχύτητα είναι μηδέν; Να ερμηνευτεί το αποτέλεσμα.

Λύση:

(α) Από την Εξ. 1.9 έχουμε

$$dx = vdt \approx 12.5 \times 0.003 = 0.0375\ m$$

(β) Εάν η στιγμιαία ταχύτητα είναι μηδέν τότε το παραπάνω αποτέλεσμα είναι $dx = 0$ δηλαδή η στιγμιαία μετατόπιση του κινητού είναι μηδέν. Αυτό αναμένεται αφού το κινητό δεν έχει ταχύτητα. Θα παραμείνει το κινητό για πάντα ακίνητο; Αυτό δεν μπορούμε να το απαντήσουμε εάν δεν γνωρίζουμε την τιμή της επιτάχυνσης a. Εάν $a = 0$ τότε το σώμα βρίσκεται σε πλήρη ακινησία αφού τότε η μεταβολή της ταχύτητας είναι $dv = adt = 0$.

Ορισμός της στιγμιαίας επιτάχυνσης

1.13 Ένα υλικό σημείο κινείται στη μια διάσταση έτσι ώστε η απομάκρυνσή του να περιγράφεται από την εξίσωση $x(t) = x_m e^{-bt} cos(\omega t)$ όπου $x_m = 2\ m$, $b = 0.5\ s^{-1}$ και $\omega = 2\pi\ rad/s$ αντίστοιχα. (α) Να βρεθεί η στιγμιαία ταχύτητα και επιτάχυνση του κινητού. (β) Να σχεδιασθεί η γραφική παράσταση $x - t$ για χρόνους από 0 έως 5 s. (γ) Από την κλίση της γραφικής παράστασης να βρεθεί το πρόσημο της ταχύτητας του κινητού στα 3 πρώτα μηδενικά της γραφικής παράστασης. (δ) Να επαληθευτεί το προηγούμενο αποτέλεσμα από την έκφραση της στιγμιαίας ταχύτητας που βρήκατε στο β παραπάνω. (ε) Να σχολιασθεί το είδος της κίνησης για $t \to \infty$.

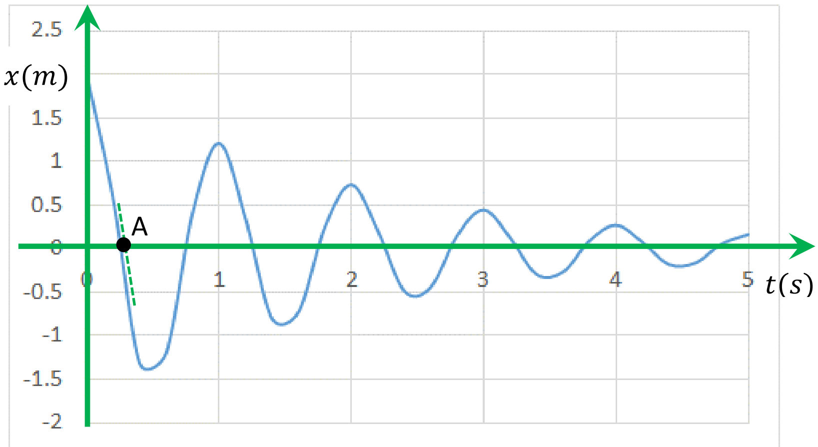
Λύση:

(α) Παραγωγίζοντας την δεδομένη απομάκρυνση δυο φορές οδηγεί στα αποτελέσματα:

$$v(t) = x(t)' = -x_m e^{-bt}[bcos(\omega t) + \omega sin(\omega t)]$$

$$a(t) = v(t)' = x_m e^{-bt}[b^2 cos(\omega t) + 2b\omega sin(\omega t) - \omega^2 cos(\omega t)]$$

(β) Η γραφική παράσταση έχει ως εξής. Είναι ένα συνδυασμός της συνάρτησης του συνημιτόνου με μέγιστα και ελάχιστα και της φθίνουσας εκθετικής συνάρτησης:



(γ) Όπως φαίνεται στη γραφική παράσταση, η κλίση της σε διαδοχικά μηδενικά εναλλάσσεται με αρνητική-θετική τιμή. Π.χ. στο πρώτο μηδενικό στο σημείο Α η εφαπτομένη είναι προς τα κάτω και άρα η ταχύτητα εκεί είναι αρνητική.

(δ) Τα μηδενικά της $x(t)$ είναι εκεί που η συνάρτηση συνημιτόνου γίνεται μηδέν, δηλαδή εκεί όπου $cos(\omega t) = cos(2\pi t) = 0$ που συμβαίνει στα $t = 1/4, 3/4, 5/4, 7/4 \dots s$ Τα αντίστοιχα ημίτονα εκεί είναι ίσα με $sin(2\pi t) = \pm 1$. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω έκφραση που βρήκαμε για την ταχύτητα έχουμε στα τρία πρώτα μηδενικά:

$$v(1/4) = -x_m e^{-bt}[0 + \omega \times 1] = -\omega x_m e^{-bt} < 0$$

$$v(3/4) = -x_m e^{-bt}[0 + \omega \times (-1)] = \omega x_m e^{-bt} > 0$$

$$v(5/4) = -x_m e^{-bt}[0 + \omega \times 1] = -\omega x_m e^{-bt} < 0$$

σε πλήρη συμφωνία με το υποερώτημα γ παραπάνω.

(ε) Στο $t \to \infty$ ο εκθετικός όρος e^{-bt} μηδενίζεται και έτσι $v \to 0$ και $a \to 0$ και επομένως το κινητό έρχεται σε πλήρη ακινησία.

1.14 Ένα υλικό σημείο κινείται στη μια διάσταση έτσι ώστε η επιτάχυνσή του να περιγράφεται από την εξίσωση $a(t) = a_m e^{-bt}$ όπου $a_m = 2\, ms^{-2}$ και $b = 0.5\, s^{-1}$ αντίστοιχα. (α) Να βρεθεί η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού εάν η αρχική ταχύτητα στο $t = 0$ είναι μηδέν. (β) Να σχεδιασθούν ξεχωριστά οι γραφικές παραστάσεις $v - t$ και $a - t$. (γ) Να ερμηνευτεί η μορφή της γραφικής παράστασης $v - t$ με την βοήθεια της γραφικής παράστασης $a - t$. (δ) Να σχολιασθεί το είδος της κίνησης για $t \to \infty$.

<u>Λύση</u>:

(α) Ολοκληρώνοντας την δεδομένη επιτάχυνση $a(t) = 2e^{-t/2}$ οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$$v(t) = \int a(t) dt = 2\int e^{-t/2}\, dt = -4e^{-bt} + c$$

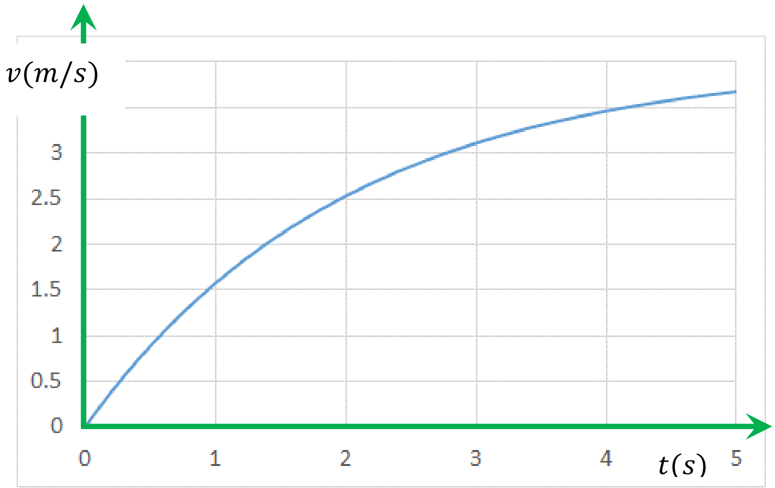
όπου c είναι η σταθερά ολοκλήρωσης την οποία βρίσκουμε εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη στο $t = 0$:

$$v(0) = 0 => -4e^0 + c = 0 => c = 4$$

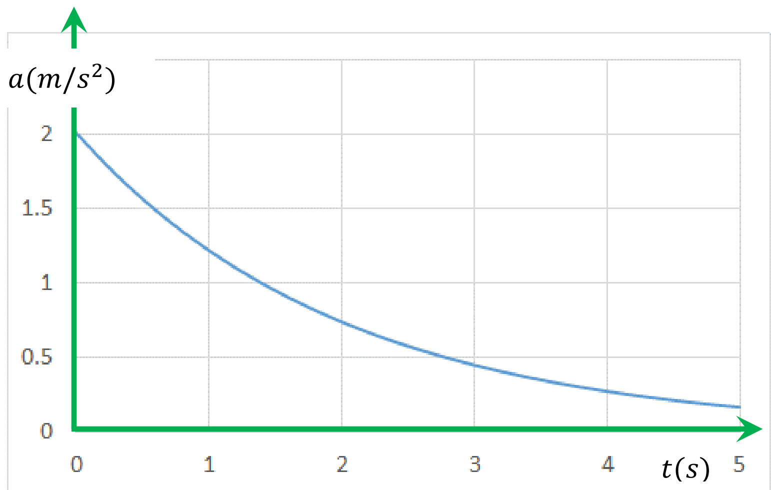
Έτσι

$$v(t) = -4e^{-t/2} + 4 = 4\left(1 - e^{-bt}\right)$$

(β) Οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις φαίνονται παρακάτω: Η πρώτη είναι εκθετική αύξηση. Στο $t = 0$ έχουμε $v(0) = 4(1 - e^0) = 0$ ενώ σε άπειρους χρόνους η $v(t)$ τείνει στην τιμή $4(1 - e^{-\infty}) = 4$



Αντίθετα η επιτάχυνση είναι εκθετική μείωση με $a(0) = 2e^0 = 2$ ενώ σε άπειρους χρόνους τείνει στην τιμή $2e^{-\infty} = 0$



(γ) Βλέπουμε στη δεύτερη γραφική παράσταση ότι η επιτάχυνση a είναι αρχικώς μεγάλη αλλά ελαττώνεται συνεχώς με τον χρόνο τείνοντας οριακά στην τιμή 0. Έτσι, παρόλο που το κινητό βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία (γραφική παράσταση $v - t$), λόγω της μη μηδενικής επιτάχυνσης αποκτάει ταχύτητα η οποία συνεχώς μεγαλώνει. Η αρχική μεταβολή της ταχύτητας είναι η μέγιστη αφού η κλίση της στο $t = 0$ είναι η μέγιστη. Αυτό συμφωνεί απόλυτα με την γραφική παράσταση $a - t$ εάν θυμηθούμε ότι η κλίση της καμπύλης $v(t)$ είναι ίση με a. Η ταχύτητα βέβαια δεν αυξάνεται επ' αόριστο αφού οριακά η επιτάχυνση μηδενίζεται και έτσι η ταχύτητα παραμένει σταθερή για $t \to \infty$. Αυτό εξηγεί γιατί η γραφική παράσταση $v - t$ πιάνει οριακή τιμή.

(δ) Όπως προαναφέρθηκε, στο $t \to \infty$ έχουμε $a = 0$ και v: σταθερό. Αυτό σημαίνει ότι η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή με μέτρο ταχύτητας που όπως είδαμε τείνει στην τιμή $4\, m/s$.

1.15 Σημειακό σώμα Α κινείται με σταθερή ταχύτητα $v = -5\, m/s$ για $t \leq 0$. Στο $t = 0$ και ενώ το κινητό βρίσκεται στο $x = 0$ εφαρμόζεται επιτάχυνση $a = 2\pi cos(c_1 t)$ όπου $c_1 = \pi\, rad/s$. Να βρεθεί η απομάκρυνση του Α την χρονική στιγμή $t = 2\, s$.

<u>Απάντηση</u>: $-10\, m$

<u>Λύση</u>:

Ολοκληρώνουμε την επιτάχυνση δυο φορές και εφαρμόζουμε τις αρχικές συνθήκες για να βρούμε την απομάκρυνση x του σώματος. Για $t > 0$ έχουμε

$$v(t) = \int a(t)dt = \int 2\pi cos(c_1 t)dt = \frac{2\pi}{c_1} sin(c_1 t) + c$$

όπου c η σταθερά ολοκλήρωσης, ενώ για $t \leq 0$ ισχύει $v = -5\, m/s$: σταθερό. Αντικαθιστώντας τα δεδομένα, έχουμε για $t > 0$ ότι

$$v(t) = 2sin(\pi t) + c$$

Για να είναι συνεχής η ταχύτητα στο $t = 0$ πρέπει

$$v(0) = -5 => 0 + c = -5 => c = -5$$

Ολοκληρώνουμε ακόμη μια φορά.

$$x(t) = \int v(t)dt = \int [2sin(\pi t) - 5]dt = -\frac{2}{\pi} cos(\pi t) - 5t + d$$

όπου d η σταθερά ολοκλήρωσης. Εφαρμόζουμε την αρχική συνθήκη

$$x(0) = 0 => -\frac{2}{\pi} + d = 0 => d = \frac{2}{\pi}$$

Έτσι

$$x(t) = -\frac{2}{\pi}[cos(\pi t) - 1] - 5t$$

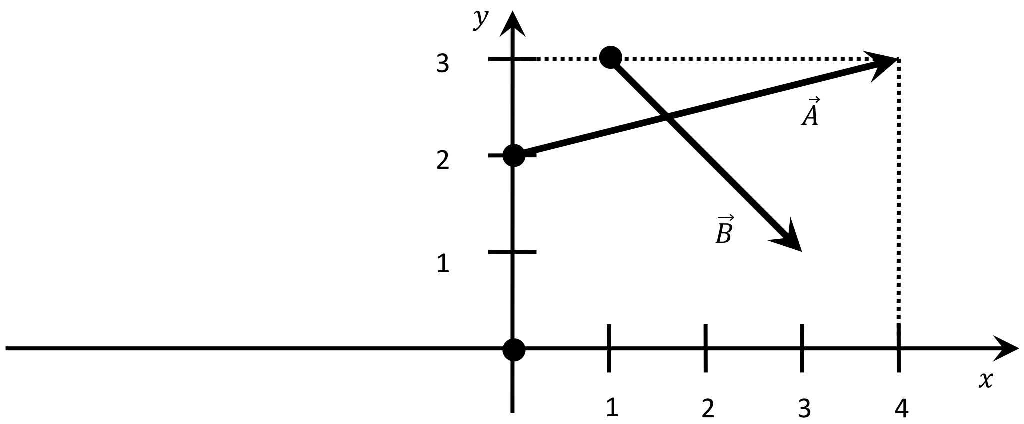
Κατά την χρονική στιγμή $t = 2\ s$:

$$x(2) = -\frac{2}{\pi}[cos(2\pi) - 1] - 5 \times 2 = -10\ m$$

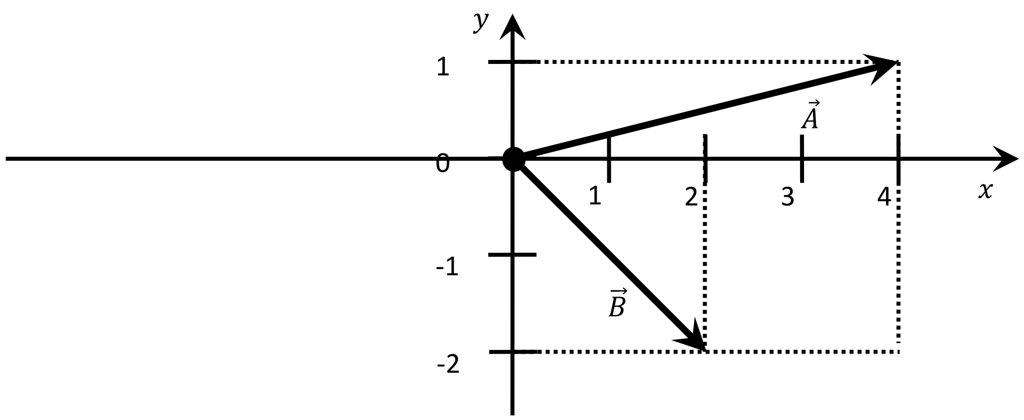
2. ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ – ΥΛΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ

Διανύσματα σε επίπεδο

2.1 Να βρεθούν οι συντεταγμένες των παρακάτω διανυσμάτων $\vec{A}$ και $\vec{B}$ εάν είναι γνωστό ότι οι συντεταγμένες είναι ακέραιοι αριθμοί



<u>Λύση</u>: Μεταφέρουμε τα διανύσματα στην αρχή των συντεταγμένων



Από τις συντεταγμένες των περάτων τους τότε βλέπουμε εύκολα για τα δυο διανύσματα ότι $\vec{A} = (4,1)$ και $\vec{B} = (2,-2)$

2.2 Να βρεθούν το μέτρο και η διεύθυνση σε μοίρες των διανυσμάτων $\vec{A}$ και $\vec{B}$ του προηγούμενου Προβλήματος 2.1

<u>Απάντηση</u>: 4.12, 2.83, 14 ^{0} και -45 ^{0}

<u>Λύση</u>:

Από την Εξ. 2.1

$$|\vec{A}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} = 4.12$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2.83$$

Από την Εξ. 2.2

$$\varphi_A = tan^{-1}(1/4) = 14\ ^0$$

$$\varphi_B = tan^{-1}(-2/2) = -45\ ^0$$

Στη δεύτερη περίπτωση δεν χρειάστηκε να προσθέσουμε $180\ ^0$ στο αποτέλεσμα της αριθμομηχανής αφού το διάνυσμα ανήκει στο 4^{ο} τεταρτημόριο που είναι μέσα στην εμβέλεια της συνάρτησης της αριθμομηχανής.

2.4 Να βρεθούν το μέτρο και η διεύθυνση σε μοίρες του διανύσματος $-\vec{B}$ του προηγούμενου Προβλήματος 2.1

<u>Απάντηση</u>: 2.83 και 135 ^{0}

<u>Λύση</u>:

Το διάνυσμα $-\vec{B}$ προκύπτει από το $\vec{B}$ με απλή αλλαγή του προσήμου των συνιστωσών του

$$-\vec{B} = (-2,2)$$

Από την Εξ. 2.1, μπορούμε να δούμε ότι το μέτρο του $-\vec{B}$ είναι ίσο με το μέτρο του $\vec{B}$:

$$|-\vec{B}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2.83$$

Από την Εξ. 2.2

$$\varphi_{-B} = tan^{-1}(2/-2) = 135\ ^0$$

Προσέξτε ότι η αριθμομηχανή δίνει $-45\ ^0$ όπως και με το διάνυσμα $\vec{B}$ οπότε προσθέσαμε εμείς $+180\ ^0$ σε αυτό το αποτέλεσμα για να βρούμε τη σωστή τιμή (αυτό πρέπει να γίνεται όποτε έχουμε αρνητικό x). Αντιθέτως εάν χρησιμοποιήσουμε το λογισμικό MATHEMATICA, αυτό εμπεριέχει την συνάρτηση ArcTan[x,y] η οποία είναι συνάρτηση δυο μεταβλητών και δίνει το σωστό αποτέλεσμα (σε ακτίνια).

$$ArcTan[2,-2] = -\pi/4$$

2.4 Να βρεθούν το μέτρο και η διεύθυνση των διανυσμάτων $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ και $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ του προηγούμενου Προβλήματος 2.1

<u>Απάντηση</u>: 6.08, 3.61, $-9.46\ ^0$ και $56.3\ ^0$

<u>Λύση</u>:

Προσθέτοντας και αφαιρώντας αντίστοιχα τις συνιστώσες των $\vec{A}$ και $\vec{B}$ έχουμε

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (4,1) + (2,-2) = (6,-1)$$

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = (4,1) - (2,-2) = (2,3)$$

Από την Εξ. 2.1

$$|\vec{C}| = \sqrt{6^2 + (-1)^2} = \sqrt{37} = 6.08$$

$$|\vec{D}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = 3.61$$

Από την Εξ. 2.2

$$\varphi_C = tan^{-1}(-1/6) = -9.46\ ^0$$

$$\varphi_D = tan^{-1}(3/2) = 56.3\ ^0$$

2.5 Να εκφραστούν τα διανύσματα $\vec{C}' = 4\,\vec{C}$ και $\vec{D}' = \pi\vec{D}$ συναρτήσει των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{e}_x$ και $\vec{e}_y$ όπου $\vec{C}$ και $\vec{D}$ τα διανύσματα του προηγούμενου Προβλήματος 2.3

<u>Λύση</u>:

$$\vec{C}' = 4\,\vec{C} = 4 \times (6,-1) = (24,-4) = 24\vec{e}_x - 4\vec{e}_y$$

$$\vec{D}' = \pi\vec{D} = \pi(2,3) = (2\pi, 3\pi) = 2\pi\vec{e}_x + 3\pi\vec{e}_y$$

Διανύσματα Θέσης, Ταχύτητας και Επιτάχυνση στο επίπεδο

2.6 Δυο κινητά περιγράφονται από τα διανύσματα θέσης $\vec{r}_1 = (at^2, bt)$ και $\vec{r}_2 = (ct^3, bt)$ όπου $a = 10\ m/s^2$, $b = 6\ m/s$ και $c = 2\ m/s^3$ Να βρεθεί η γωνία σε μοίρες μεταξύ των δυο διανυσμάτων σε απόλυτη τιμή κατά τη χρονική στιγμή $t = 1\ s$.

Απάντηση: 40.5^0

Λύση:

Στο $t = 1$ τα διανύσματα δίνονται από τις

$$\vec{r}_1 = (a, b) => r_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10^2 + 6^2} = 11.66\, m$$

$$\vec{r}_2 = (c, b) => r_2 = \sqrt{c^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = 6.32\, m$$

$$cos\theta = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{r_1 r_2} = \frac{ac + b^2}{r_1 r_2} = \frac{10 \times 2 + 6^2}{11.66 \times 6.32} = 0.76 => \theta = \text{acos}(0.76) = 40.5^0$$

2.7 Η κίνηση ενός σημειακού σώματος περιγράφεται από τις εξισώσεις: $x = \alpha(1 - t/t_0)^2$ και $y = \beta t^2$ όπου $\alpha = 12\, m, \beta = 0.3\, s^{-2}$ και $t_0 = 4\, s$. Να βρεθεί η γωνία φ που σχηματίζει η επιτάχυνσή του σώματος με τον άξονα των x σε κάθε χρονική στιγμή.

Απάντηση: $21.8\ ^0$

Λύση:

$$v_x(t) = x(t)' = -2\frac{\alpha}{t_0}(1 - t/t_0)$$

$$v_y(t) = y(t)' = 2\beta t$$

$$a_x(t) = v_x(t)' = 2\frac{\alpha}{{t_0}^2}$$

$$a_y(t) = v_y(t)' = 2\beta$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}{t_0}^2\right) = tan^{-1}\left(\frac{0.3}{12}16\right) = 21.8\ ^0$$

2.8 Ένα υλικό σημείο που τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται σε στιγμιαία ακινησία, κινείται με επιτάχυνση με συνιστώσες $\alpha_x(t) = bsin(\omega t)$ και $\alpha_y(t) = dcos(\omega t)$ όπου $b = 3\, m/s^2$, $d = 2\, m/s^2$ και $\omega = 4\, rad/s$. Να βρεθεί η γωνία θ σε μοίρες (μεταξύ 0 και 360^0) που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας με τον άξονα x κατά τη χρονική στιγμή $t = 0.2\, s$.

Απάντηση: 57.6^0

Λύση:

Οι συνιστώσες της ταχύτητας προκύπτουν με ολοκλήρωση των συνιστωσών της επιτάχυνσης:

$$v_x(t) = -\frac{b}{\omega}cos(\omega t) + c_x$$

$$v_y(t) = \frac{d}{\omega} sin(\omega t) + c_y$$

Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη, καταλήγουμε στα αποτελέσματα:

$$v_x(0) = 0 => -\frac{b}{\omega} + c_x = 0 => c_x = \frac{b}{\omega}$$

$$v_y(t) = 0 => 0 + c_y = 0 => c_y = 0$$

Επομένως

$$v_x(t) = -\frac{b}{\omega} cos(\omega t) + \frac{b}{\omega}$$

$$v_y(t) = \frac{d}{\omega} sin(\omega t)$$

Η γωνία ενός διανύσματος δίνεται από την

$$tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{d}{\omega} sin(\omega t)}{\frac{b}{\omega}(1 - cos(\omega t))} => \theta = atan\left[\frac{dsin(\omega t)}{b(1 - cos(\omega t))}\right]$$

Για $t = 0.2\ s$

$$\theta = atan\left[\frac{2sin(4 \times 0.2)}{3(1 - cos(4 \times 0.2))}\right] = 57.6\ ^0$$

2.9 Ένα υλικό σημείο κινείται έτσι ώστε οι συντεταγμένες του να δίνονται από τις $x(t) = bsin(\omega t)$ και $y(t) = dsin(\omega t)$ όπου b και d σταθερές σε m και $\omega = \pi/8\, rad/s$. Να βρεθούν (α) Το μέτρο του διανύσματος θέσης $\vec{r}$ ανά πάσα στιγμή. (β) Η διεύθυνση του διανύσματος θέσης ανά πάσα στιγμή. (γ) Σε διάγραμμα $x - y$ να σχεδιασθούν τα σημεία της τροχιάς για $t = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\ \ s$ για την περίπτωση όπου $b = d = 0.5\, m$. (δ) Η μαθηματική εξίσωση $y(x)$ της τροχιάς. (ε) Το μέτρο και η διεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας $\vec{v}$. (στ) Να συγκριθεί η διεύθυνση του $\vec{r}$ με αυτή του $\vec{v}$ και να σχολιασθεί το αποτέλεσμα της σύγκρισης.

<u>Απάντηση</u>: (δ) Ευθεία, (ε) διεύθυνση 45^0, (στ) ίδιες, ευθύγραμμη κίνηση

<u>Λύση</u>:

(α) Από την Εξ. 2.11

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = bsin(\omega t)\vec{e}_x + dsin(\omega t)\vec{e}_y$$

(β) Από την Εξ. 2.2.

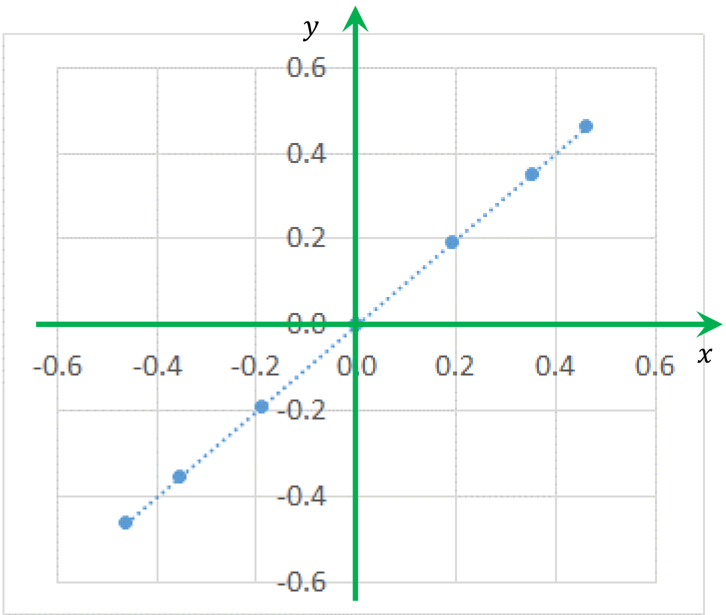
$$\varphi = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{dsin(\omega t)}{bsin(\omega t)}\right) = tan^{-1}\left(\frac{d}{b}\right)$$

Αυτή είναι μια σταθερή γωνία οπότε το κινητό διαγράφει μια ευθεία τροχιά.

(γ) Για να βρούμε τα ζητούμενα σημεία, καταφεύγουμε στις εξισώσεις $x(t) = bsin(\omega t)$ και $y(t) = dsin(\omega t)$ που με τα δεδομένα γίνονται $x(t) = 0.5sin(\pi t/8)$ και $y(t) = x(t)$ και κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα:

$t(s)$	$x(m)$	$y(m)$
-3	-0.46	-0.46
-2	-0.35	-0.35
-1	-0.19	-0.19
0	0.00	0.00
1	0.19	0.19
2	0.35	0.35
3	0.46	0.46

Από τις τιμές του πίνακα κατασκευάζουμε την παρακάτω γραφική παράσταση:



(δ) Χρειάζεται να απαλείψουμε τον χρόνο. Εφόσον τόσο το x όσο και το y περιέχουν τον όρο του ημιτόνου, τους διαιρούμε για να τον απαλείψουμε. Τότε παίρνουμε

$$\frac{y}{x} = \frac{d}{b} => y = \frac{d}{b}x$$

που είναι η εξίσωση μιας ευθείας όπως αναμένουμε από τα προηγούμενα υποερωτήματα. Η ευθεία περνάει από την αρχή των αξόνων και για $b = d = 0.5\ m$ η κλίση είναι $d/b = 1$. Όλα αυτά είναι σε πλήρη συμφωνία με την παραπάνω γραφική παράσταση των 7 σημείων.

(ε) Σύμφωνα με τις Εξισώσεις 2.15, πρέπει να παραγωγίσουμε τα x και y για να πάρουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας. Οι παραγωγίσεις οδηγούν στο αποτέλεσμα

$$v_x(t) = x(t)' = 0.5 \times \frac{\pi}{8} \times cos\left(\frac{\pi t}{8}\right) = 0.196\, cos\left(\frac{\pi t}{8}\right)$$

$$v_y(t) = y(t)' = 0.5 \times \frac{\pi}{8} \times cos\,(\pi t/8) = 0.196\, cos\left(\frac{\pi t}{8}\right)$$

Προσέξτε ότι $v_y = v_x$ πράγμα που αναμένεται αφού $x = y$. Επομένως και η γωνία του διανύσματος της ταχύτητας είναι 45^0 και το μέτρο της είναι ίσο με

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = 0.196\sqrt{2}\, cos\left(\frac{\pi t}{8}\right)$$

(στ) Αφού τα δυο διανύσματα έχουν την ίδια γωνία τότε είναι συγγραμμικά. Αυτό αναμένεται αφού η τροχιά του κινητού είναι ευθύγραμμη.

2.10 Σημειακό σώμα Α που βρίσκεται στο $t = 0$ σε ηρεμία στο Ο(0,0), δέχεται επιτάχυνση $\vec{a} = c_1 t \vec{e}_x + c_2 t^2 \vec{e}_y$ όπου $c_1 = 6\, m/s^3$ και $c_2 = 12\, m/s^4$. Να βρεθεί η απόσταση ΟΑ την χρονική στιγμή $t = 1\, s$.

<u>Απάντηση</u>: $1.41\, m$

<u>Λύση</u>:

Ολοκληρώνουμε δυο φορές και εφαρμόζουμε τις αρχικές συνθήκες για να βρούμε τις συντεταγμένες του σώματος:

$$v_x(t) = \int a_x(t)dt = \int c_1 t dt = \frac{c_1 t^2}{2} + b_1$$

$$v_y(t) = \int a_y(t)dt = \int c_2 t^2 dt = \frac{c_2 t^3}{3} + b_2$$

Αφού το σώμα αρχικά ηρεμεί, τότε οι σταθερές ολοκλήρωσης είναι $b_1 = 0$ και $b_2 = 0$.

$$x(t) = \int v_x(t)dt = \int \frac{c_1 t^2}{2} dt = \frac{c_1 t^3}{6} + d_1$$

$$v_y(t) = \int v_y(t)dt = \int \frac{c_2 t^3}{3} dt = \frac{c_2 t^4}{12} + d_2$$

Αφού το σώμα αρχικά βρίσκεται στο (0,0), τότε οι σταθερές ολοκλήρωσης είναι ίσες με $d_1 = 0$ και $d_2 = 0$. Στο $t = 1$

$$x(1) = \frac{c_1}{6} = 1\, m$$

$$y(1) = \frac{c_2}{12} = 1\ m$$

Η απόσταση ΟΑ είναι στην ουσία το μέτρο του διανύσματος θέσης r:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2} = 1.41\ m$$

2.11 Σημειακό σώμα Α κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v} = -\vec{e}_y\ m/s$ για $t \leq 0$. Στο $t = 0$ και ενώ το σώμα βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων, εφαρμόζεται επιτάχυνση $\vec{a} = 2\pi cos(c_1 t)\vec{e}_x + \pi sin(c_1 t)\vec{e}_y$ όπου $c_1 = \pi\ rad/s$. Να βρεθεί η απόσταση του Α από την αρχή των αξόνων κατά την χρονική στιγμή $t = 1/4\ s$.

<u>Απάντηση</u>: $0.292\ m$

<u>Λύση</u>:

Ολοκληρώνουμε την επιτάχυνση δυο φορές και εφαρμόζουμε τις αρχικές συνθήκες για να βρούμε την απομάκρυνση x του σώματος. Για $t > 0$ έχουμε

$$v_x(t) = \int a_x(t)dt = \int 2\pi cos(c_1 t)dt = \frac{2\pi}{c_1} sin(c_1 t) + b_1$$

$$v_y(t) = \int a_y(t)dt = \int \pi sin(c_1 t)dt = -\frac{\pi}{c_1} cos(c_1 t) + b_2$$

όπου b_1 και b_2 σταθερές ολοκλήρωσης, ενώ για $t \leq 0$ ισχύει $\vec{v} = -\vec{e}_y\ m/s$: σταθερό. Αντικαθιστώντας τα δεδομένα, έχουμε για $t > 0$ ότι

$$v_x(t) = 2sin(\pi t) + b_1$$

$$v_y(t) = -cos(\pi t) + b_2$$

Για να είναι συνεχής η ταχύτητα στο $t = 0$ πρέπει

$$v_x(0) = 0 => 0 + b_1 = 0 => b_1 = 0$$

$$v_y(0) = -1 => -1 + b_2 = -1 => b_2 = 0$$

Έτσι

$$v_x(t) = 2sin(\pi t)$$

$$v_y(t) = -cos(\pi t)$$

Ολοκληρώνουμε ακόμη μια φορά.

$$x(t) = \int v_x(t)dt = \int 2sin(\pi t)dt = -\frac{2}{\pi} cos(\pi t) + d_1$$

$$y(t) = \int v_y(t)dt = \int -cos(\pi t)dt = -\frac{1}{\pi}sin(\pi t) + d_2$$

όπου b_1 και b_2 σταθερές ολοκλήρωσης. Εφαρμόζουμε την αρχική συνθήκη

$$x(0) = 0 => -\frac{2}{\pi} + d_1 = 0 => d_1 = \frac{2}{\pi}$$

$$y(0) = 0 => 0 + d_2 = 0 => d_2 = 0$$

Έτσι

$$x(t) = -\frac{2}{\pi}[cos(\pi t) - 1]$$

$$y(t) = -\frac{1}{\pi}sin(\pi t)$$

Κατά την χρονική στιγμή $t = 1/4\ s$:

$$x(1/4) = -\frac{2}{\pi}[cos(\pi/4) - 1] = 0.186\ m$$

$$y(1/4) = -\frac{1}{\pi}sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -0.225\ m$$

Η ζητούμενη απόσταση είναι στην ουσία το μέτρο του διανύσματος θέσης r:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0.186^2 + (-0.225)^2} = 0.292\ m$$

2.12 Ένα υλικό σημείο κινείται στο επίπεδο με επιτάχυνση η οποία έχει συνιστώσες που δίνονται από τις $\alpha_x(t) = bsin(\omega t)$ και $\alpha_y(t) = dcos(\omega t)$ όπου οι b, d και ω είναι σταθερές μεγαλύτερες του μηδενός. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κινητό κινείται προς τον αρνητικό άξονα x με ταχύτητα μέτρου $|v| = b/\omega$ και περνάει από την αρχή των αξόνων. Να σχεδιασθεί όσο το δυνατό πιο λεπτομερώς η τροχιά του κινητού για $t > 0$.

Απάντηση: Έλλειψη, μήκη ημιαξόνων x_0 και y_0, κέντρο $(0, y_0)$

Λύση:

Με ολοκλήρωση

$$v_x(t) = -\frac{b}{\omega}cos(\omega t) + c_x$$

$$v_y(t) = \frac{d}{\omega}sin(\omega t) + c_y$$

Από την αρχική συνθήκη στο $t = 0$

$$v_x(0) = -\frac{b}{\omega} => -\frac{b}{\omega} + c_x = -\frac{b}{\omega} => c_x = 0$$

$$v_y(0) = 0 => 0 + c_y = 0 => c_y = 0$$

(αρνητική v_x συνιστώσα). Επομένως

$$v_x(t) = -\frac{b}{\omega} cos(\omega t)$$

$$v_y(t) = \frac{d}{\omega} sin(\omega t)$$

Με δεύτερη ολοκλήρωση

$$x(t) = -\frac{b}{\omega^2} sin(\omega t) + c'_x$$

$$y(t) = -\frac{d}{\omega^2} cos(\omega t) + c'_y$$

Από την αρχική συνθήκη έχουμε $x = 0$ και $y = 0$ στο $t = 0$ επομένως

$$0 = 0 + c'_x => c'_x = 0$$

$$0 = -\frac{d}{\omega^2} + c'_y => c'_y = \frac{d}{\omega^2}$$

Έτσι

$$x(t) = -\frac{b}{\omega^2} sin(\omega t)$$

$$y(t) = -\frac{d}{\omega^2} cos(\omega t) + \frac{d}{\omega^2}$$

Λύνουμε ως προς ημίτονο και συνημίτονο

$$sin(\omega t) = -\frac{\omega^2}{b} x(t)$$

$$cos(\omega t) = \frac{\omega^2}{d}\left(y(t) - \frac{d}{\omega^2}\right)$$

και χρησιμοποιούμε τη δεδομένη τριγωνομετρική ταυτότητα

$$sin^2(\omega t) + cos^2(\omega t) = 1 =>$$

για να πάρουμε:

$$\frac{\omega^4}{b^2} x^2 + \frac{\omega^4}{d^2}\left(y - \frac{d}{\omega^2}\right)^2 = 1$$

Η παραπάνω γράφεται ως

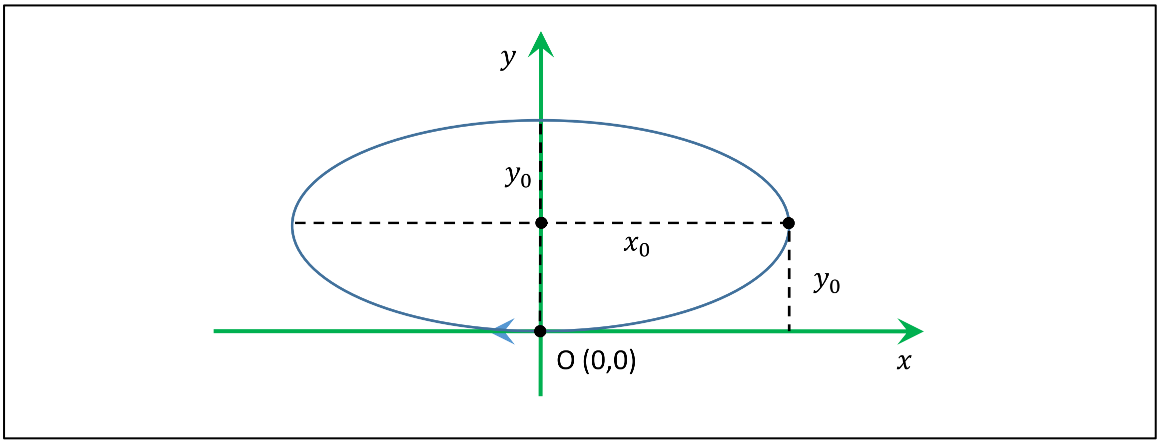
$$\frac{x^2}{{x_0}^2} + \frac{(y - y_0)^2}{{y_0}^2} = 1$$

με

$$x_0 = \frac{b}{\omega^2}$$

$$y_0 = \frac{d}{\omega^2}$$

η οποία είναι εξίσωση έλλειψης με μήκη ημιαξόνων ίσα με x_0 και y_0 και το κέντρο της βρίσκεται μετατοπισμένο από την αρχή των συντεταγμένων κατακόρυφα κατά y_0. Η τροχιά φαίνεται παρακάτω



2.13 Σημειακό σώμα Α που βρίσκεται στο $t = 0$ σε ηρεμία στο σημείο $B(1,1)$, δέχεται ξαφνικά επιτάχυνση ώστε η ταχύτητα του να αποκτήσει συνιστώσες $v_x = c_1 t$ και $v_y = c_2 t^2$ όπου $c_1 = 1\, m/s^2)$ και $c_2 = 0.3\, m/s^3)$ Να βρεθεί η απόστασή του από το $O(0,0)$ την χρονική στιγμή $t_0 = 2\, s$.

<u>Απάντηση</u>: $3.50\, m$

<u>Λύση</u>:

Με ολοκλήρωση

$$x = c_1 \frac{t^2}{2} + \kappa_1$$

$$y = c_2 \frac{t^3}{3} + \kappa_2$$

Όπου κ_1 και κ_2 είναι οι σταθερές ολοκλήρωσης. Για να ικανοποιείται η δεδομένη αρχική συνθήκη $x = 1$ και $y = 1$ στο $t = 0$ πρέπει να έχουμε αναγκαστικά:

$$\kappa_1 = 1$$

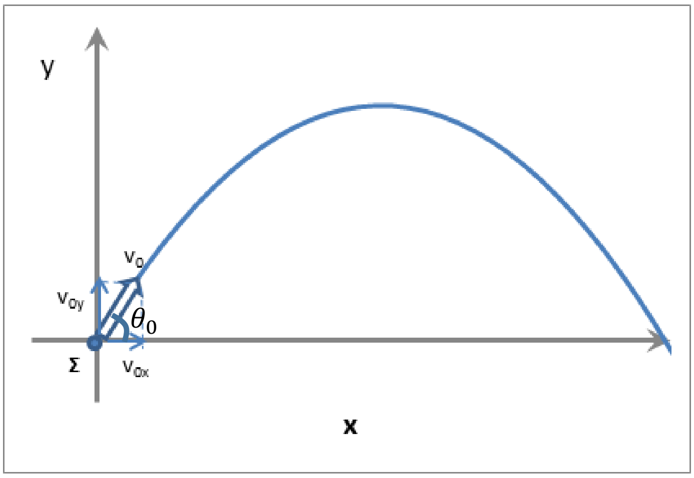
$$\kappa_2 = 1$$

Η ζητούμενη απόσταση είναι ίση με το μέτρο του διανύσματος θέσης $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ στο t_0 που ισούται με:

$$r = \sqrt{\left(c_1 \frac{t_0^2}{2} + 1\right)^2 + \left(c_2 \frac{t_0^3}{3} + 1\right)^2} = \sqrt{\left(1.0 \frac{2.0^2}{2} + 1\right)^2 + \left(0.3 \frac{2.0^3}{3} + 1\right)^2} = 3.50\ m$$

Βολές

Σημείωση: Στις βολές να χρησιμοποιηθεί σε όλες τις ασκήσεις το παρακάτω διάγραμμα



2.14 Μικρή πέτρα εκτοξεύεται από το έδαφος με αρχική ταχύτητα 8 m/s και γωνία 35^0 ως προς τον ορίζοντα. Να βρεθούν (α) Ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει η πέτρα στο υψηλότερο σημείο, (β) Το ύψος της πέτρας σε σχέση με το σημείο εκτόξευσης την χρονική στιγμή $0.2\ s$ πριν να φτάσει στο υψηλότερο σημείο, (γ) Το μέτρο της ταχύτητας στο σημείο αυτό. Πάρτε $g = 10\ ms^{-2}$ για ευκολία.

<u>Απάντηση</u>: (α) $0.459\ s$, (β) $0.853\ m$, και (γ) $6.85\ m/s$

<u>Λύση</u>:

(α) Από τα δεδομένα $v_0 = 8\ m/s$ και $\theta_0 = 35\ ^0$. Από τον Πίνακα 2.1 και τις Εξ. 2.22 έχουμε για την κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 sin\theta_0 - gt$$

Στο υψηλότερο σημείο

$$v_y = 0 => v_0 sin\theta_0 - gt = 0 => t = \frac{v_0 sin\theta_0}{g} = \frac{8 \times sin(35\ ^0)}{10} = 0.459\ s$$

(β) Από τον Πίνακα 2.1 έχουμε για την κατακόρυφη απομάκρυνση

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Θεωρώντας ότι η εκτόξευση γίνεται στο έδαφος, $y_0 = 0$. Από τις Εξ. 2.22

$$y(t) = v_0 sin\theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Ο δεδομένος χρόνος είναι ο $t = 0.459 - 0.2 = 0.259\ s$ και έτσι

$$y(t) = 8 \times sin(35\,^0) \times 0.259 - \frac{1}{2} \times 10 \times 0.259^2 = 0.853\ m$$

(γ) Από τον Πίνακα 2.1 και τις Εξ. 2.22 έχουμε για τις δυο συνιστώσες της ταχύτητας

$$v_x = v_{0x} = v_0 cos\theta_0 = 8 \times cos(35\,^0) = 6.55\ m/s$$

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 sin\theta_0 - gt = 8 \times sin(35\,^0) - 10 \times 0.259 = 2.00\ m/s$$

Επομένως το μέτρο είναι ίσο με

$$v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} = 6.85\ m/s$$

2.15 Μικρή πέτρα εκτοξεύεται από το έδαφος με αρχική ταχύτητα $12\ m/s$ και γωνία 60^0 ως προς τον ορίζοντα. Να βρεθούν (α) Ο χρόνος που απαιτείται για να επιστρέψει η πέτρα στο έδαφος, (β) Το μέτρο της ταχύτητας λίγο πριν την πρόσκρουση και (γ) Η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα (ως προς το έδαφος) λίγο πριν την πρόσκρουση. Να σχολιαστεί το τελευταίο αποτέλεσμα. Πάρτε $g = 10\ ms^{-2}$ για ευκολία.

Απάντηση: (α) $2.08\ s$, (β) $12\ m/s$ και (γ) $-30\,^0$

Λύση:

(α) Από τον Πίνακα 2.1 έχουμε για την κατακόρυφη απομάκρυνση

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Θεωρώντας ότι η εκτόξευση γίνεται στο έδαφος, $y_0 = 0$. Από τις Εξ. 2.22

$$y(t) = v_0 sin\theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Το ύψος της πέτρας είναι 0 κατά την εκτόξευση στο $t = 0$ και κατά την επαφή της πέτρας με το έδαφος. Θέτοντας $y = 0$ οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$$v_0 sin\theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 => v_0 sin\theta_0 - \frac{1}{2}gt = 0$$

Απαλείψαμε το $t = 0$ που αντιστοιχεί στην εκκίνηση της πέτρας. Λύνοντας ως προς το χρόνο

$$t = \frac{2v_0 sin\theta_0}{g} = \frac{2 \times 12 \times sin(60^{\,0})}{10} = 2.08\ s$$

(β) Από τον Πίνακα 2.1 και τις Εξ. 2.22 έχουμε για τις δυο συνιστώσες της ταχύτητας

$$v_x = v_{0x} = v_0 cos\theta_0 = 12 \times cos(60^{\,0}) = 6.00\ m/s$$

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 sin\theta_0 - gt = 12 \times sin(60^{\,0}) - 10 \times 2.08 = -10.4\ m/s$$

Επομένως το μέτρο είναι ίσο με

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = 12\ m/s$$

(γ) Η αντίστοιχη γωνία είναι ίση με

$$\varphi = tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{6.00}{-10.4}\right) = -30^{\,0}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η πέτρα επιστρέφει με την ίδια ταχύτητα με την οποία εκτοξεύτηκε (με αντίθετο πρόσημο φυσικά). Επομένως η βολή είναι συμμετρική. Αυτό γίνεται όταν δεν υπάρχει αντίσταση του αέρα αλλιώς η συμμετρία χάνεται.

2.16 Μικρή πέτρα εκτοξεύεται από το έδαφος με αρχική ταχύτητα $12\ m/s$ και γωνία 60^0 ως προς τον ορίζοντα. (α) Να γραφούν σε διανυσματική μορφή (συναρτήσει των μοναδιαίων διανυσμάτων) η ταχύτητα και η επιβατική ακτίνα $1.3\ s$ μετά την εκτόξευση και (β) Να βρεθεί η σχετική τους γωνία (η μεταξύ τους γωνία) κατά την ίδια χρονική στιγμή

<u>Απάντηση</u>: (α) $6.00\vec{e}_x - 2.61\vec{e}_y$ & $7.8\vec{e}_x + 5.06\vec{e}_y$, (β) $80.5^{\,0}$

<u>Λύση</u>:

(α) Από τον Πίνακα 2.1 και τις Εξ. 2.22 έχουμε για τις δυο συνιστώσες της ταχύτητας

$$v_x = v_{0x} = v_0 cos\theta_0 = 12 \times cos(60^{\,0}) = 6.00\ m/s$$

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 sin\theta_0 - gt = 12 \times sin(60^{\,0}) - 10 \times 1.3 = -2.61\ m/s$$

Επομένως το διάνυσμα της ταχύτητας είναι το

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y = 6.00\vec{e}_x - 2.61\vec{e}_y$$

με μέτρο

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = 6.54\ m/s$$

Από τον Πίνακα 2.1 και τις Εξ. 2.22 έχουμε για τις συντεταγμένες της πέτρας

$$x(t) = v_{0x}t = x(t) = v_0 cos\theta t$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 sin\theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Θεωρήσαμε στη δεύτερη ότι η εκτόξευση γίνεται στο έδαφος, $y_0 = 0$. Αντικαθιστώντας τα δεδομένα

$$x = 12 \times cos(60\,^0) \times 1.3 = 7.80\ m$$

$$y = 12 \times sin(60\,^0) \times 1.3 - \frac{1}{2}10 \times 1.3^2 = 5.06\ m$$

Επομένως το διάνυσμα θέσης είναι το

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = 7.80\vec{e}_x + 5.06\vec{e}_y$$

με μέτρο

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 9.3\ m$$

(β) Μπορούμε να βρούμε την γωνία θ μεταξύ των δυο διανυσμάτων με τη χρήση των δυο τύπων του εσωτερικού γινομένου, Εξ. 2.9 και 2.10:

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = rvcos\theta = xv_x + yv_y$$

$$cos\theta = \frac{xv_x + yv_y}{rv} = \frac{7.8 \times 6.00 + 5.06\ \times (-2.61)}{9.3 \times 6.54} = 0.552$$

$$\theta = cos^{-1}(0.835) = 48.8^0$$

2.17 Σημειακή μάζα m εκτοξεύεται με ταχύτητα $17\ m/s$ στο $t = 0$ από την αρχή των αξόνων με γωνία 72^0 ως προς τον άξονα x ο οποίος είναι παράλληλος με το έδαφος. Εάν στη μάζα ασκείται μόνο το βάρος της με επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με $10\ m/s^2$, να βρεθεί σε ποια χρονική στιγμή το διάνυσμα θέσης της μάζας θα είναι κάθετο στην ταχύτητά της.

<u>Απάντηση</u>: $2.74\ s$

<u>Λύση:</u>

Εξισώσεις βολής

$$v_{0x} = v_0 cos\theta$$

$$v_{0y} = v_0 sin\theta$$

$$v_x = v_{0x}$$

$$v_y = v_{0y} - gt = v_{0y} - 10t$$

$$x = v_{0x}t$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_{0y}t - 5t^2$$

Κάθετα δυο διανύσματα => εσωτερικό γινόμενο = 0

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = 0 => (x, y) \cdot (v_x, v_y) = 0 =>$$

$$(v_{0x}t, v_{0y}t - 5t^2) \cdot (v_{0x}, v_{0y} - 10t) = 0 =>$$

$$(v_{0x}, v_{0y} - 5t) \cdot (v_{0x}, v_{0y} - 10t) = 0 =>$$

$${v_{0x}}^2 + {v_{0y}}^2 - 10v_{0y}t - 5v_{0y}t + 50t^2 = 0 =>$$

$$50t^2 - 15v_{0y}t + {v_0}^2 = 0$$

Δευτεροβάθμια ως προς t. Διακρίνουσα

$$\Delta = 15^2 v_{0y}^2 - 4v_0^2 50$$

$$t = \frac{15v_{0y} \pm \sqrt{15^2 v_{0y}^2 - 4v_0^2 50}}{100}$$

Κρατάμε μόνο τον θετικό χρόνο

$$t = \frac{15v_{0y} + \sqrt{15^2 v_{0y}^2 - 4v_0^2 50}}{100} = \frac{3sin\theta + \sqrt{9\, sin^2\theta - 8}}{20} v_0$$

Αντικαθιστώντας

$$t = 17 \frac{3sin72^0 + \sqrt{9\, sin^2 72^0 - 8}}{20} = 2.74\ s$$

2.18 Σημειακή μάζα m εκτοξεύεται σε κάποιο πλανήτη στο $t = 0$ με ταχύτητα μέτρου v_0 από την αρχή των αξόνων με γωνία $\theta_0 > 30^0$ ως προς τον άξονα x ο οποίος βρίσκεται στην επιφάνεια του εδάφους του πλανήτη. Εάν στη μάζα ασκείται μόνο το βάρος της με επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με g (διάφορη από αυτή της γης), να βρεθεί σε ποιες χρονικές στιγμές το διάνυσμα θέσης της μάζας θα σχηματίζει γωνία 120^0 με την επιτάχυνσή της.

<u>Απάντηση</u>: $gv_0/2(sin\theta_0 - cos\theta_0/\sqrt{3})$

<u>Λύση</u>:

Αρχική ταχύτητα - συνιστώσες

$$v_{0x} = v_0 cos\theta_0$$

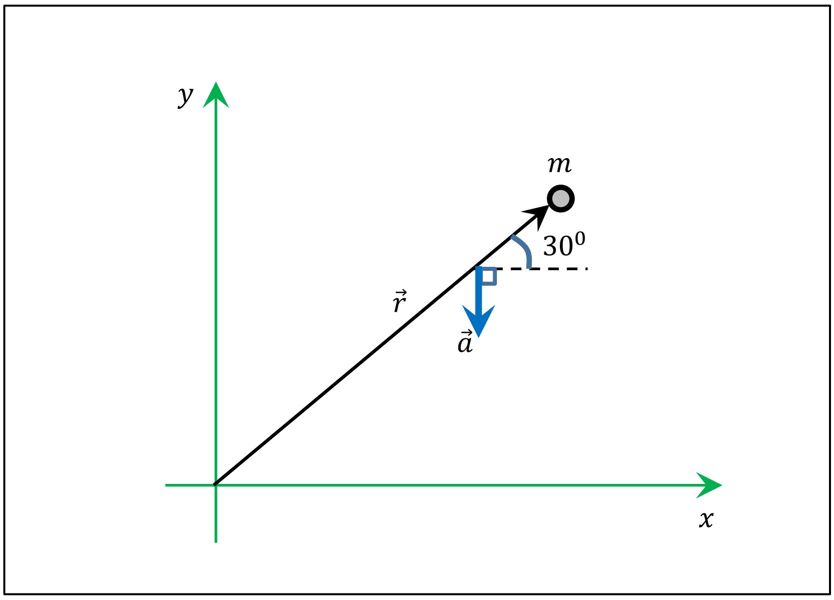
$$v_{0y} = v_0 sin\theta_0$$

Βολές, διάνυσμα θέσης - συνιστώσες

$$x = v_{0x}t = v_0 cos\theta_0 t$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 sin\theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Εφόσον η επιτάχυνση του κινητού $\vec{a} = (0, -g)$ είναι προς τα κάτω (συγγραμμική με τη δύναμη που ασκείται στο κινητό) τότε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, το διάνυσμα θέσης του κινητού θα σχηματίσει γωνία 120^0 με αυτήν όταν σχηματίσει γωνία $\theta = 30^0$ ως προς τον άξονα-x.



Η γωνία θ του διανύσματος θέσης δίνεται από την

$$tan\theta = \frac{y}{x}$$

Επομένως

$$\frac{y}{x} = tan30^0 = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Δηλαδή

$$\sqrt{3}y = x => \sqrt{3}(v_0 sin\theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2) = v_0 cos\theta_0 t$$

Απαλείφεται το t αφού $t \neq 0$

$$\sqrt{3}(v_0 sin\theta_0 - \frac{1}{2}gt) = v_0 cos\theta_0$$

$$t = \frac{2v_0}{g}(sin\theta_0 - cos\theta_0/\sqrt{3})$$

2.19 Μικρή πέτρα εκτοξεύεται από το έδαφος με αρχική ταχύτητα $v_0 = 10.0\ m/s$ και γωνία $\theta_0 = 40^0$ ως προς το έδαφος. Να βρεθεί η γωνία του διανύσματος της ταχύτητας της πέτρας σε μοίρες (μεταξύ $\pm 90^0$) σε σχέση με τον άξονα x σε χρόνο $\Delta t = 0.2\ s$ αφού έχει φτάσει στο σημείο Α του μέγιστου ύψους της τροχιάς. Πάρτε $g = 10\ m/s^2$ για ευκολία.

Απάντηση: -14.63^0

Λύση:

Αρχική ταχύτητα - συνιστώσες

$$v_{0x} = v_0 cos\theta_0 = 10cos40^0 = 7.66\ m/s$$

$$v_{0y} = v_0 sin\theta_0 = 10sin40^0 = 6.43\ m/s$$

Στο υψηλότερο σημείο η v_y μηδενίζεται επομένως μπορούμε να βρούμε το χρόνο για να φτάσει η πέτρα στο μέγιστο ύψος:

$$v_y = 0 => v_{0y} - gt_A = 0 => t_A = \frac{6.43}{10} = 0.643\ s$$

Η ζητούμενη γωνία είναι σε χρόνο $t = t_A + \Delta t = 0.643 + 0.2 = 0.843\ s$. Οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά τη συγκεκριμένη στιγμή είναι ίσες με

$$v_x = v_{0x} = 7.66\ m/s$$

$$v_y = v_{0y} - gt = 6.43 - 10 \times 0.843 = -2\ m/s$$

Η ζητούμενη γωνία είναι η

$$\varphi = tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = tan^{-1}\frac{-2}{7.66} = -14.63^0$$

Διανύσματα στη Κυκλική κίνηση

2.20 Πως θα άλλαζε η απάντησή σας στα υπο-ερωτήματα γ και δ του Προβλήματος 2.9 εάν οι συντεταγμένες συναρτήσει του χρόνου ήταν οι εξής: $x(t) = bsin(\omega t)$ και $y(t) = bcos(\omega t)$ όπου $b = 0.5\ m$ και $\omega = \pi/8\ rad/s$; Δηλαδή ενώ στο Πρόβλημα 2.9 και οι δυο συνιστώσες εμπεριείχαν τον όρο του ημιτόνου, στο παρόν πρόβλημα ο ένας περιέχει ημίτονο ενώ ο άλλος συνημίτονο.

Απάντηση: (δ) Κύκλος, (στ) Κάθετες μεταξύ τους, κυκλική κίνηση

Λύση:

(α) Από την Εξ. 2.11

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = bsin(\omega t)\vec{e}_x + dcos(\omega t)\vec{e}_y$$

(β) Από την Εξ. 2.2.

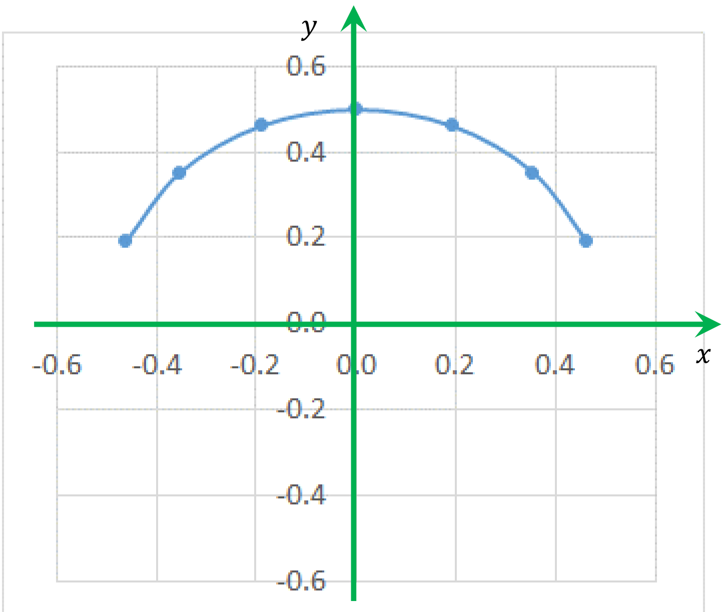
$$\varphi = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{dcos(\omega t)}{bsin(\omega t)}\right) = tan^{-1}\left(\frac{d}{b}cot(\omega t)\right)$$

Αυτή η γωνία εξαρτάται από τον χρόνο.

(γ) Για να βρούμε τα ζητούμενα σημεία, καταφεύγουμε στις εξισώσεις $x(t) = bsin(\omega t)$ και $y(t) = dcos(\omega t)$ που με τα δεδομένα γίνονται $x(t) = 0.5sin(\pi t/2)$ και $y(t) = x(t)$ και κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα:

$t(s)$	$x(m)$	$y(m)$
-3	-0.46	0.19
-2	-0.35	0.35
-1	-0.19	0.46
0	0.00	0.50
1	0.19	0.46
2	0.35	0.35
3	0.46	0.19

Από τις τιμές του πίνακα κατασκευάζουμε την παρακάτω γραφική παράσταση:



(δ) Χρειάζεται να απαλείψουμε τον χρόνο. Εφόσον το x περιέχει ημίτονο ενώ το y περιέχει συνημίτονο, χρησιμοποιούμε την τριγωνομετρική ταυτότητα $cos^2 a + sin^2 a = 1$ όπου $a = \omega t$ για να τα απαλείψουμε. Τότε παίρνουμε

$$\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{d}\right)^2 = cos^2 a + sin^2 a = 1$$

που είναι η εξίσωση μιας έλλειψης η οποία έχει ως κέντρο την αρχή των αξόνων και για $b = d = 0.5\ m$ γίνεται κύκλος με ακτίνα $R = 0.5\ m$. Όλα αυτά είναι σε πλήρη συμφωνία με την παραπάνω γραφική παράσταση των 7 σημείων.

(ε) Σύμφωνα με τις Εξισώσεις 2.15, πρέπει να παραγωγίσουμε τα x και y για να πάρουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας. Οι παραγωγίσεις οδηγούν στο αποτέλεσμα

$$v_x(t) = x(t)' = 0.5 \times \frac{\pi}{8} \times cos\left(\frac{\pi t}{8}\right) = 0.196\, cos\left(\frac{\pi t}{8}\right)$$

$$v_y(t) = y(t)' = -0.5 \times \frac{\pi}{8} \times sin(\pi t/8) = -0.196\, sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)$$

Επομένως και η γωνία θ του διανύσματος της ταχύτητας δίνεται σύμφωνα με την Εξ. 2.2 από την

$$tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = -cot(\omega t)$$

Το μέτρο της ταχύτητας σύμφωνα με την Εξ. 2.1 είναι ίσο με

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = 0.196\sqrt{cos^2\left(\frac{\pi t}{8}\right) + sin^2\left(\frac{\pi t}{8}\right)} = 0.196$$

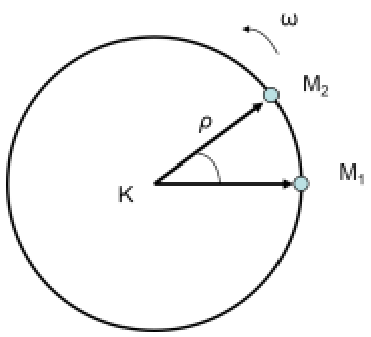
σταθερό.

(στ) Όπως είδαμε, η γωνία θ του διανύσματος της ταχύτητας δίνεται σύμφωνα από την $tan\theta = -cot(\omega t)$. Αντιθέτως η γωνία φ του διανύσματος θέσης σύμφωνα με την Εξ. 2.2 ισούται με

$$tan\varphi = \frac{y}{x} = tan(\omega t)$$

Αφού $tan\theta \cdot tan\varphi = -cot(\omega t) \cdot tan(\omega t) = -1$ τότε τα δυο διανύσματα είναι κάθετα. Αυτό αναμένεται για κυκλική κίνηση όπου η ταχύτητα είναι πάντα κάθετη στην ακτίνα της τροχιάς.

2.21 Στο παρακάτω σχήμα ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση πάνω σε κύκλο ακτίνας ρ με περίοδο T. Το σώμα περνάει από τα σημεία M_1 και M_2 με διαφορά χρόνου Δt. Εάν v_1 και v_2 είναι οι διανυσματικές ταχύτητες του σώματος σε αυτά τα δυο σημεία, να βρεθεί το εσωτερικό τους γινόμενο.



<u>Απάντηση</u>: $\rho^2(2\pi/T)^2\,cos(2\pi\Delta t/T)$

<u>Λύση</u>:

1ος τρόπος (δύσκολος):

Η κυκλική συχνότητα είναι ίση με $\omega = 2\pi/T$ οπότε γωνία μεταξύ των σημείων $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ είναι ίση με $\Delta\varphi = \omega\Delta t = 2\pi\Delta t/T$ και οι συντεταγμένες του σημείου M_2 είναι $x_2 = \rho cos\Delta\varphi$ και $y_2 = \rho sin\Delta\varphi$. Τα διανύσματα θέσης των M_1 και M_2 είναι

$$\vec{r}_1 = \rho\vec{e}_x$$

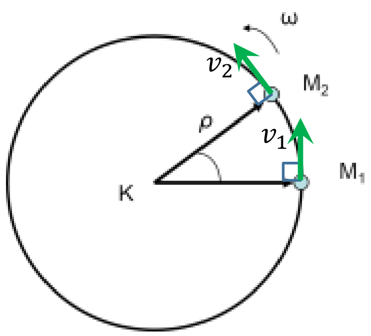
$$\vec{r}_2 = \rho(cos\Delta\varphi\vec{e}_x + sin\Delta\varphi\vec{e}_y)$$

Τα διανύσματα της ταχύτητας είναι κάθετα στα αντίστοιχα διανύσματα θέσης (δείτε παρακάτω σχήμα) και μέτρο $\rho\omega$ και επομένως έχουν συντεταγμένες:

$$\vec{v}_1 = \rho\omega\vec{e}_y$$

$$\vec{v}_2 = \rho\omega(-sin\Delta\varphi\vec{e}_x + cos\Delta\varphi\vec{e}_y)$$

(προσέξτε ότι το v_2 έχει αρνητική x-συνιστώσα).



Επομένως το ζητούμενο εσωτερικό γινόμενο σύμφωνα με την Εξ. 2.9 είναι ίσο με

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \rho^2\omega^2\left(-sin\Delta\varphi\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y + cos\Delta\varphi\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y\right) = \rho^2\omega^2 cos\Delta\varphi$$

όπου έγινε χρήση της Εξ. 2.9 για τα μοναδιαία

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 1 \times 1 \times cos90^0 = 0$$

$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1 \times 1 \times cos0^0 = 1$$

Αντικαθιστώντας

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \rho^2 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 cos\left(\frac{2\pi}{T}\Delta t\right)$$

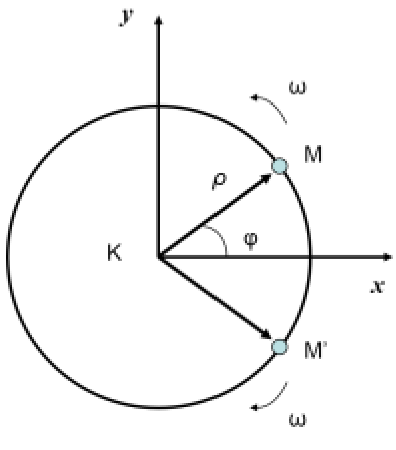
2ος τρόπος (εύκολος):

Αφού τα διανύσματα της ταχύτητας είναι κάθετα στα αντίστοιχα διανύσματα θέσης, τότε θα σχηματίζουν γωνία μεταξύ τους ίση με αυτή που σχηματίζουν τα διανύσματα θέσης, δηλαδή $\Delta\varphi$. Τα μέτρα τους είναι ίσα με $\rho\omega$ και επομένως σύμφωνα με την Εξ. 2.9:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (\rho\omega)^2 cos\Delta\varphi$$

ίδιο όπως παραπάνω.

2.22 Στο παρακάτω σχήμα τα σημεία Μ και Μ′ εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση ίδιας γωνιακής ταχύτητας ω αλλά αντίθετης φοράς επάνω σε κύκλο ακτίνας ρ. Την χρονική στιγμή $t = 0$ τα δυο σημεία βρίσκονται επάνω στον άξονα x. Να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων θέσης τους κατά την χρονική στιγμή t.



Λύση:

1ος τρόπος (δύσκολος):

Το διάνυσμα θέσης του Μ σχηματίζει γωνία με τον άξονα x ίση με $\varphi = \omega t$ και οι συντεταγμένες του είναι $x = \rho cos\varphi$ και $y = \rho sin\varphi$. Επομένως μπορούμε να το γράψουμε ως:

$$\vec{r} = \rho(cos\varphi\vec{e}_x + sin\varphi\vec{e}_y)$$

Ομοίως το διάνυσμα θέσης του M′ σχηματίζει γωνία με τον άξονα x ίση με $-\varphi$ και έτσι μπορούμε να το γράψουμε ως:

$$\vec{r}' = \rho(cos\varphi\vec{e}_x - sin\varphi\vec{e}_y)$$

Επομένως το ζητούμενο εσωτερικό γινόμενο σύμφωνα με την Εξ. 2.9 είναι ίσο με

$$\vec{r}\cdot\vec{r}' = \rho^2(cos^2\varphi - sin^2\varphi)$$

όπου έγινε χρήση των αποτελεσμάτων $\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x = 1$, $\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y = 1$ και $\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y = 0$ για τα μοναδιαία (δείτε προηγούμενο πρόβλημα). Με την βοήθεια των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων

$$\vec{r}\cdot\vec{r}' = \rho^2 cos2\varphi = \rho^2 cos2\omega t$$

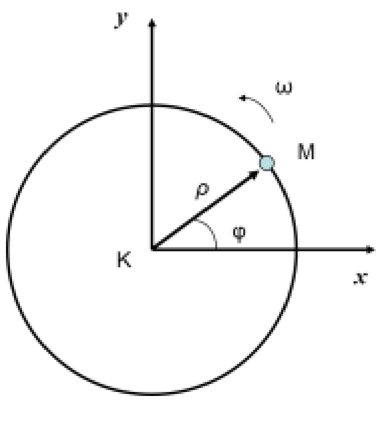
2ος τρόπος (εύκολος):

Η γωνία μεταξύ των δυο διανυσμάτων θέσης είναι ίση με 2φ και τα μέτρα τους είναι ίσα με ρ. Επομένως σύμφωνα με την Εξ. 2.9:

$$\vec{r}\cdot\vec{r}' = \rho^2 cos2\varphi = \rho^2 cos2\omega t$$

ίδιο όπως παραπάνω.

2.23 Ένας δίσκος ακτίνας ρ και αμελητέου πάχους περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Η ακτίνα ΚΜ σχηματίζει γωνία $\varphi = 0$ με τον άξονα x στο $t = 0$. Ένα έντομο κινείται με σταθερή ταχύτητα v_0 επάνω στην ακτίνα ΚΜ προς τα έξω. Εάν στο $t = 0$ το έντομο βρίσκεται στο σημείο Κ τότε να βρεθεί το διάνυσμα θέσης του (σε καρτεσιανές συντεταγμένες) σε τυχαίο χρόνο όπως κινείται επάνω στην ακτίνα ΚΜ (πριν να φτάσει στο σημείο Μ της περιφέρειας).



Λύση:

Η ακτίνα ρ σχηματίζει γωνία $\varphi = \omega t$ με τον άξονα-x οπότε ένα οποιοδήποτε σημείο επάνω της με απόσταση $\rho' < \rho$ από το κέντρο περιστροφής θα περιγράφεται από ένα διάνυσμα θέσης

$$\vec{r}' = \rho'(cos\varphi\vec{e}_x + sin\varphi\vec{e}_y)$$

Επειδή το έντομο κινείται με σταθερή ταχύτητα v_0 τότε η απομάκρυνσή του από το Κ ισούται με $\rho' = v_0 t$ και έτσι

$$\vec{r}' = v_0 t\left(cos\varphi\vec{e}_x + sin\varphi\vec{e}_y\right) = v_0 t\left(cos\omega t\vec{e}_x + sin\omega t\vec{e}_y\right)$$

Περισσότερο σύνθετες κινήσεις

2.24 Κινητό κινείται έτσι ώστε οι συντεταγμένες της ταχύτητάς του συναρτήσει του χρόνου να δίνονται από τις $v_x(t) = B$ και $v_y(t) = Ae^{-\lambda t}$ όπου A και B είναι θετικές σταθερές σε μονάδες m/s και $\lambda = 4\ s^{-1}$. Εάν το μέτρο της ταχύτητας σε πολύ μεγάλους χρόνους τείνει στην τιμή 4 m/s ενώ την χρονική στιγμή $t = 0$ αυτό το μέτρο είναι ίσο με 5 m/s και το κινητό βρίσκεται στο σημείο (2,0), να βρεθεί η τροχιά του κινητού και να γίνει η γραφικής της παράσταση.

Απάντηση: Εκθετική αύξηση, περνάει από τα $(0, -4.8)$ και $(2, 0)$ και τείνει στην τιμή 0.75

Λύση:

Το μέτρο της ταχύτητας ισούται με

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{B^2 + A^2e^{-2\lambda t}}$$

και αφού για μεγάλους χρόνους $t \to \infty$ ο δεύτερος όρος στην υπόριζο ποσότητα μηδενίζεται έχουμε

$$4 = \sqrt{B^2} => B = \pm 4$$

Η B είναι θετική σταθερά οπότε κρατάμε μόνο το $B = 4\,m/s$. Στο $t = 0$ το μέτρο είναι ίσο με 5 m/s οπότε

$$5 = \sqrt{4^2 + A^2e^0} => A = \pm 3$$

Η A είναι θετική σταθερά οπότε κρατάμε μόνο το $A = 3\,m/s$. Οι συντεταγμένες του κινητού βρίσκονται από ολοκλήρωση των αντίστοιχων συντεταγμένων της ταχύτητας

$$x = \int 4dt = 4t + c_x$$

$$y = \int 3e^{-4t}dt = -\frac{3}{4}e^{-4t} + c_y$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε $x(0) = 2$ και $y(0) = 0$ που οδηγούν στα αποτελέσματα $c_x = 2$ και $c_y = 3/4$. Έτσι

$$x = 4t + 2$$

$$y = \frac{3}{4}(1 - e^{-4t})$$

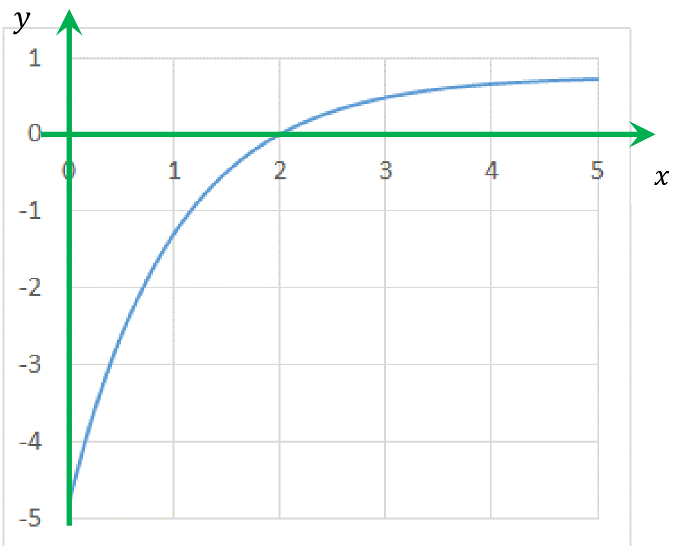
Για να βρούμε τη τροχιά του κινητού πρέπει να απαλείψουμε τον χρόνο t στα x και y ώστε να προκύψει μια σχέση μεταξύ τους. Είναι πιο εύκολο να απαλείψουμε το t από τη πρώτη σχέση:

$$t = \frac{x - 2}{4}$$

η οποία όταν αντικατασταθεί στη δεύτερη, οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$y = \frac{3}{4}(1 - e^{2-x}) = \frac{3}{4}(1 - ce^{-x})$$

όπου $c = e^2$. Η παραπάνω σχέση μεταξύ y και x είναι μονοτόνως αύξουσα αφού τέτοια συμπεριφορά έχει το εκθετικό. Η σχέση αυτή ικανοποιεί όπως αναμένεται την αρχική συνθήκη $x = 2$ και $y = 0$ αλλά υπάρχουν και δυο άλλα εύκολα ζευγάρια τιμών που αντιστοιχούν στο $x = 0$ με $y = 3/4(1 - e^2) \approx -4.8$ και στο $x \to \infty$ με $y = 3/4 = 0.75$. Έτσι η γραφική παράσταση ξεκινάει από το $(x, y) = (-4.8{,}0)$, περνάει από το $(0{,}2)$ και τείνει στην τιμή 0.75 όπως φαίνεται παρακάτω:



2.25 Κινητό κινείται έτσι ώστε οι συντεταγμένες της ταχύτητά του συναρτήσει του χρόνου να δίνονται από τις $v_x(t) = A/\sqrt{t}$ και $v_y(t) = B$ όπου A και B είναι σταθερές με κατάλληλες μονάδες. Το μέτρο της ταχύτητας σε πολύ μεγάλους χρόνους τείνει στην τιμή $\sqrt{2}\, m/s$, ενώ η εφαπτομένη της γωνίας της την χρονική στιγμή $t = 1$ είναι ίση με $1/2.5$. Εάν την χρονική στιγμή $t = 0$ το κινητό βρίσκεται στο σημείο $(0, 2.2)$, να βρεθεί η τροχιά του κινητού και να γίνει η γραφικής της παράσταση.

Απάντηση: Παραβολή συμμετρικής ως προς τον άξονα y, με κορυφή $(0, 2.2)$

Λύση:

Το μέτρο της ταχύτητας ισούται με

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{\frac{A^2}{t} + B^2}$$

και αφού για μεγάλους χρόνους $t \to \infty$ ο πρώτος όρος στην υπόριζο ποσότητα μηδενίζεται έχουμε

$$\sqrt{B^2} = \sqrt{2} > B = \pm\sqrt{2}$$

Από την εφαπτομένη της γωνίας της ταχύτητας στο $t = 1$ παίρνουμε

$$tan\theta = \frac{v_y}{v_x} => \frac{1}{2.5} = \frac{B}{\frac{A}{1}} => A = 2.5B = \pm 2.5\sqrt{2}$$

Οι συντεταγμένες του κινητού βρίσκονται από ολοκλήρωση των αντίστοιχων συντεταγμένων της ταχύτητας

$$x = \int \frac{A}{\sqrt{t}} dt + c_1 = 2A\sqrt{t} + c_1$$

$$y = \int B dt + c_2 = Bt + c_2$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε $x(0) = 0$ και $y(0) = 2.2$ που οδηγούν στα αποτελέσματα $c_1 = 0$ και $c_2 = 2.2$. Έτσι

$$x = 2A\sqrt{t} = \pm 2\sqrt{2t}$$

$$y = Bt + 2.2 = \pm 2.5\sqrt{2}t + 2.2$$

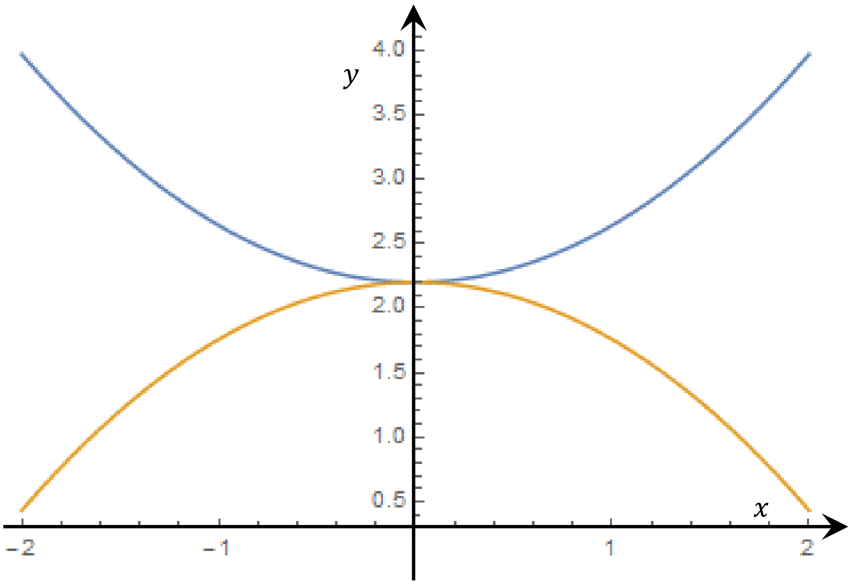
Για να βρούμε τη τροχιά του κινητού πρέπει να απαλείψουμε τον χρόνο t στα x και y ώστε να προκύψει μια σχέση μεταξύ τους. Έτσι από την πρώτη σχέση έχουμε

$$t = x^2/8$$

η οποία όταν αντικατασταθεί στη δεύτερη, οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$y = \pm\sqrt{2}\frac{2.5}{8}x^2 + 2.2$$

η οποία είναι εξίσωση παραβολής συμμετρικής ως προς τον άξονα y, με αρχικό σημείο $(0,2.2)$ επάνω στον άξονα y και με φορά προς τα πάνω ή προς τα κάτω ανάλογα με το πρόσημο. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.



2.26 Μικρό σώμα μάζας m κινείται μέσα σε βαρυτικό πεδίο με σταθερά g και επιπλέον κάτω από την επίδραση μιας δύναμης με συνιστώσες $F_x = 2\kappa m$ και $F_y = 12\lambda m t^2$ όπου κ και λ είναι θετικές σταθερές σε κατάλληλες μονάδες και t ο χρόνος. Το σώμα αφήνεται αρχικά από ύψος h επάνω στον άξονα y από την ηρεμία. Να βρεθεί η τροχιά του σώματος για $t \geq 0$ σε μορφή γραφικής παράστασης (σχηματικά μόνο αλλά πρέπει να φαίνονται σε αυτήν τα βασικά χαρακτηριστικά)

<u>Απάντηση</u>: Παραβολή, ξεκινάει από το $(0, h)$, παίρνει μόνο θετικές τιμές, ελάχιστο στο $x = g\kappa/4\lambda$, για $x \to \infty$ τείνει στο άπειρο.

<u>Λύση</u>:

Λαμβάνοντας επιπλέον και την βαρύτητα, η επιτάχυνση του σώματος έχει συνιστώσες

$$a_x = \frac{F_x}{m} = 2\kappa$$

$$a_y = \frac{F}{m} = 12\lambda t^2 - g$$

Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας

$$v_x = 2\kappa t + c_1$$

$$v_y = 4\lambda t^3 - gt + c_2$$

Αφού αρχικά το σώμα αφήνεται από την ηρεμία, τότε $c_1 = c_2 = 0$. Ολοκληρώνοντας ακόμη μια φορά, βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σώματος

$$x = \kappa t^2 + c_3$$

$$y = \lambda t^4 - g\frac{t^2}{2} + c_4$$

Από τα δεδομένα, έχουμε για $t = 0$ ότι $x(0) = 0$ και $y(0) = h$ οπότε $c_3 = 0$ και $c_4 = h$. Έτσι

$$x = \kappa t^2$$

$$y = \lambda t^4 - g\frac{t^2}{2} + h$$

Από την πρώτη, μπορούμε να λύσουμε εύκολα ως προς t^2

$$t^2 = x/\kappa$$

και να αντικαταστήσουμε στην δεύτερη ώστε να έχουμε

$$y = \frac{\lambda}{\kappa^2}x^2 - \frac{g}{2\kappa}x + h$$

Αυτή είναι η εξίσωση μιας παραβολής. Για μικρά x υπερισχύει μόνο ο γραμμικός όρος και έτσι

$$y \approx -\frac{g}{2\kappa}x + h$$

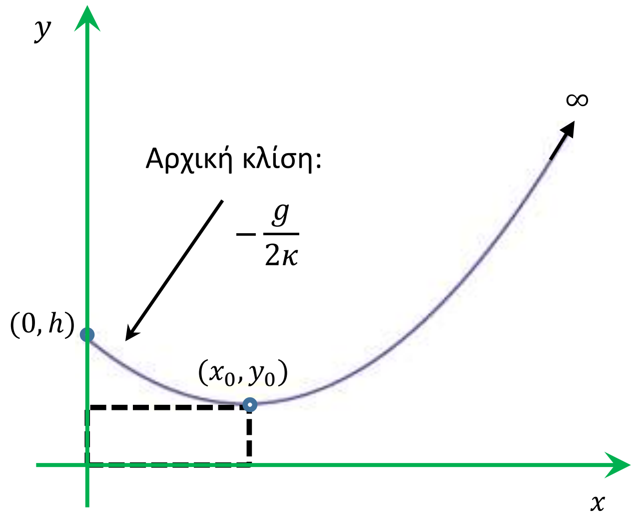
η οποία είναι εξίσωση ευθείας με κλίση $-g/2\kappa$ (προς τα κάτω). Για μεγαλύτερα x, ο τετραγωνικός όρος υπερισχύει και θα "στρίψει" την γραφική παράσταση προς τα επάνω. Έτσι θα υπάρχει ένα ελάχιστο με συντεταγμένες (x_0, y_0). Για πολύ μεγάλα x, το y θα τείνει στο άπειρο ως $y \approx \lambda x^2/\kappa^2$. Το ελάχιστο μπορεί να βρεθεί με απλή παραγώγιση:

$$\frac{dy}{dx} = 0 => \frac{2\lambda}{\kappa^2}x_0 - \frac{g}{2\kappa} = 0 => x_0 = \frac{g\kappa}{4\lambda}$$

Το αντίστοιχο y είναι το

$$y_0 = \frac{\lambda}{\kappa^2}{x_0}^2 - \frac{g}{2\kappa}x_0 + h = \frac{\lambda}{\kappa^2}\left(\frac{g\kappa}{4\lambda}\right)^2 - \frac{g}{2\kappa}\frac{g\kappa}{4\lambda} + h = \frac{g^2}{8\lambda} + h \geq 0$$

Οπότε η γραφική παράσταση θα είναι κάπως έτσι:



2.27 Μικρό σώμα μάζας m κινείται τις δυο διαστάσεις κάτω από την επίδραση μιας μοναδικής δύναμης με συνιστώσες $F_x = 6\kappa m t^2 - 2m\lambda$ και $F_y = 12m\lambda$ όπου κ και λ είναι θετικές σταθερές σε κατάλληλες μονάδες και t ο χρόνος. Το σώμα αφήνεται αρχικά από την ηρεμία επάνω στον άξονα x στο σημείο $x = h$. Να βρεθεί η τροχιά του σώματος για χρόνους $t \geq 0$ σε μορφή γραφικής παράστασης <u>x συναρτήσει του y</u> και όχι αντίστροφα (σχηματικά μόνο αλλά πρέπει να φαίνονται σε αυτήν τα βασικά χαρακτηριστικά)

<u>Απάντηση</u>: Παραβολή, ξεκινάει από το $(y, x) = (0, h)$, παίρνει μόνο θετικές τιμές, ελάχιστο στο $y = 2\lambda^2/\kappa$, για $y \to \infty$ τείνει στο άπειρο.

<u>Λύση</u>:

Η επιτάχυνση του σώματος έχει συνιστώσες

$$a_x = \frac{F_x}{m} = 6\kappa t^2 - 2\lambda$$

$$a_y = \frac{F}{m} = 12\lambda$$

Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας

$$v_x = 2\kappa t^3 - 2\lambda t + c_1$$

$$v_y = 12\lambda t + c_2$$

Αφού αρχικά το σώμα αφήνεται από την ηρεμία, τότε $c_1 = c_2 = 0$. Ολοκληρώνοντας ακόμη μια φορά, βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σώματος

$$x = \frac{\kappa}{2} t^4 - \lambda t^2 + c_3$$

$$y = 6\lambda t^2 + c_4$$

Από τα δεδομένα, έχουμε για $t = 0$ ότι $x(0) = h$ και $y(0) = 0$ οπότε $c_3 = h$ και $c_4 = 0$. Έτσι

$$x = \frac{\kappa}{2}t^4 - \lambda t^2 + h$$

$$y = 6\lambda t^2$$

Από την δεύτερη, μπορούμε να λύσουμε εύκολα ως προς t^2

$$t^2 = \frac{y}{6\lambda}$$

και να αντικαταστήσουμε στην πρώτη ώστε να έχουμε

$$x = \frac{\kappa}{2}\left(\frac{y}{6\lambda}\right)^2 - \lambda\frac{y}{6\lambda} + h$$

$$x = \frac{\kappa}{72\lambda^2}y^2 - \frac{1}{6}y + h$$

Αυτή είναι η εξίσωση μιας παραβολής ως προς x όμως αντί για y. Για μικρά y υπερισχύει μόνο ο γραμμικός όρος και έτσι

$$x \approx -\frac{1}{6}y + h$$

η οποία είναι εξίσωση ευθείας με κλίση $-1/6$ (προς τα κάτω). Για μεγαλύτερα y, ο τετραγωνικός όρος υπερισχύει και θα "στρίψει" την γραφική παράσταση προς τα επάνω. Έτσι θα υπάρχει ένα ελάχιστο με συντεταγμένες (y_0, x_0). Για πολύ μεγάλα y, το x θα τείνει στο άπειρο ως $x \approx \kappa y^2/72\lambda^2$. Το ελάχιστο μπορεί να βρεθεί με απλή παραγώγιση:

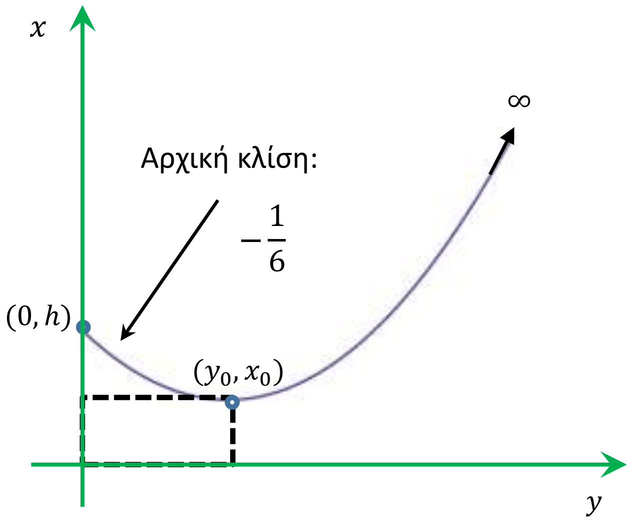
$$\frac{dx}{dy} = 0 => \frac{\kappa}{6\lambda^2}y_0 - 1 = 0 => y_0 = \frac{6\lambda^2}{\kappa}$$

Το αντίστοιχο x είναι το

$$x = \frac{\kappa}{72\lambda^2}\left(\frac{6\lambda^2}{\kappa}\right)^2 - \frac{1}{6}\frac{6\lambda^2}{\kappa} + h$$

$$x_0 = -\frac{\lambda^2}{2\kappa} + h$$

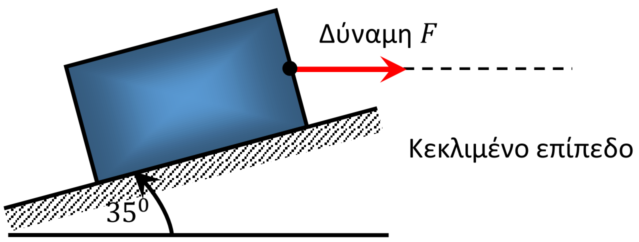
Οπότε η γραφική παράσταση θα είναι κάπως έτσι:



x
∞
Αρχική κλίση:
$-\frac{1}{6}$
$(0, h)$
(y_0, x_0)
y

3. ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

3.1 Στο παρακάτω σχήμα ένας φοιτητής εφαρμόζει μια οριζόντια δύναμη F σε ένα κιβώτιο μάζας $m = 1.5\ kg$. Θεωρήστε ότι το κιβώτιο παραμένει σε ισορροπία σε όλα τα παρακάτω ερωτήματα: (α) Εάν δεν υπάρχει τριβή μεταξύ του επιπέδου και του κιβωτίου, να βρεθεί η τιμή της F καθώς και της κάθετης αντίδρασης N από το επίπεδο στο κιβώτιο. (β) Εάν υπάρχει στατική τριβή μεταξύ του επιπέδου και του κιβωτίου με φορά προς τα πάνω, και $F = 2\ N$ να βρεθεί η δύναμη της τριβής T καθώς και η κάθετη αντίδραση N και (γ) Εάν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του επιπέδου και του κιβωτίου είναι $\mu_S = 0.65$, να βρεθεί η ελάχιστη δύναμη F που μπορεί να εφαρμόσει ο φοιτητής πριν το κιβώτιο να αρχίσει να ολισθαίνει προς τα κάτω. Μπορείτε να πάρετε $g \approx 10\ m/s^2$ για ευκολία.



<u>Απάντηση</u>: (α) 10.5 & 18.3 N, (β) 6.96 & 23.8 N και (γ) 0.517 N

<u>Λύση</u>:

(α) Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η δύναμη F μπορεί να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες, την $F_1 = Fcos35^0$ κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου και την $F_2 = Fsin35^0$ κάθετα σε αυτή. Ομοίως το βάρος $B = mg$ αναλύεται σε δυο συνιστώσες, την $B_1 = Bsin35^0$ κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου και την $B_2 = Bcos35^0$ κάθετα σε αυτή. Επιπλέον στο σώμα ασκείται η κάθετη αντίδραση N από το δάπεδο και η τριβή (στα παρακάτω υποερωτήματα. Από την ισορροπία των δυνάμεων κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου έχουμε

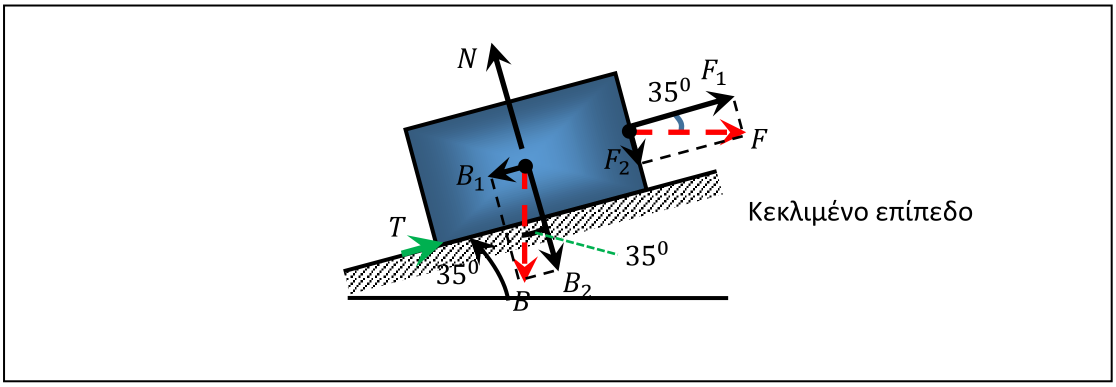
$$F_1 - B_1 - T = 0$$

Όμως στο παρόν ερώτημα $T = 0$ και έτσι

$$Fcos35^0 - Bsin35^0 = 0 => F = mgtan35^0 = 1.5 \times 10 \times tan35^0 = 10.5\ N$$

Στην κάθετη διεύθυνση, η ισορροπία δυνάμεων οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$N - F_2 - B_2 = 0 => N = Fsin35^0 + mgcos35^0 = 18.3\ N$$



(β) Οι εξισώσεις είναι όπως παραπάνω με τη διαφορά ότι εδώ $T \neq 0$. Έτσι κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου έχουμε

$$Fcos35^0 - Bsin35^0 + T = 0 => T = 15sin35^0 - 2cos35^0 = 6.96\ N$$

Στην κάθετη διεύθυνση, η ισορροπία δυνάμεων οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$N - Fsin35^0 - mgcos35^0 = 0 => N = 20sin35^0 + 15cos35^0 = 23.8\ N$$

(γ) Όπως αναφέρθηκε και στο βιβλίο στο εδάφιο περί στατικής τριβής T, η δύναμη αυτή αυτοπροσαρμόζεται τόσο κατά φορά όσο και κατά μέτρο μέχρι ενός ορίου ώστε να κρατήσει το σώμα ακίνητο. Στο παρόν πρόβλημα υπάρχον δυο περιπτώσεις όσον αφορά την φορά της T η οποία πάντα αντιτίθεται στην σχετική κίνηση του σώματος ως προς το δάπεδο. Όταν η F είναι μικρή, η συνιστώσα B_1 του βάρους τείνει να παρασύρει το σώμα προς τα κάτω και άρα η T είναι προς τα πάνω. Στο άλλο όριο που F είναι μεγάλη, η συνιστώσα της F_1 είναι που τείνει να παρασύρει το σώμα προς τα πάνω και άρα η T είναι προς τα κάτω. Σύμφωνα με τα δεδομένα, εδώ είμαστε στο πρώτο όριο και άρα η T είναι προς τα πάνω. Έτσι οι T και F_1 αντιτίθενται στην B_1 ώστε να ισχύει η ισορροπία δυνάμεων:

$$F_1 + T = B_1$$

Εφόσον η $B_1 = mgsin35^0$ είναι σταθερή, τότε όταν μειώνεται η F_1 (μειώνεται δηλαδή η F), αυξάνει η T και αντιστρόφως, ώστε το άθροισμά τους να είναι σταθερό. Άρα όταν η T πάρει την μέγιστη τιμή της που σύμφωνα με την Εξ. 3.5β είναι ίση με $\mu_S N$, η F πρέπει να πάρει την ελάχιστη τιμή της, έστω F_{min}. Η παραπάνω σχέση ισορροπίας τότε γίνεται:

$$F_{min}cos35^0 + \mu_S N = mgsin35^0$$

Για να λύσουμε ως προς F_{min}, πρέπει να βρούμε την N. Από την κάθετη συνθήκη ισορροπίας (ως προς το κεκλιμένο επίπεδο):

$$N = F_2 + B_2 = F_{min}sin35^0 + mgcos35^0$$

Απαλείφουμε το N από τις δυο τελευταίες εξισώσεις

$$F_{min}cos35^0 + \mu_S(F_{min}sin35^0 + mgcos35^0) = mgsin35^0 =>$$

Λύνοντας ως προς F_{min} οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$$F_{min} = mg\frac{sin35^0 - \mu_S cos35^0}{cos35^0 + \mu_S sin35^0}$$

Αντικαθιστώντας

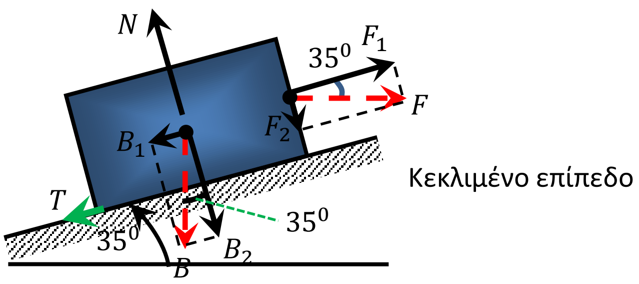
$$F_{min} = 0.517\ N$$

3.2 Στο προηγούμενο πρόβλημα να απαντηθεί το ερώτημα γ εάν η F είναι αρκετά μεγαλύτερη από την F_{min}, ώστε η στατική τριβή είναι προς τα κάτω, αλλά επίσης να παίρνει οριακή τιμή ώστε το σώμα να μην ολισθαίνει προς τα πάνω.

Απάντηση: 37.2 N

Λύση:

Σε αυτή την περίπτωση το μόνο που αλλάζει στο σχήμα του προηγούμενου προβλήματος είναι η φορά της τριβής T που είναι προς τα κάτω:



Οι αντίστοιχες συνθήκες ισορροπίας κατά μήκος και κάθετα προς το κεκλιμένο επίπεδο είναι οι εξής:

$$F_1 = T + B_1$$

$$N = F_2 + B_2$$

Στην οριακή περίπτωση η στατική T παίρνει την μέγιστη τιμή της $\mu_S N$. Αναλυτικά

$$Fcos35^0 = \mu_S N + mgsin35^0$$

$$N = Fsin35^0 + mgcos35^0$$

Απαλείφουμε το N από τις δυο τελευταίες εξισώσεις

$$Fcos35^0 = \mu_S(Fsin35^0 + mgcos35^0) + mgsin35^0 =>$$

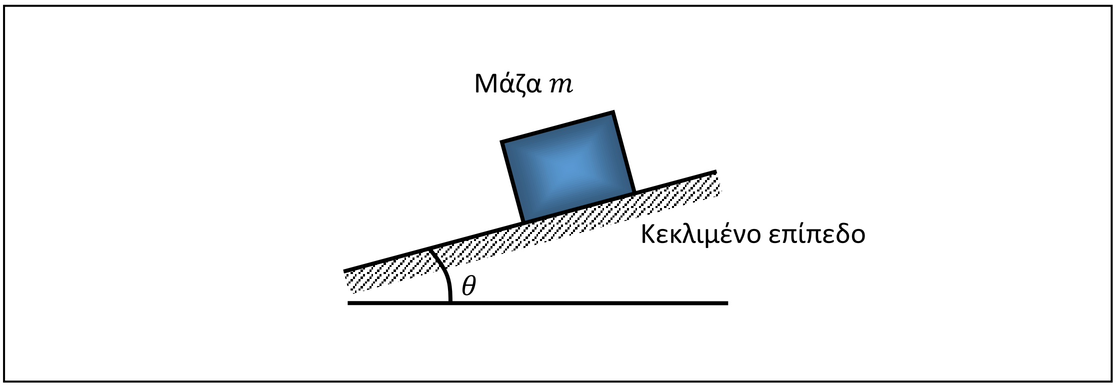
Λύνοντας ως προς F οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$$F = mg\frac{sin35^0 + \mu_S cos35^0}{cos35^0 - \mu_S sin35^0}$$

Αντικαθιστώντας

$$F = 37.2\ N$$

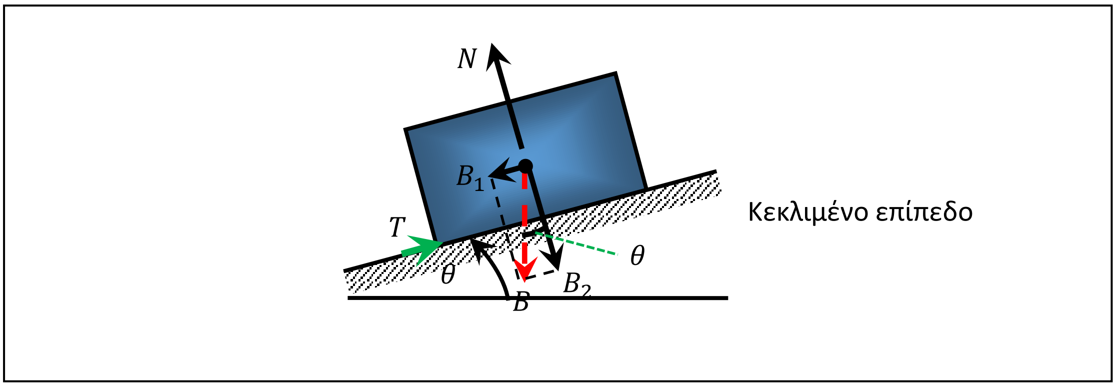
3.3 Στο παρακάτω σχήμα έστω ότι οι συντελεστές στατικής τριβής και τριβής ολίσθησης είναι $\mu_S = 1$ και $\mu = 0.5$ αντίστοιχα και $m = 2\ kg$. Ένας φοιτητής μεταβάλλει τη γωνία θ από 0^0 έως 60^0. Να γίνει η γραφική παράσταση της τριβής T συναρτήσει της γωνίας θ. Η τριβή είτε στατική είτε ολίσθησης να θεωρηθεί ως μια ενιαία μεταβλητή στη γραφική παράσταση. Μπορείτε να πάρετε $g \approx 10\ m/s^2$ για ευκολία.



<u>Απάντηση</u>: $20sin\theta$ για $\theta < 45\,^0$, $10cos\theta$ για $\theta \geq 45\,^0$

<u>Λύση</u>:

Οι δυνάμεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα



Η συνιστώσα $B_1 = Bsin\theta$ του βάρος τείνει να παρασύρει το σώμα προς τα κάτω οπότε και η τριβή έχει φορά προς τα πάνω. Όπως γνωρίζουμε από την καθημερινή μας εμπειρία, όταν η θ είναι μικρή, η B_1 είναι επίσης μικρή (η συνάρτηση ημιτόνου είναι αύξουσα για γωνίες μέχρι $\pi/2$) και έτσι η στατική τριβή αυτοπροσαρμόζεται ώστε να παραμένει το σώμα ακίνητο, χωρίς να έχει φτάσει στην οριακή της τιμή. Σε αυτή την περίπτωση οι εξισώσεις ισορροπίας κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου γίνονται

$$-Bsin\theta + T = 0 => T = Bsin\theta = mgsin\theta = 20sin\theta\ N$$

Σε κάποια κρίσιμη γωνία θ_0 όμως, η T θα πάρει την μέγιστη τιμή της που σύμφωνα με την Εξ. 3.5β είναι ίση με $\mu_S N$. Αντικαθιστώντας

$$\mu_S N = mgsin\theta_0$$

Για να βρούμε την τιμή της θ_0, πρέπει να απαλείψουμε το N από την εξίσωση ισορροπίας κατά την κάθετη διεύθυνση (ως προς το κεκλιμένο επίπεδο)

$$N - B_2 = 0 => N = mgcos\theta_0$$

Απαλείφουμε το N από τις δυο τελευταίες εξισώσεις

$$\mu_S mgcos\theta_0 = mgsin\theta_0 => \theta_0 = tan^{-1}\mu_S$$

Αντικαθιστώντας

$$\theta_0 = tan^{-1}(1.0) = 45\ ^0$$

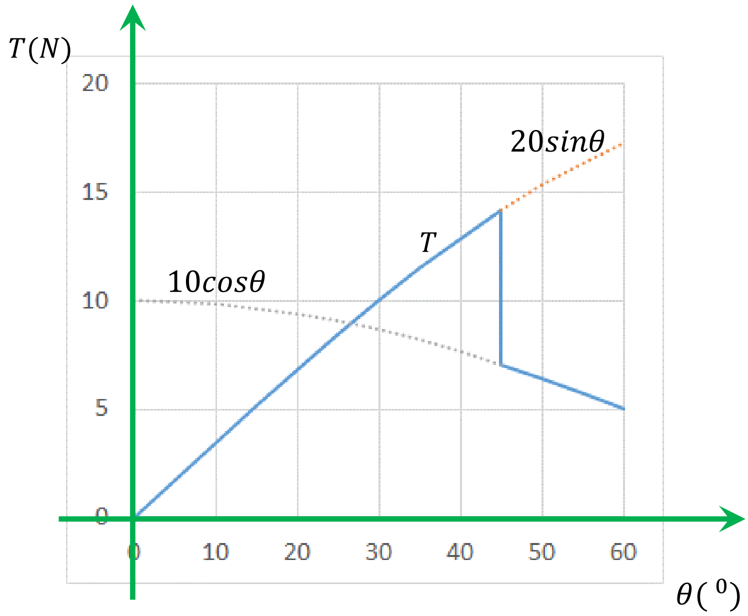
Πάνω από αυτή την κρίσιμη γωνία εμφανίζεται ολίσθηση οπότε και η τριβή αλλάζει σε τριβή ολίσθησης η οποία σύμφωνα με την Εξ. 3.4 ισούται με $T = \mu N$. Από την εξίσωση ισορροπίας κατά την κάθετη διεύθυνση (ως προς το κεκλιμένο επίπεδο)

$$N - B_2 = 0 => N = mgcos\theta$$

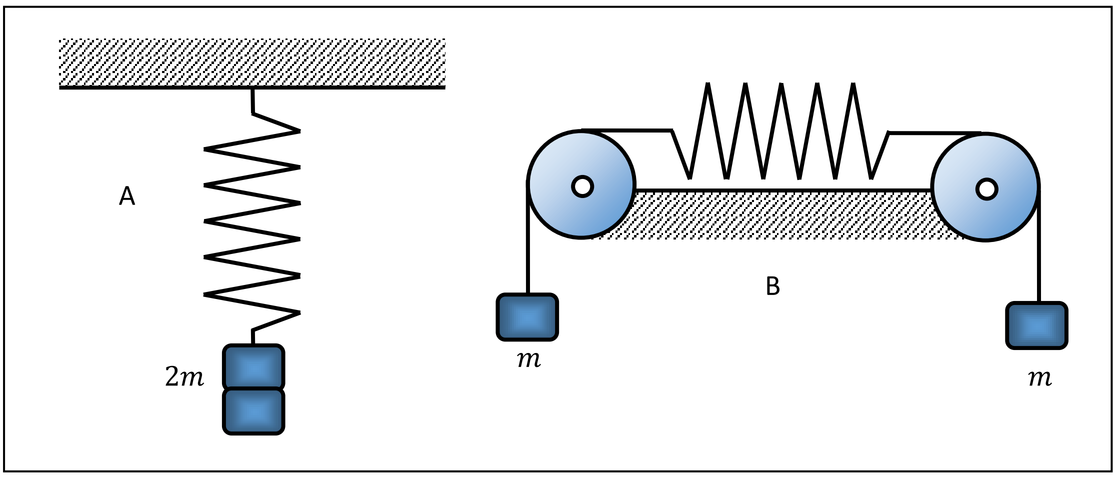
οπότε $T = \mu mgcos\theta = 0.5 \times 20cos\theta = 10cos\theta$. Συνοψίζοντας

$$T = \begin{cases} 20sin\theta, & \theta < 45\ ^0 \\ 10cos\theta, & \theta \geq 45\ ^0 \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση αυτής της δύναμης φαίνεται παρακάτω. Στις $45\ ^0$ η συνάρτηση αλλάζει συμπεριφορά. Οι συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου λαμβάνουν την ίδια τιμή $\sqrt{2}/2$ εκεί αλλά επειδή ο δεύτερος κλάδος της δικλαδικής συνάρτησης έχει το μισό πλάτος από ότι ο πρώτος κλάδος, η T πέφτει στο μισό στην οριακή τιμή των $45\ ^0$.



3.4 Στο παρακάτω σχήμα βλέπετε το ίδιο ελατήριο και τις ίδιες δυο μάζες m σε δυο διαφορετικούς συνδυασμούς. Τα νήματα και οι τροχαλίες είναι ιδανικά. (α) Να σχεδιαστούν όλες οι δυνάμεις των συστημάτων ελατηρίου-μαζών να υπολογισθούν τα μέτρα τους εάν είναι γνωστό ότι υπάρχει παντού ισορροπία και κάνοντας χρήση και του 3^{ου} νόμου του Νεύτωνα σε διάφορα σημεία επαφής μεταξύ διαφορετικών σωμάτων. (β) Εάν η παραμόρφωση του ελατηρίου στην περίπτωση Α είναι ίση με x, να βρεθεί πόση είναι στην περίπτωση Β.



Απάντηση: $x_B = x_A/2$

Λύση:

(α) Οι δυνάμεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Για ευκολία απεικόνισης, μετατοπίστηκαν οι μάζες για να σχεδιαστούν οι δυνάμεις καλύτερα

Περίπτωση Α: Στις δυο μάζες ασκείται το βάρος τους $2mg$ και η δύναμη ανάρτησης F_1 από το ελατήριο. Εφόσον οι μάζες ισορροπούν, τότε κατά μέτρο

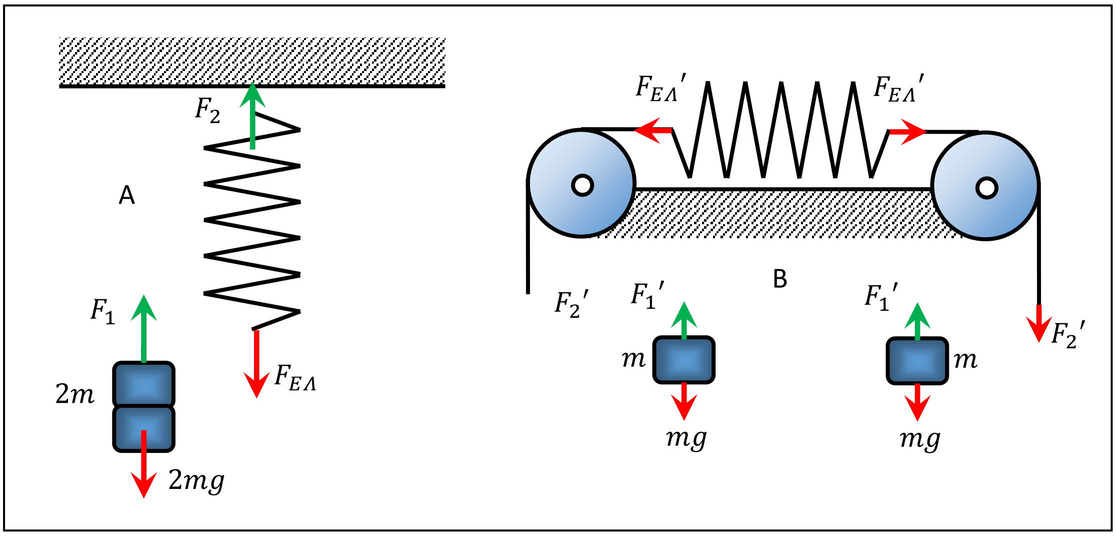
$$F_1 = 2mg$$

Η δύναμη $F_{EΛ}$ είναι η έλξη που αισθάνεται το ελατήριο λόγω του βάρους των δυο μαζών και αυτή η δύναμη μαζί με την F_1 δρουν στο ίδιο σημείο επαφής ελατηρίου-μαζών και οπότε σύμφωνα με την Εξ. 3.10 ισχύει κατά μέτρο ότι

$$F_{EΛ} = F_1 = 2mg$$

Η δύναμη F_2 είναι η έλξη που αισθάνεται το ελατήριο από την οροφή και αφού το ελατήριο ισορροπεί, τότε

$$F_2 = F_{EΛ} = 2mg$$



Περίπτωση Β: Εδώ το σύστημα είναι τελείως συμμετρικό δεξιά – αριστερά και έτσι θα δρουν οι ίδιες ακριβώς δυνάμεις και στις δυο μεριές. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, σε κάθε μάζα ασκείται το βάρος της mg και η δύναμη ανάρτησης F_1' από το κατακόρυφο νήμα. Εφόσον οι μάζες ισορροπούν, τότε κατά μέτρο

$$F_1' = mg$$

Η δύναμη F_2' είναι η έλξη που αισθάνεται το κατακόρυφο νήμα λόγω του βάρους της κάθε μάζας και αυτή η δύναμη μαζί με την F_1' δρουν στο σημείο επαφής νήματος – μάζας και οπότε σύμφωνα με την Εξ. 3.10 ισχύει κατά μέτρο ότι

$$F_2' = F_1' = mg$$

Επειδή η τροχαλία είναι ιδανική, τότε απλά μεταφέρει την δύναμη F_2' στην άλλη της μεριά (δηλαδή απλά της αλλάζει διεύθυνση χωρίς να επηρεάζει το μέτρο της) και έτσι η δύναμη $F_{EΛ}'$ που είναι η έλξη που αισθάνεται το ελατήριο λόγω της έλξης του οριζόντιου νήματος, είναι ίση με την F_2', δηλαδή

$$F_{EΛ}' = F_2' = mg$$

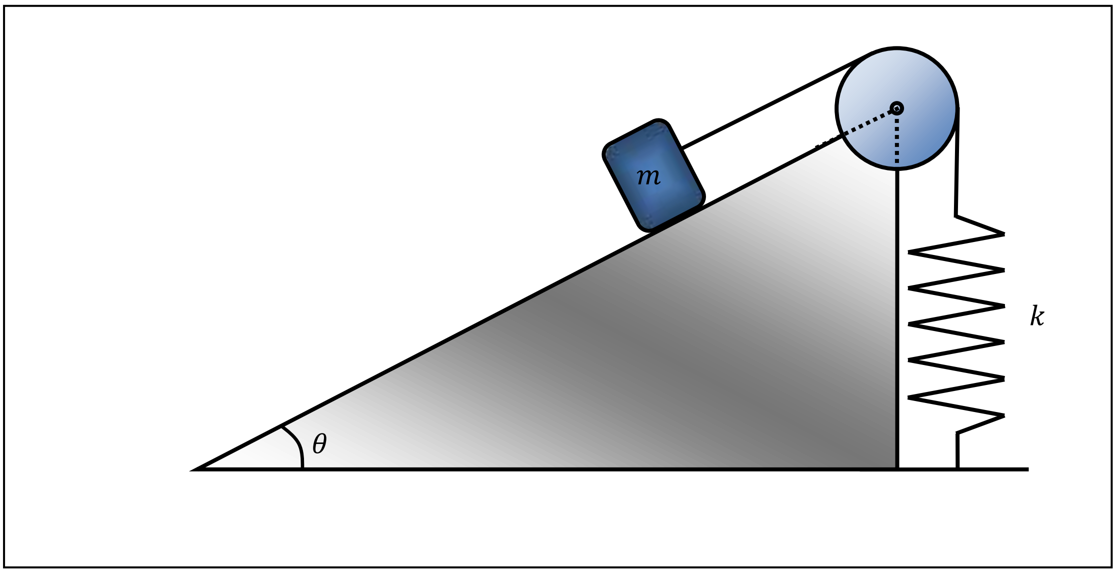
Στην περίπτωση Α η δύναμη του ελατηρίου είναι ίση με $2mg$. Από τον νόμο του *Hook* Εξ. 3.7, έχουμε κατά μέτρο $F_{EΛ} = kx$. Εξισώνοντας

$$kx = 2mg => x = \frac{2mg}{k}$$

Όσον αφορά στο ελατήριο, οι δυο περιπτώσεις Α και Β δεν διαφέρουν καθόλου. Και στις δυο περιπτώσεις, το ελατήριο βλέπει δυο ίσες και αντίθετες δυνάμεις στα δυο άκρα του να το παραμορφώνουν. Στην περίπτωση Β όμως, οι δυνάμεις αυτές είναι οι μισές από τις αντίστοιχες δυνάμεις της περίπτωσης Α και άρα και από τον νόμο του *Hook* και η παραμόρφωση είναι αντίστοιχα η μισή

$$x' = \frac{mg}{k}$$

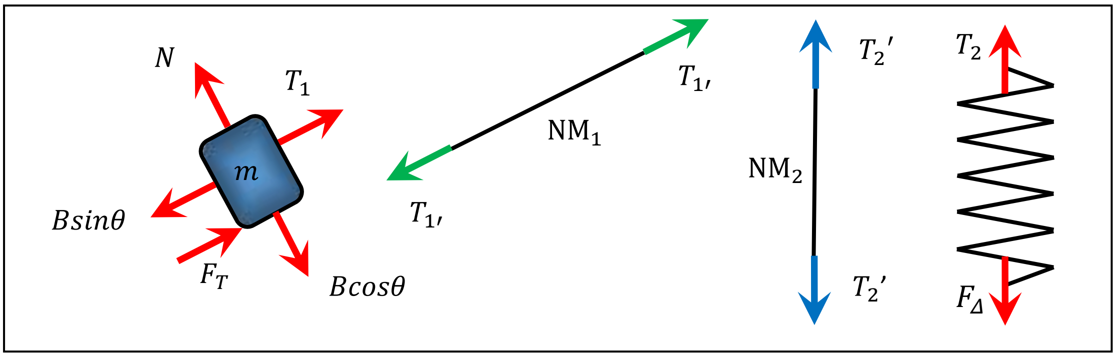
3.5 Στο παρακάτω σχήμα έστω ότι $\theta = 42^0$, η σταθερά του ελατηρίου ισούται με $k = 3\ N/m$ και υπάρχει συντελεστής στατικής τριβής $\mu = 0.4$ μεταξύ του κεκλιμένου επιπέδου και της μάζας m. Η τροχαλία είναι ιδανική ενώ το ελατήριο είναι αβαρές και σταθερά προσδεμένο στο έδαφος με παραμόρφωση $x = 0.4\ m$ προς τα πάνω σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Εάν το όλο σύστημα ισορροπεί και η στατική τριβή είναι προς τα πάνω και στο οριακό της σημείο, (α) να σχεδιασθούν και να εξηγηθούν όλες οι δυνάμεις του συστήματος, (β) να βρεθεί η μάζα m και (γ) να βρεθεί η κάθετη αντίδραση που ασκείται στη μάζα m. Πάρτε για ευκολία $g = 10\ m/s^2$.



<u>Απάντηση</u>: (β) $0.323\ kg$, (γ) $3.31\ N$

<u>Λύση</u>:

(α) Στο παρακάτω σχήμα εξετάζεται το κάθε σώμα και οι δυνάμεις του ξεχωριστά. Για ευκολία χωρίζουμε το νήμα σε δυο κομμάτια NM_1, NM_2 και αγνοούμε την τροχαλία που είναι ιδανική επειδή απλά αλλάζει την κατεύθυνση των δυνάμεων.



Ξεκινώντας από δεξιά προς τα αριστερά έχουμε τις εξής δυνάμεις:

-Ελατήριο: Ασκούνται δυο δυνάμεις, η δύναμη επιμήκυνσης T_2 από επάνω και η αντίδραση του δαπέδου F_Δ από κάτω.

-Νήμα NM_2: Στο κάτω άκρο του ασκείται μια δύναμη $T_2{}'$ από το ελατήριο και στο πάνω από τη τροχαλία. Επειδή πρόκειται για ιδανικό νήμα, αυτές οι δυο δυνάμεις είναι ίσες. Επίσης λόγω δράσης αντίδρασης $T_2 = T_2{}'$ (κατά μέτρο).

-Νήμα NM_1: Ομοίως στο κάτω άκρο του ασκείται μια δύναμη $T_1{}'$ από τη μάζα m και στο πάνω από τη τροχαλία. Επειδή πρόκειται για ιδανικό νήμα, αυτές οι δυο δυνάμεις είναι ίσες.

-Μάζα m: Εδώ τα πράγματα είναι κάπως πιο πολύπλοκα. Αρχικά πρέπει να συμπεριλάβουμε το βάρος της $B = mg$ το οποίο το αναλύουμε σε δυο συνιστώσες όπως έχουμε δει και σε προηγούμενα παραδείγματα. Επιπλέον έχουμε την τάση του νήματος T_1 για την οποία λόγω δράσης-αντίδρασης ισχύει $T_1 = T_1{}'$ (κατά μέτρο). Επίσης το κεκλιμένο επίπεδο ασκεί δυο δυνάμεις στην m, την κάθετη αντίδραση N και την στατική τριβή F_T η οποία είναι προς τα πάνω εφόσον η m_1 τείνει προς τα κάτω και αφού η ισορροπία είναι οριακή, λαμβάνει την μέγιστη τιμή της $F_T = \mu_S N_1$.

(β) Εφόσον η τροχαλία είναι ιδανική, οι δυνάμεις $T_1{}'$ και $T_2{}'$ που ασκούνται σε αυτήν από τις δυο πλευρές της είναι ίσες. Συγκεντρώνοντας όλες την πληροφορίες για τις τάσεις του νήματος έχουμε $T_1 = T_1' = T_2' = T_2$. Για ευκολία θα τις ονομάσουμε όλες T. Οι δυνάμεις T_2 και F_Δ είναι ίσες ώστε να ισορροπεί το ελατήριο αλλά εδώ μας ενδιαφέρει η παραμόρφωσή του οπότε θα χρησιμοποιήσουμε τον νόμο του Hook σύμφωνα με την Εξ. 3.6:

$$T_2 = kx => T = kx$$

Στην μάζα m έχουμε δυο κατευθύνσεις. Ως προς κάθετη προς την κίνηση κατεύθυνση, η μάζα ισορροπεί και έτσι από την Εξ. 3.9 οι δυνάμεις πρέπει να αλληλοαναιρούνται που σημαίνει ότι $N = Bcos\theta$. Η στατική τριβή γίνεται $F_T = \mu_S N = \mu_S Bcos\theta$. Ως προς την κατεύθυνση της κίνησης, η ισορροπία στην μάζα m μας δίνει

$$T_1 - Bsin\theta + F_T => T - Bsin\theta + F_T = 0$$

Απαλείφοντας την T από τις δυο τελευταίες εκφράσεις ισορροπίας και αντικαθιστώντας, οδηγεί στην

$$\mu mgcos42^0 - mgsin42^0 + kx = 0 =>$$

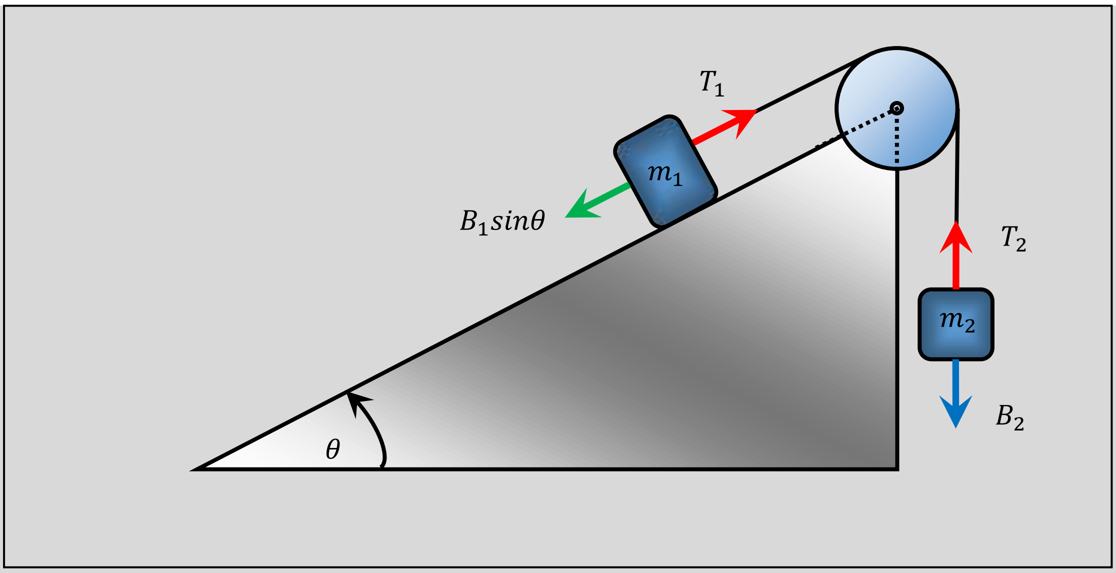
Η μάζα m είναι η μόνη άγνωστη στην παραπάνω σχέση οπότε λύνουμε ως προς αυτή:

$$m = \frac{kx}{g(sin42^0 - \mu cos42^0)} = \frac{3 \times 0.4}{10(sin42^0 - 0.4 \times cos42^0)} = 0.323\ kg$$

(γ) Από τα παραπάνω

$$N = mgcos42^0 = 0.323 \times 10 \times cos42^0 = 2.40\ N$$

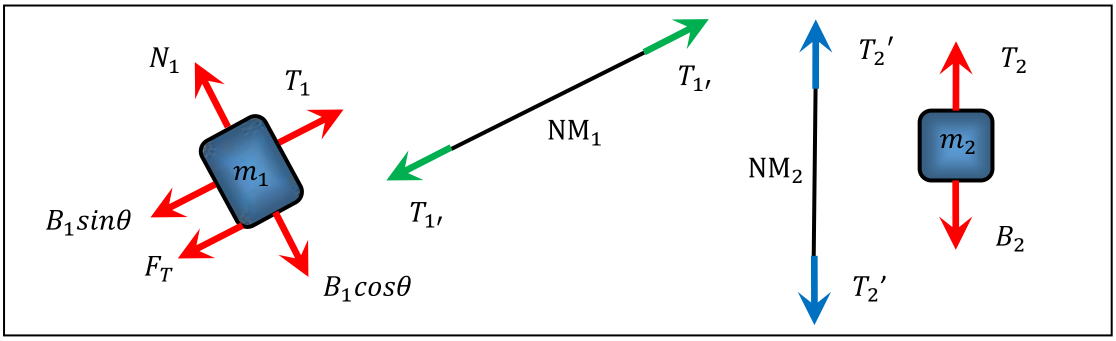
3.6 Στο παρακάτω σχήμα $m_2 = 2m_1$, $\theta = 30^0$ και υπάρχει στατική τριβή μεταξύ κεκλιμένου επιπέδου και μάζας με συντελεστή μ_S. Η τροχαλία είναι ιδανική και το όλο σύστημα ισορροπεί οριακά, δηλαδή εάν η $m_2 > 2m_1$ τότε η m_2 θα έτεινε προς τα κάτω. Κάνοντας χρήση της συνθήκης ισορροπίας αλλά και του 3^{ου} νόμου του Νεύτωνα σε διάφορα σημεία επαφής μεταξύ διαφορετικών σωμάτων, (α) να σχεδιασθούν και να εξηγηθούν όλες οι δυνάμεις του συστήματος και (β) να βρεθεί ο συντελεστής μ_S. Πάρτε για ευκολία $g = 10\ m/s^2$.



<u>Απάντηση</u>: (β) $\sqrt{3}$

<u>Λύση</u>:

(α) Στο παρακάτω σχήμα εξετάζεται το κάθε σώμα και οι δυνάμεις του ξεχωριστά. Για ευκολία χωρίζουμε το νήμα σε δυο κομμάτια NM_1, NM_2 και αγνοούμε την τροχαλία που είναι ιδανική επειδή απλά αλλάζει την κατεύθυνση των δυνάμεων.



Ξεκινώντας από δεξιά προς τα αριστερά έχουμε τις εξής δυνάμεις:

-Μάζα m_2: Ασκούνται δυο δυνάμεις, το βάρος της $B_2 = m_2 g$ και η τάση του νήματος T_2.

-Νήμα NM_2: Στο κάτω άκρο του ασκείται μια δύναμη $T_2{}'$ από η μάζα m_2 και στο πάνω από τη τροχαλία. Επειδή είναι ιδανικό νήμα, αυτές οι δυο δυνάμεις είναι ίσες. Επίσης λόγω δράσης αντίδρασης $T_2 = T_2{}'$ (κατά μέτρο).

-Νήμα NM_1: Ομοίως στο κάτω άκρο του ασκείται μια δύναμη $T_1{}'$ από τη μάζα m_1 και στο πάνω από τη τροχαλία. Αυτές οι δυο δυνάμεις είναι ίσες.

-Μάζα m_1: Εδώ τα πράγματα είναι κάπως πιο πολύπλοκα. Αρχικά πρέπει να συμπεριλάβουμε το βάρος της $B_1 = m_1 g$ το οποίο το αναλύουμε σε δυο συνιστώσες όπως έχουμε δει και σε προηγούμενα παραδείγματα. Επιπλέον έχουμε την τάση του νήματος T_1 για την οποία λόγω δράσης-αντίδρασης ισχύει $T_1 = T_1{}'$ (κατά μέτρο). Επίσης το κεκλιμένο επίπεδο ασκεί δυο δυνάμεις στην m_1, την κάθετη αντίδραση N_1και την στατική τριβή F_T η οποία είναι προς τα κάτω εφόσον η m_2 τείνει να παρασύρει το σύστημα και αφού η ισορροπία είναι οριακή, λαμβάνει την μέγιστη τιμή της $F_T = \mu_S N_1$.

(β) Εφόσον η τροχαλία είναι ιδανική, οι δυνάμεις $T_1{}'$ και $T_2{}'$ που ασκούνται σε αυτήν από τις δυο πλευρές της είναι ίσες. Συγκεντρώνοντας όλες την πληροφορίες για τις τάσεις του νήματος έχουμε $T_1 = T_1' = T_2' = T_2$. Για ευκολία θα τις ονομάσουμε όλες T. Η ισορροπία στην μάζα m_2 μας δίνει

$$T - B_2 = 0$$

Στην μάζα m_1 έχουμε δυο κατευθύνσεις. Ως προς κάθετη προς την κίνηση κατεύθυνση, η μάζα ισορροπεί και έτσι από την εξ. 3.9 οι δυνάμεις πρέπει να αλληλοαναιρούνται που σημαίνει ότι $N_1 = B_1 cos\theta$. Η στατική τριβή γίνεται $F_T = \mu_S N_1 = \mu_S m_1 g cos\theta$. Ως προς την κατεύθυνση της κίνησης, Η ισορροπία στην μάζα m_1 μας δίνει

$$T - B_1 sin\theta - F_T = 0$$

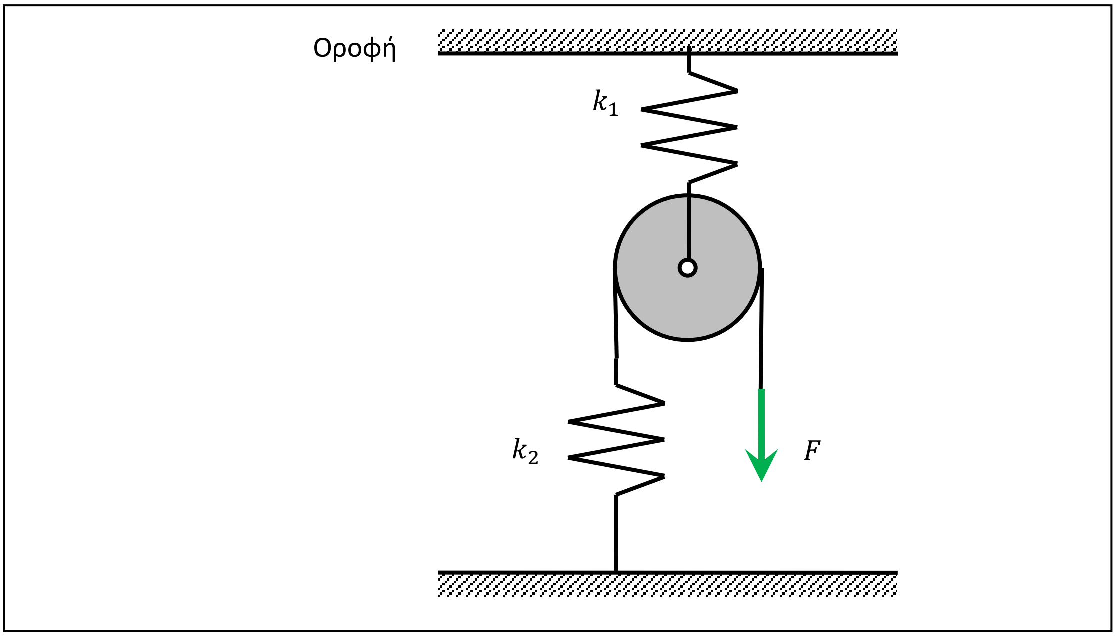
Απαλείφοντας την T από τις δυο τελευταίες εκφράσεις ισορροπίας και αντικαθιστώντας, οδηγεί στην

$$g(m_2 - m_1 sin\theta - \mu_S m_1 cos\theta) = 0$$

Από τα δεδομένα $m_2 = 2m_1$ και $\theta = 30^0$, επομένως

$$2 - sin30^0 - \mu_S cos30^0 = 0 => \mu_S = \sqrt{3}$$

3.7 Στο παρακάτω σχήμα να βρεθεί η ολική σταθερά ελατηρίου k του συστήματος συναρτήσει των k_1 και k_2



Λύση:

Όπως περιγράφεται στο βιβλίο στα Παραδείγματα 3.9 και 3.10, υπάρχουν δυο παραμορφώσεις, η x_1 του ελατηρίου 1 και η x_2 του ελατηρίου 2, και μια μετατόπιση x_R του νήματος λόγω περιστροφής της τροχαλίας. Οι τρεις αυτές μεταβλητές συνδέονται μέσω της $x_2 = x_R - x_1$, δηλαδή η παραμόρφωση του ελατηρίου 2 αυξάνει όσο περιστρέφεται η τροχαλία (θεωρώντας δεξιόστροφη περιστροφή) και μειώνεται όταν αυξάνει η παραμόρφωση του ελατηρίου 1. Επίσης σε αυτά τα παραδείγματα επιδεικνύεται ότι η δύναμη F μεταφέρεται από την μια μεριά της τροχαλίας στην άλλη τη μεριά και δρα στο ελατήριο 2, ενώ στο ελατήριο 1 δρα μια δύναμη μέτρου $2F$. Επομένως από τον νόμο του *Hook* στα δυο ελατήρια ισχύει ότι $x_1 = 2F/k_1$ και $x_2 = F/k_2$. Στην πλευρά όπου εφαρμόζεται η δύναμη F, η αντίστοιχη συνολική μετατόπιση x του νήματος προς τα κάτω είναι ίση με

$$x = x_1 + x_R$$

δηλαδή το x αυξάνει όταν αυξάνει η παραμόρφωση του ελατηρίου 1, αλλά και όταν περιστρέφεται και η τροχαλία (θεωρώντας δεξιόστροφη περιστροφή). Εάν θεωρήσουμε το όλο σύστημα ελατηρίων-τροχαλίας ως ένα σύνθετο ελατήριο, τότε η σταθερά του θα δίνεται από την σχέση $F = kx$. Αντικαθιστώντας τα παραπάνω

$$F = kx = k(x_1 + x_R) = k\left(\frac{2F}{k_1} + \frac{F}{k_2}\right)$$

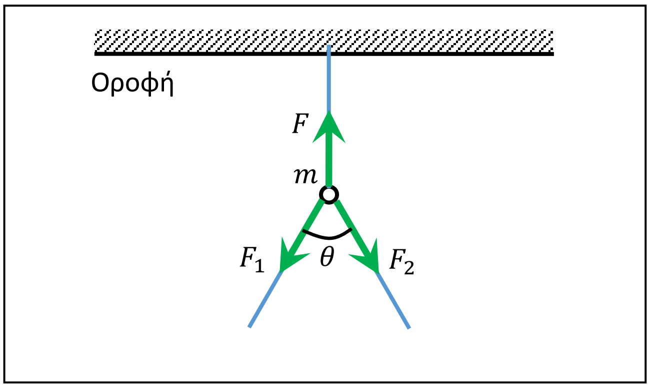
Απαλείφοντας το F οδηγεί στο επιθυμητό αποτέλεσμα

$$\frac{1}{k} = \frac{2}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

ή

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + 2k_2}$$

3.8 Στο παρακάτω σχήμα, τρία διαφορετικά νήματα συγκρατούν μια σημειακή μάζα m σε ισορροπία. Εάν $F_1 = F_2$, $F = \sqrt{3}/2\ F_1$ και η σημειακή μάζα m να ισορροπεί, πόση πρέπει να είναι η γωνία θ; Αγνοήστε τη βαρύτητα θεωρώντας ότι $m \to 0$.



Απάντηση: 128.6^0

Λύση:

Στο παρακάτω σχήμα αναλύουμε τις F_1 και F_2 σε συνιστώσες. Οι οριζόντιες συνιστώσες είναι ίσες με

$$F_{1x} = -F_1 sin\theta_1$$

$$F_{2x} = F_2 sin\theta_2$$

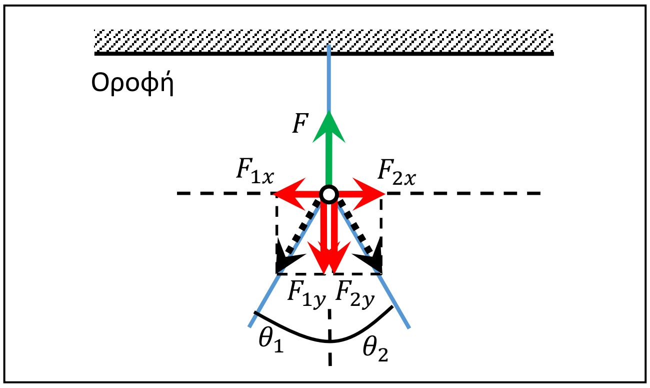
όπου $\theta_1 + \theta_2 = \theta$ (η μια η συνιστώσα είναι προς τα αριστερά οπότε είναι αρνητική ενώ η άλλη είναι θετική). Επειδή αυτές οι συνιστώσες είναι οι μοναδικές κατά μήκος του άξονα x, τότε από την συνθήκη ισορροπίας Εξ. 3.9 έχουμε

$$\Sigma F_x = F_{1x} + F_{2x} = 0 => -F_1 sin\theta_1 + F_2 sin\theta_2 = 0$$

Όμως $F_1 = F_2$ οπότε

$$sin\theta_1 = sin\theta_2$$

που σημαίνει ότι αναγκαστικά $\theta_1 = \theta_2 = \theta/2$ οπότε οι F_1 και F_2 είναι πλήρως συμμετρικές ως προς τον άξονα y τόσο ως προς μέτρο όσο και ως προς διεύθυνση. Επομένως και για τις y συνιστώσες θα ισχύει $F_{1y} = F_{2y} = -F_1 cos\theta_1$ (το μείον είναι επειδή και οι δυο βλέπουν προς τα κάτω).



Παρομοίως περιμένουμε να ικανοποιείται η συνθήκη ισορροπίας και κατά y οπότε:

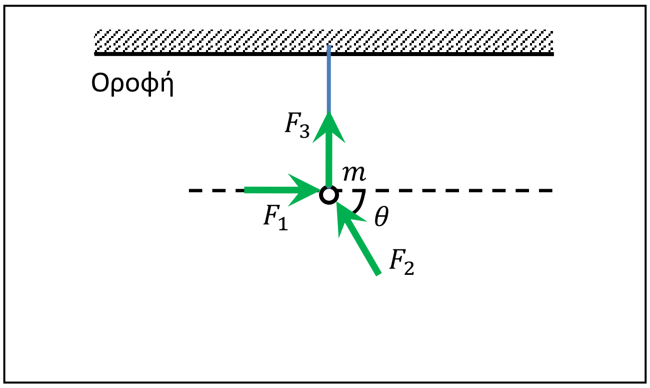
$$\Sigma F_y = F + F_{1y} + F_{2y} = 0 => F = 2F_1 cos\theta_1$$

Από τα δεδομένα $F = \sqrt{3}/2\ F_1$ οπότε

$$\frac{\sqrt{3}}{2}F_1 = 2F_1 cos\theta_1$$

Λύνοντας $\theta_1 = 64.3^0$οπότε και $\theta_2 = 64.3^0$ ενώ $\theta = 2\theta_1 = 128.6^0$

3.9 Στο παρακάτω σχήμα, ένα κατακόρυφο νήμα συγκρατεί μια σημειακή μάζα $m = 0.2\ kg$ από την οροφή. Εκτός από την τάση του νήματος που είναι ίση με $F_3 = 1.2\ N$, στο σώμα ασκούνται και άλλες δυο δυνάμεις, η F_1 που είναι οριζόντια και η $F_2 = 0.9\ N$. Να βρεθεί η γωνία θ αλλά και η δύναμη F_1 εάν η μάζα βρίσκεται σε ισορροπία. Πάρτε $g \approx 10\ m/s^2$ για ευκολία.



<u>Απάντηση</u>: 53.1^0, $0.72\ N$

<u>Λύση</u>: Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, οι οριζόντιες συνιστώσες των δυνάμεων αλληλοαναιρούνται ώστε να υπάρχει ισορροπία στον άξονα-x. Η Εξ. 3.9 δίνει

$$F_1 - F_2 cos\theta = 0$$

Ομοίως και οι κατακόρυφες συνιστώσες των δυνάμεων αλληλοαναιρούνται. Σε αυτές δεν πρέπει να ξεχάσουμε να προσθέσουμε και το βάρος $mg = 2\ N$ της μάζας που είναι φυσικά προς τα κάτω, δηλαδή αρνητική. Η Εξ. 3.9 δίνει

$$F_3 + F_2 sin\theta - mg = 0$$

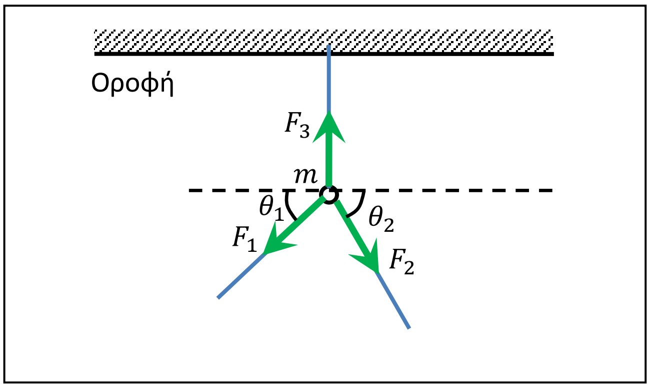
Αντικαθιστώντας τα δεδομένα νούμερα στην τελευταία εξίσωση

$$1.2 + 0.9\ sin\theta - 2 = 0 => sin\theta = 8/9$$

που αντιστοιχεί σε $\theta = 62.7^0$. Η πρώτη εξίσωση γίνεται

$$F_1 = F_2 cos\theta = 0.9 sin62.7^0 = 0.412\ N$$

3.10 Στο παρακάτω σχήμα, τρία διαφορετικά νήματα συγκρατούν μια σημειακή μάζα m σε ισορροπία και ισχύει για τις τάσεις τους ότι $F_1 = 3$, $F_2 = 1$, $F_3 = \sqrt{8}$ (όλες σε N) και η F_3 είναι κατακόρυφη. Εάν η σημειακή μάζα m ισορροπεί, πόσο πρέπει να είναι οι γωνίες θ_1 και θ_2; Αγνοήστε τη βαρύτητα θεωρώντας ότι $m \to 0$.



Απάντηση: 70.5^0 και 0^0

Λύση: Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, οι οριζόντιες συνιστώσες των F_1 και F_2 αλληλοαναιρούνται ώστε να υπάρχει ισορροπία στον άξονα-x. Η Εξ. 3.9 δίνει

$$-F_1 cos\theta_1 + F_2 cos\theta_2 = 0$$

Από τα δεδομένα $F_1 = 3$, $F_2 = 1\ N$ και έτσι

$$cos\theta_2 = 3cos\theta_1$$

Η αντίστοιχη κατακόρυφη εξίσωση ισορροπίας είναι η εξής:

$$F_3 - F_1 sin\theta_1 - F_2 sin\theta_2 = 0$$

Από τα δεδομένα $F_1 = 3$, $F_2 = 1$ και $F_3 = \sqrt{8}\ N$ οπότε

$$\sqrt{8} - 3sin\theta_1 - sin\theta_2 = 0$$

Μέσω της βασικής τριγωνομετρικής ταυτότητας $sin^2\varphi + cos^2\varphi = 1$ μπορούμε να μετατρέψουμε τα ημίτονα σε συνημίτονα γράφοντας

$$sin\varphi = \pm\sqrt{1 - cos^2\varphi}$$

ώστε να χρησιμοποιήσουμε και την παραπάνω σχέση της οριζόντιας ισορροπίας που εμπεριέχει μόνο συνημίτονα. Επειδή οι γωνίες θ_1 και θ_2 είναι μικρότερες των 90^0, κρατάμε μόνο τη θετική ρίζα γιατί στο 1ο τεταρτημόριο οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι θετικοί. Η σχέση κατακόρυφης ισορροπίας γίνεται:

$$3\sqrt{1 - cos^2\theta_1} + \sqrt{1 - cos^2\theta_2} = \sqrt{8}$$

Από την σχέση της οριζόντιας ισορροπίας, μπορούμε να απαλείψουμε το $cos\theta_2$:

$$3\sqrt{1 - cos^2\theta_1} + \sqrt{1 - 9cos^2\theta_1} = \sqrt{8}$$

Θέτουμε $x = cos^2\theta_1$ και έχουμε

$$3\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 - 9x} = \sqrt{8}$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο

$$9(1 - x) + (1 - a^2 9x) + 6\sqrt{1 - x}\sqrt{1 - 9x} = 8$$

$$3\sqrt{1 - x}\sqrt{1 - 9x} - (1 - 9x) = 0$$

$$\sqrt{1 - 9x}\left[3\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 - 9x}\right] = 0$$

Επομένως είτε $\sqrt{1 - 9x} = 0$ με λύση $x = 1/9$, είτε $3\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 - 9x} = 0$ που είναι άτοπο αφού οι δυο ρίζες είναι θετικοί αριθμοί και προστιθέμενοι δεν μπορούν να δώσουν μηδέν. Από την $x = cos^2\theta_1$ και κρατώντας μόνο την θετική ρίζα (όπως προαναφέρθηκε) έχουμε

$$cos\theta_1 = 1/3$$

που αντιστοιχεί σε $\theta_1 = 70.5^0$. Επίσης

$$cos\theta_2 = 3cos\theta_1 = 3 \times 1/3 = 1$$

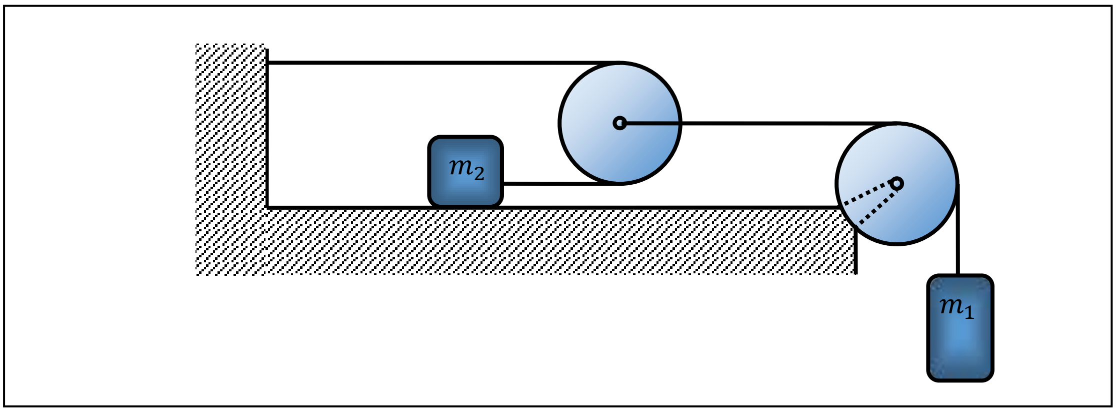
που αντιστοιχεί ως γνωστό σε $\theta_2 = 0^0$. Επαλήθευση

$$\Sigma F_x = -F_1 cos\theta_1 + F_2 cos\theta_2 = -3 \times cos70.5^0 + 1 \times cos0^0 = 0$$

$$\Sigma F_y = F_3 - F_1 sin\theta_1 - F_2 sin\theta_2 = \sqrt{8} - 3sin70.5^0 - sin0^0 = 0$$

4. ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ – ΥΛΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ

4.1 Στο παρακάτω σχήμα δεν υπάρχουν τριβές και οι τροχαλίες και τα νήματα είναι ιδανικά. Να βρεθεί η επιτάχυνση της μάζας m_2

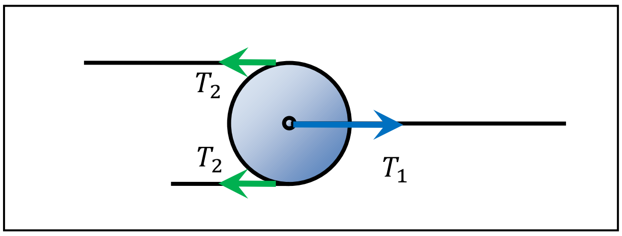


Λύση:

Στην m_1 δρουν η τάση του νήματος T_1 και το βάρος της $m_1 g$ άρα η επιτάχυνσή της a_1 θα δίνεται σύμφωνα με τον 2º νόμο του Νεύτωνα Εξ. 4.3β από την

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1$$

Οι ιδανικές τροχαλίες μεταφέρουν τις δυνάμεις χωρίς να μεταβάλλουν το μέτρο τους. Έτσι η τάση T_1 εφαρμόζεται και στο κέντρο της κινητής τροχαλίας, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Επιπλέον, από την άλλη άκρη της τροχαλίας εμφανίζονται δυο ίσες δυνάμεις T_2 σύμφωνα με την συζήτηση τη σχετική με το Σχήμα 3.6. Οι δυνάμεις στις δυο περιπτώσεις σύνδεσης της τροχαλίας.



Σύμφωνα με τον 2º νόμο του Νεύτωνα, το σύνολο των δυνάμεων που δρουν στην τροχαλία, πρέπει να είναι ίσο με *μάζα × επιτάχυνση* αλλά αφού η ιδανική τροχαλία έχει μηδενική μάζα, αυτό το σύνολο είναι μηδέν

$$2T_2 = T_1$$

Στην m_2 δρα μόνο η τάση του νήματος T_2 και άρα η επιτάχυνσή της a_2 θα δίνεται από την

$$T_2 = m_2 a_2$$

Συνδυάζοντας

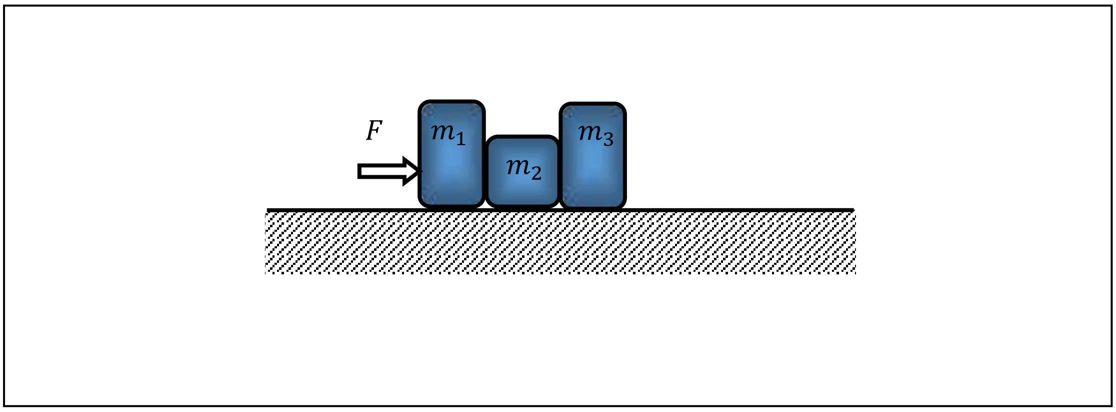
$$m_1 g - 2m_2 a_2 = m_1 a_1$$

Σύμφωνα με αυτά που είπαμε για τις τροχαλίες στην συζήτηση την σχετική με το Σχήμα 3.5, η m_2 κινείται με διπλάσια ταχύτητα από ότι το κέντρο της τροχαλίας που την έλκει και άρα και με διπλάσια ταχύτητα σε σχέση με την m_1, δηλαδή $v_2 = 2v_1$. Παραγωγίζοντας $a_2 = 2a_1$. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω

$$m_1 g - 4m_2 a_1 = m_1 a_1 => (4m_2 + m_1)a_1 = m_1 g => a_1 = \frac{m_1}{4m_2 + m_1} g$$

Για την a_2 έχουμε την διπλάσια τιμή.

4.2 Μια δύναμη F δράει σε ένα σύστημα τριών κιβωτίων τα οποία μπορούν και ολισθαίνουν χωρίς τριβή επάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Να βρεθεί ο λόγος N_{12}/N_{23} όπου $N_{n\,n\pm1}$ είναι η δύναμη αλληλεπίδρασης του κιβωτίου n με το γειτονικό του κιβώτιο $n \pm 1$.



Λύση:

Κοινή επιτάχυνση

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Κιβώτιο 3:

$$N_{32} = m_3 a = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} F$$

Κιβώτιο 1:

$$F - N_{12} = m_1 a => N_{12} = F - m_1 \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} F$$

Λόγω δράσης-αντίδρασης, $N_{23} = N_{32}$ και άρα ο ζητούμενος λόγος είναι ο εξής

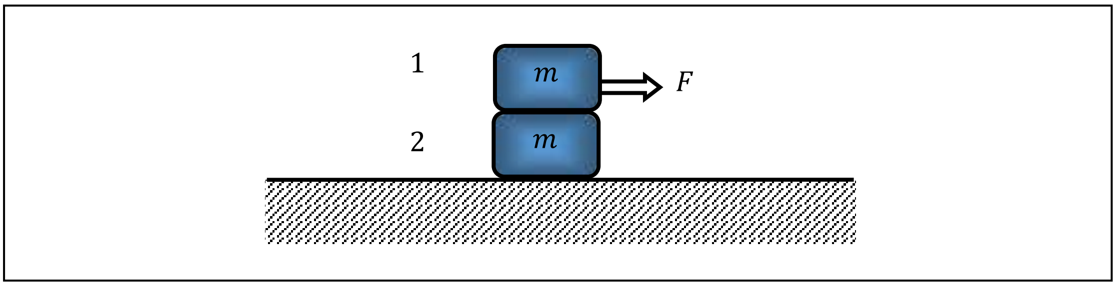
$$\frac{N_{12}}{N_{23}} = \frac{N_{12}}{N_{32}} = \frac{m_2 + m_3}{m_3} = 1 + \frac{m_2}{m_3}$$

Επαλήθευση στο κιβώτιο 2:

$$N_{21} - N_{23} = m_2 a \Rightarrow \frac{m_2 + m_3}{m_3} N_{23} - N_{23} = m_2 a \Rightarrow \frac{m_2}{m_3} N_{23} = m_2 a \Rightarrow N_{23} = m_3 a$$

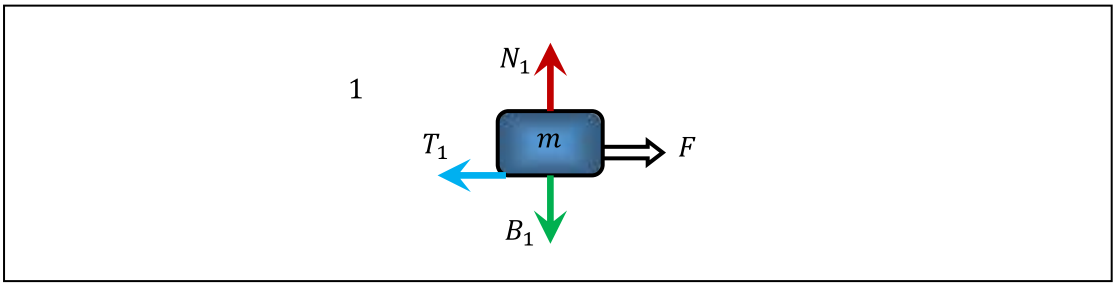
που είναι η ίδια με τη σχέση του κιβωτίου 3 και άρα ισχύει.

4.3 Μια δύναμη F δράει στο άνω κιβώτιο ενός συστήματος δυο πανομοιότυπων κιβωτίων μάζας $m = 1\ kg$. Τα κιβώτια και το δάπεδο είναι από το ίδιο υλικό και οπότε και οι δυο επιφάνειες επαφής έχουν τους ίδιους συντελεστές στατικής τριβής $\mu_\Sigma = 0.6$ αλλά και τους ίδιους συντελεστές τριβής ολίσθησης $\mu = 0.4$. Να γίνει γραφική παράσταση όλων των δυνάμεων τριβών του συστήματος συναρτήσει της F από 0 έως και μιας αρκετά μεγάλης τιμής ώστε να παρατηρηθούν φαινόμενα ολίσθησης και στις δυο επιφάνειες. Επίσης να γίνει και γραφική παράσταση των επιταχύνσεων των δυο κιβωτίων ως προς F. Πάρτε $g \approx 10\ m/s^2$ για ευκολία.



<u>Λύση</u>:

Στο άνω κιβώτιο 1 ασκείται η δύναμη F, το βάρος του $B_1 = mg = 10\ N$ και λόγω αλληλεπίδρασης με το κάτω κιβώτιο, ασκούνται δύο επιπλέον δυνάμεις, η κάθετη αντίδραση N_1 (το πάνω κιβώτιο βλέπει το κάτω ως δάπεδο) και η δύναμη της τριβής T_1.



Λόγω ισορροπίας στην κατακόρυφη διεύθυνση, $N_1 = B_1 = 10\ N$. Σύμφωνα με την Εξ. 3.5β, η μέγιστη δύναμη της στατικής τριβής είναι ίση με

$$T_{1,max} = \mu_\Sigma N_1 = 6\ N$$

Άρα όσο η δύναμη F είναι μικρότερη αυτής της τιμής, η τριβή T_1 που δέχεται το άνω κιβώτιο είναι στατική και επομένως σύμφωνα με την Εξ. 3.5α είναι ίση με την δύναμη F. Όπως αναφέρεται στο βιβλίο, η T_1 είναι μια δύναμη που αυτοπροσαρμόζεται στο εξωτερικό αίτιο.

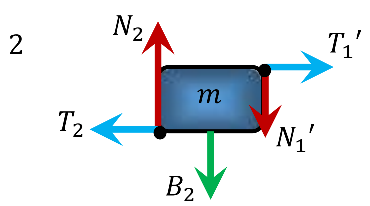
Όταν η δύναμη F γίνει μεγαλύτερη της μέγιστης στατικής τριβής, η τριβή που δέχεται το άνω κιβώτιο μετατρέπεται σε τριβή ολίσθησης και δίνεται πλέον από την σχέση

$$T_1 = \mu N_1 = 4\ N$$

Επομένως η T_1 είναι δικλαδική

$$T_1 = \begin{cases} F, & F < 6 \\ 4, & F \geq 6 \end{cases}$$

(τα νούμερα είναι σε N). Στο κάτω κιβώτιο δρουν εκτός από το βάρος του $B_2 = mg = 10\ N$, οι δυο δυνάμεις αλληλεπίδρασης με το άνω κιβώτιο που είναι η κάθετη αντίδραση $N_1{}'$ και η δύναμη της τριβής $T_1{}'$ (οι οποίες λόγω δράσης-αντίδρασης είναι ίσες και αντίθετες με τις αντίστοιχες δυνάμεις που δρουν στο άνω κιβώτιο), ενώ από το δάπεδο του ασκούνται η τριβή T_2 και η κάθετη αντίδραση N_2. Προσέξτε ότι στο παρακάτω σχήμα σχεδιάσαμε εσκεμμένα τις κάθετες αντιδράσεις και τις τριβές σε σημεία που βρίσκονται στις αντίστοιχες επιφάνειες που δρουν αυτές οι δυνάμεις ώστε να φαίνεται καθαρά η προέλευσή τους.



Από την ισορροπία στον κατακόρυφο άξονα έχουμε

$$N_2 = N_1 + B_2 \Rightarrow N_2 = 20\ N$$

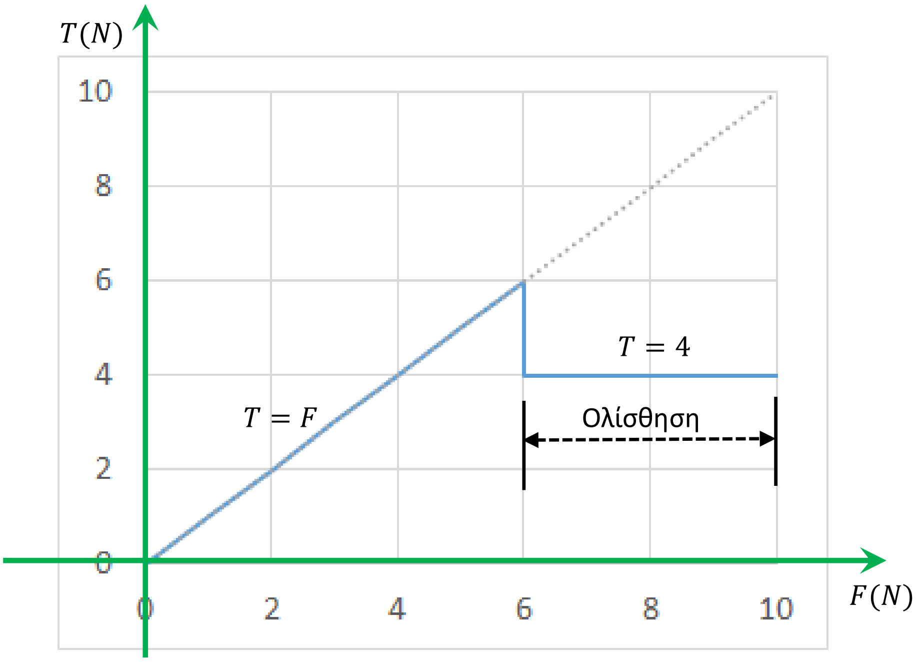
Επειδή η N_2 είναι διπλάσια από την αντίστοιχη κάθετη αντίδραση N_1 που δρα στο άνω κιβώτιο, τότε και η μέγιστη δύναμη της στατικής τριβής από το δάπεδο στο κάτω κιβώτιο είναι διπλάσια:

$$T_{2,max} = \mu_\Sigma N_2 = 12\ N$$

Επειδή η δύναμη $T_1' = T_1$ (3ος νόμος του Νεύτωνα) που ασκεί το άνω κιβώτιο στο κάτω είναι κατώτερο από αυτό το όριο των 12 N, φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι το κάτω κιβώτιο δεν μπορεί να ολισθήσει σε καμία περίπτωση, δηλαδή για οποιαδήποτε τιμή της δύναμης F ισχύει η συνθήκη οριζόντιας ισορροπίας στο κάτω κιβώτιο και έτσι $T_2 = T_1'$ δηλαδή και η T_2 είναι δικλαδική

$$T_2 = \begin{cases} F, & F < 6 \\ 4, & F \geq 6 \end{cases}$$

Επομένως η γραφική παράσταση είναι όπως η παρακάτω με την T να συμβολίζει όλες τις τριβές του προβλήματος (εφόσον είναι ίσες μεταξύ τους, δεν υπάρχει διάκριση):



4.4 Ένα ελατήριο είναι τοποθετημένο επάνω στον άξονα x με τη μια του άκρη στερεωμένη σε ακλόνητο άκρο και την άλλη προσδεμένη σε μάζα m η οποία ταλαντεύεται επάνω στον άξονα έτσι ώστε το $x = 0$ να είναι η θέση ισορροπίας της. Η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου στη μάζα δίνεται από την έκφραση $F(x) = -kx$ όπου k η σταθερά του ελατηρίου. Το μείον δίνει την σωστή κατεύθυνση στη δύναμη αφού π.χ. όταν η μάζα κινείται δεξιά με $x > 0$, η δύναμη είναι αρνητική δηλαδή προς τα αριστερά. Να βρεθούν η επιτάχυνση, η ταχύτητα και η μετατόπιση της μάζας συναρτήσει του χρόνου εάν γνωρίζουμε ότι η μάζα ξεκινάει στο $t = 0$ με μηδενική ταχύτητα από το σημείο $x = x_0$. (Σημείωση: Σε αυτό το πρόβλημα καταφεύγετε σε μια διαφορική εξίσωση. Εάν δυσκολεύεστε να τη λύσετε, μπορείτε να ακολουθήσετε την απλή μέθοδο που παρουσιάζεται στο βιβλίο στο παράδειγμα με τον αλεξιπτωτιστή).

Λύση:

Από τον 2^o νόμο του Νεύτωνα

$$F(x) = ma$$

Αντικαθιστούμε την δεδομένη δύναμη και γράφουμε και την επιτάχυνση ως τη δεύτερη παράγωγο της απομάκρυνσης ως προς το χρόνο για να έχουμε:

$$-kx = mx''$$

ή

$$x'' = -\frac{k}{m}x$$

Η παραπάνω είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση 2^{ου} βαθμού ως προς το $x(t)$ το οποίο είναι γενικά μια συνάρτηση του χρόνου. Αυτή η εξίσωση βασικά μας λέει ότι εάν παραγωγίσουμε δυο φορές αυτή τη συνάρτηση, παίρνουμε μια σταθερά επί το μείον της ίδιας της συνάρτησης. Όπως γνωρίζουμε από τα Μαθηματικά, οι συναρτήσεις που έχουν αυτή την συμπεριφορά είναι το ημίτονο και το συνημίτονο και έτσι περιμένουμε γενικά ως λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης την εξής έκφραση:

$$x(t) = Asin(\omega t) + Bcos(\omega t)$$

Με απλή διπλή παραγώγιση βρίσκουμε εύκολα ότι $x(t)'' = -\omega^2 x(t)$ και συγκρίνοντας με την διαφορική εξίσωση προκύπτει ότι

$$\omega^2 = k/m$$

Η ταχύτητα της μάζας προκύπτει από την παραγώγιση ως προς τον χρόνο:

$$v(t) = x(t)' = A\omega cos(\omega t) - B\omega sin(\omega t)$$

Από την αρχική συνθήκη ότι $v(0) = 0$ παίρνουμε ότι

$$0 = A\omega \times 1 - B\omega \times 0 => A = 0$$

οπότε

$$x(t) = Bcos(\omega t)$$

$$v(t) = -B\omega sin(\omega t)$$

Από την άλλη αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$ έχουμε

$$x_0 = B \times 1 = B$$

και έτσι

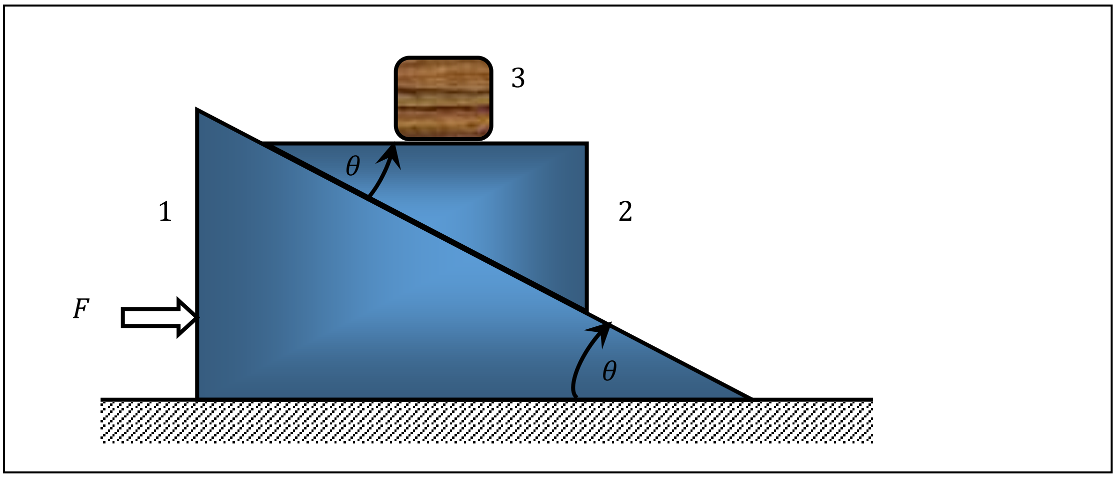
$$x(t) = x_0 cos(\omega t)$$

$$v(t) = -\omega x_0 sin(\omega t)$$

Η επιτάχυνση της μάζας προκύπτει από την διπλή παραγώγιση ως προς τον χρόνο:

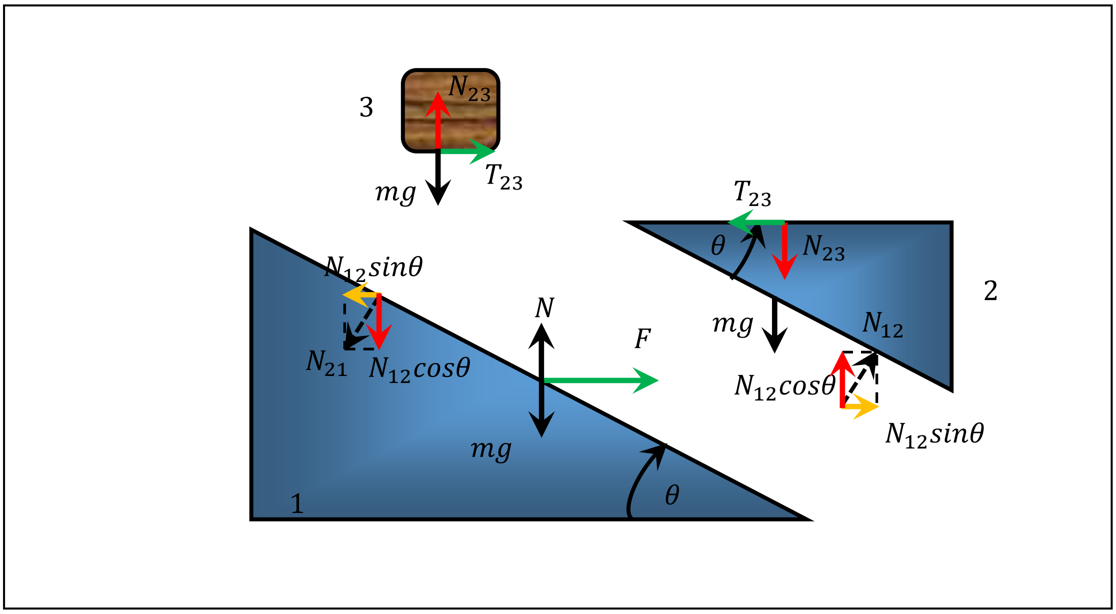
$$a(t) = x(t)'' = -\omega^2 x_0 cos(\omega t)$$

4.5 Στο παρακάτω σχήμα τα δυο πρίσματα έχουν την ίδια γωνία θ και μάζες ίσες μεταξύ τους και ίσες με την μάζα του κιβωτίου. Δεν υπάρχει τριβή μεταξύ των πρισμάτων αλλά ούτε και μεταξύ του δαπέδου και του πρίσματος 1. Υπάρχει όμως τριβή μεταξύ του κιβωτίου και του πρίσματος 2 με συντελεστή στατικής τριβής μ. Μια δύναμη F δρα στο κάτω πρίσμα 1 και παρατηρείται ότι και τα τρία σώματα κινούνται μαζί ως ένα σώμα. Να βρεθούν α) Η επιτάχυνση a του συστήματος β) Η δύναμη F και γ) Το ελάχιστο μ ώστε το κιβώτιο να παραμένει ακίνητο σχετικά με το πρίσμα 2.



Λύση:

(α) Ας εξετάσουμε τις δυνάμεις που δρουν στα τρία σώματα ξεχωριστά. Θεωρήστε το παρακάτω σχήμα



Περιγραφικά οι δυνάμεις είναι οι εξής:

- mg τα αντίστοιχα βάρη τα οποία είναι τα ίδια και για τα τρία σώματα αφού έχουν την ίδια μάζα.
- N_{23} και N_{32} οι κάθετες αντιδράσεις λόγω αλληλεπίδρασης μεταξύ του κιβωτίου και του πάνω πρίσματος σε μορφή ζεύγους δράσης-αντίδρασης.

- N_{12} και N_{21} οι κάθετες αντιδράσεις λόγω αλληλεπίδρασης των δυο πρισμάτων σε μορφή ζεύγους δράσης-αντίδρασης. Αυτές οι δυνάμεις έχουν αναλυθεί σε οριζόντιες και κατακόρυφες συνιστώσες (π.χ. $N_{12}sin\theta$ και $N_{12}cos\theta$ για την N_{12} αντίστοιχα).
- T_{23} και T_{32} οι τριβές λόγω αλληλεπίδρασης μεταξύ του κιβωτίου και του πάνω πρίσματος σε μορφή ζεύγους δράσης αντίδρασης.
- N η κάθετη αντίδραση από το έδαφος στο κάτω πρίσμα
- F η δεδομένη δύναμη η οποία δρα μόνο στο κάτω πρίσμα.

Θα εφαρμόσουμε τον 2^o νόμο του Νεύτωνα σε κάθε σώμα ξεχωριστά και για τις δυο κατευθύνσεις x και y. Ξεκινώντας από το πάνω σώμα:

$$N_{23} = mg$$

$$T_{23} = ma$$

Μεσαίο σώμα:

$$N_{12}cos\theta = N_{23} + mg$$

$$N_{12}sin\theta - T_{23} = ma$$

Από τα παραπάνω αποτελέσματα:

$$N_{12}cos\theta = 2mg$$

$$N_{12}sin\theta = 2ma$$

Παίρνοντας λόγους

$$a = gtan\theta$$

(β) Δύναμη ώθησης:

$$F = 3ma = 3mgtan\theta$$

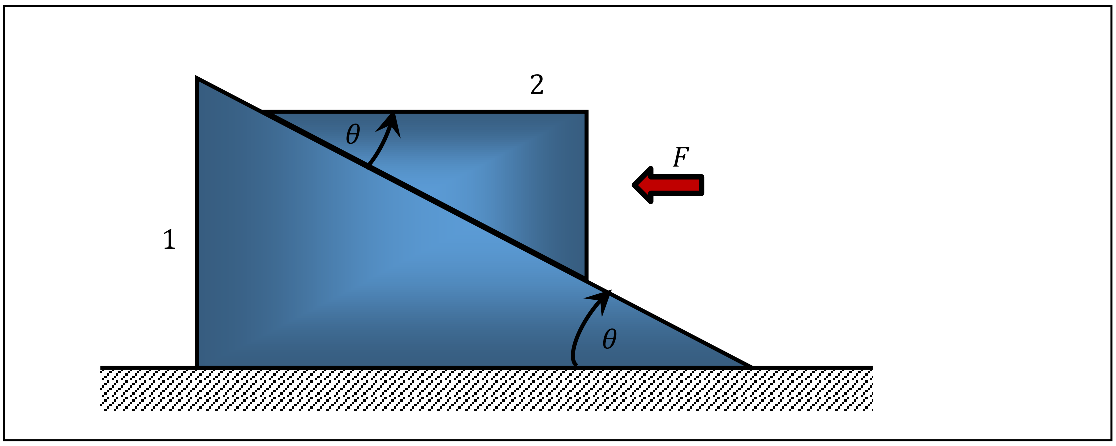
(γ) Οριακά στο πάνω σώμα

$$T_{23} = \mu N_{23}$$

Συνδυάζοντας

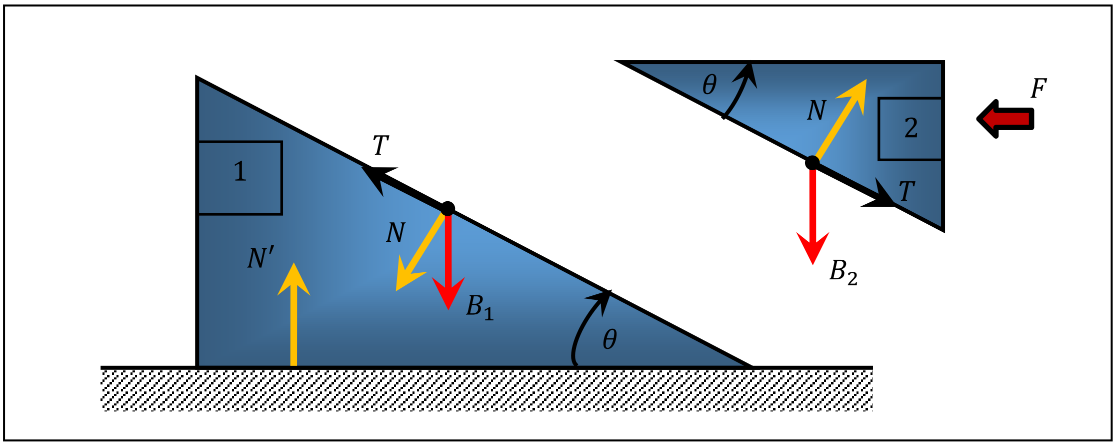
$$ma = \mu mg => \mu = \frac{a}{g} = tan\theta$$

4.6 Δυο πρίσματα της ίδιας γωνίας θ αλλά διαφορετικής μάζας m_1 και m_2 είναι τοποθετημένα όπως στο παρακάτω σχήμα. Υπάρχει τριβή μεταξύ των πρισμάτων με συντελεστή στατικής τριβής μ αλλά το οριζόντιο δάπεδο είναι ελεύθερο τριβών. Η γωνία είναι αρκετά μεγάλη ώστε όταν το κάτω πρίσμα είναι ακίνητο, να μην μπορεί να σταθεί το άλλο επάνω του (ολισθαίνει προς τα κάτω). Εάν όμως στο πάνω πρίσμα εφαρμοστεί μια δύναμη F προς τα αριστερά όπως στο σχήμα, παρατηρείται ότι από μια ελάχιστη δύναμη $F > F_0$ και επάνω, το πρίσμα 2 παραμένει προσκολλημένο με το πρίσμα 1 και κινούνται μαζί ως ένα σώμα. α) Να σχεδιασθούν όλες οι δυνάμεις του συστήματος για $F > F_0$ και να εξηγηθούν β) Να γραφτεί ο 2ος νόμος του Νεύτωνα σε x και y συνιστώσες για το πρίσμα 2 και γ) Να υπολογισθεί η δύναμη F_0 από τις εξισώσεις του (β) υποερωτήματος.

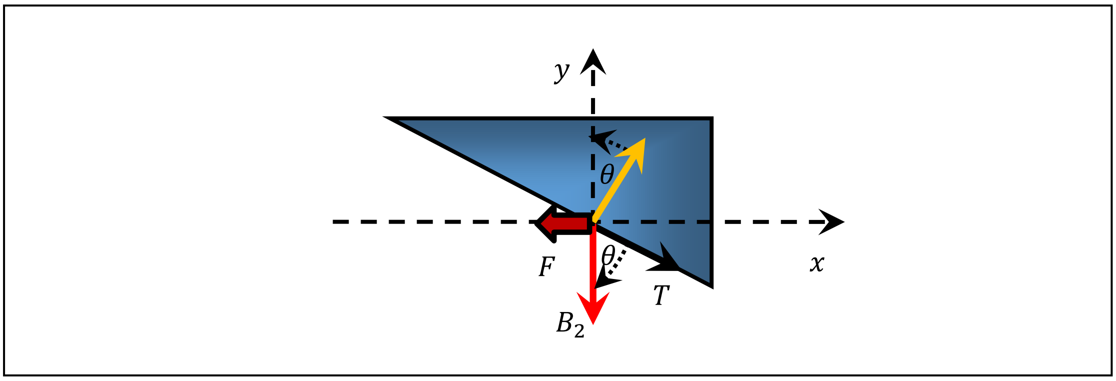


<u>Λύση</u>:

α) Οι δυνάμεις που δρουν σε κάθε πρίσμα φαίνονται παρακάτω και είναι η F, τα βάρη B_1 και B_2, οι κάθετες αντιδράσεις N στην κεκλιμένη επιφάνεια, η κάθετη αντίδραση N' από το δάπεδο και οι τριβές T. Στο διάγραμμα έχει ληφθεί ο 3ος νόμος του Νεύτωνα και τα αντίστοιχα ζεύγη δυνάμεων συμβολίζονται με το ίδιο γράμμα. Η τριβή στο πρίσμα 2 είναι προς τα κάτω επειδή η δύναμη F τείνει να το ωθήσει προς τα αριστερά και άρα τείνει να το ολισθήσει προς τα πάνω στην επιφάνεια επαφής και επομένως η τριβή πρέπει να αντιστέκεται σε αυτή την επαφή.



β) Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος, ο 2ος νόμος του Νεύτωνα κατά τον άξονα x γράφεται ως εξής (θεωρούμε την κατεύθυνση προς τα αριστερά θετική):



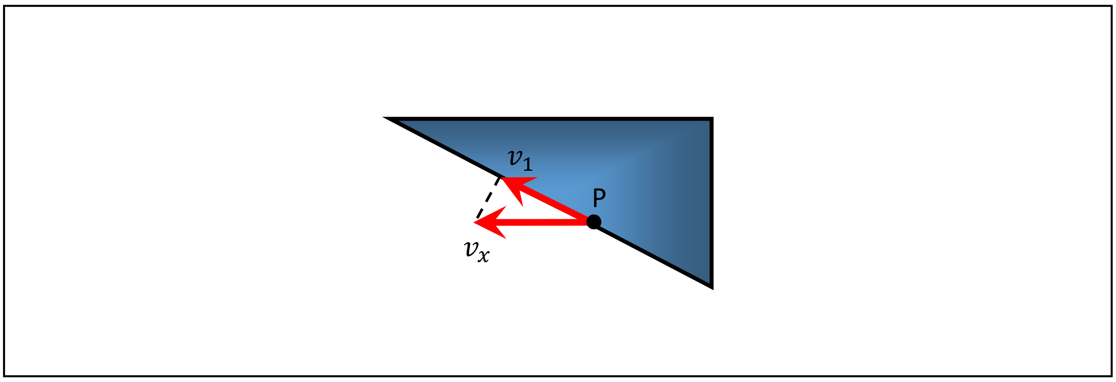
$$F - Nsin\theta - Tcos\theta = m_2 a_x$$

όπου m_2 είναι η μάζα του πρίσματος 2 και a_x η οριζόντια επιτάχυνσή του. Ομοίως στον άξονα y (θετικά προς τα πάνω) έχουμε:

$$Ncos\theta - Tsin\theta - B_2 = m_2 a_y$$

όπου a_y η κατακόρυφη επιτάχυνση.

γ) Όταν το πρίσμα 2 σταματάει να ολισθαίνει προς τα κάτω, τότε η κατακόρυφη ταχύτητά του και άρα και η a_y είναι μηδέν. Σημείωση: Πολλοί φοιτητές μπαίνουν στον πειρασμό να θέσουν την επιτάχυνση κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου ίση με μηδέν αφού όταν τα δυο σώματα κινούνται ως ένα, μεταξύ τους είναι ακίνητα. Αυτό όμως μπορούμε να δούμε ότι είναι λάθος εάν θεωρήσουμε το σημείο P στη διεπιφάνεια το οποίο κινείται οριζοντίως με ταχύτητα v_x (το συσσωμάτωμα κινείται επάνω σε λείο δάπεδο και επομένως η F θα το αναγκάσει να κινηθεί) η οποία έχει συνιστώσα v_1



Επίσης, η τριβή είναι πλέον στατική (οι δυο επιφάνειες παρότι που επιταχύνονται, μεταξύ τους είναι ακίνητες). Το <u>οριακό</u> σημείο που η τριβή αλλάζει από ολίσθησης σε στατική είναι όταν η στατική τριβή παίρνει την μέγιστη τιμή της που είναι $T = \mu N$. Γράφοντας την a_x ως a_0 (οριακή επιτάχυνση) και την F ως F_0 (οριακή δύναμη) και αντικαθιστώντας στις παραπάνω εξισώσεις, οδηγούν στις

$$F_0 - Nsin\theta - \mu Ncos\theta = m_2 a_0$$

και

$$Ncos\theta - \mu Nsin\theta - m_2 g = 0$$

από όπου με απαλοιφή του N καταλήγουμε εύκολα στην

$$F_0 - \frac{sin\theta + \mu cos\theta}{cos\theta - \mu sin\theta} m_2 g = m_2 a_0$$

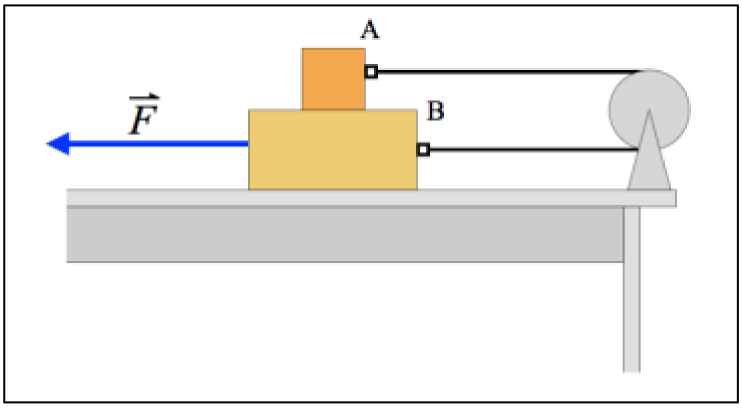
Όμως όταν τα δυο σώματα κινούνται μαζί ως ένα, τότε έχουν και κοινή επιτάχυνση οπότε μπορούμε να γράψουμε για το όλο συσσωμάτωμα ότι $F_0 = (m_1 + m_2)a_0$ (οι εσωτερικές δυνάμεις αλληλοαναιρούνται σε ζεύγη και δεν υπάρχει τριβή από το δάπεδο οπότε μόνο η F δρα στο συσσωμάτωμα). Απαλείφοντας το α_0 μεταξύ των δυο τελευταίων εξισώσεων οδηγεί στο

$$F_0 - \frac{sin\theta + \mu cos\theta}{cos\theta - \mu sin\theta} m_2 g = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F_0$$

Λύνοντας ως προς F_0 οδηγεί στο

$$F_0 = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \frac{sin\theta + \mu cos\theta}{cos\theta - \mu sin\theta} m_2 g$$

4.7 Στο παρακάτω σχήμα οι τα δυο κιβώτια A και B συνδέονται με ιδανικό νήμα και ιδανική τροχαλία και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης $\mu = 0.4$ είναι ο ίδιος για όλες τις επιφάνειες. Να βρεθεί η δύναμη τριβής F_T που δρα στο πάνω κιβώτιο εάν η τάση του νήματος που δρα στο κάτω κιβώτιο είναι $T = 2.5\ N$ και εάν αυτό το κιβώτιο κινείται με σταθερή επιτάχυνση $a = 3\ m/s^2$. Πάρτε $g = 10\ m/s^2$ για ευκολία.



<u>Λύση</u>:

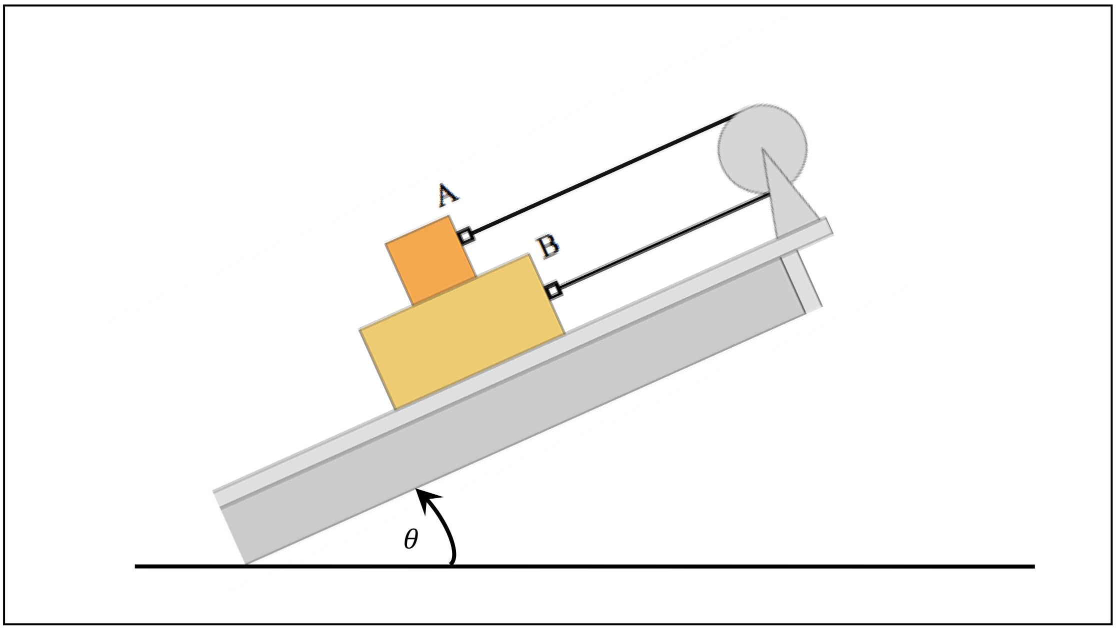
Εάν το B έχει σταθερή επιτάχυνση τότε μέσω του νήματος και το A έχει σταθερή επιτάχυνση. Στο A δρα η τάση του νήματος T και η δύναμη τριβής F_T που αντιτίθεται στην τάση. Από τον 2^o νόμο του Νεύτωνα στο κιβώτιο αυτό:

$$T - F_T = m_A a => T - \mu N = m_A a => T - \mu m_A g = m_A a => m_A = \frac{T}{\mu g + a}$$

Από τον ορισμό της τριβής ολίσθησης:

$$F_T = \mu N = \mu m_A g = \frac{\mu g}{\mu g + a} T = \frac{0.4 \times 10}{0.4 \times 10 + 3} 2.5 = 2.86\ N$$

4.8 Στο παρακάτω σχήμα οι μάζες $m_B > m_A$ συνδέονται με ιδανικό νήμα και ιδανική τροχαλία. Ο συντελεστή τριβής ολίσθησης μ είναι ο ίδιος για όλες τις επιφάνειες. Να βρεθεί η επιτάχυνση του κιβωτίου B εάν αυτό ολισθαίνει προς τα κάτω.



<u>Λύση</u>:

Οι δυνάμεις κατά μήκος της κίνησης που δρουν στα δυο σώματα φαίνονται στο παρακάτω σχήμα Ι (στα αριστερά). Θεωρούμε ότι το B ως βαρύτερο σώμα θα παρασύρει το A και έτσι αυτό θα κινείται προς τα πάνω. Στο A δρα η συνιστώσα του βάρους $mgsin\theta$, η τριβή T_{AB} από το σώμα B και η τάση του νήματος F_{AB}. Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα για αυτό το σώμα

$$F_{AB} - m_A g sin\theta - T_{AB} = m_A a$$

Στο σώμα B, δρουν ίσες και αντίθετες T_{AB} και F_{AB} λόγω δράσης-αντίδρασης και επιπλέον η τριβή T από το δάπεδο. Έτσι ο 2ος νόμος του Νεύτωνα γράφεται ως

$$m_B g sin\theta - T - T_{AB} - F_{AB} = m_B a$$

Η επιτάχυνση a είναι κοινή αφού τα δυο σώματα μέσω του νήματος έχουν την ίδια ταχύτητα. Προσθέτοντας κατά μέλη, προκύπτει το εξής αποτέλεσμα

$$(m_B - m_A) g sin\theta - T - 2T_{AB} = (m_B + m_A) a$$

Απομένει να υπολογίσουμε τις δυνάμεις τριβής. Αυτό μπορεί να γίνει εξετάζοντας τις δυνάμεις που δρουν κάθετα στην κίνηση των δυο σωμάτων οι οποίες φαίνονται στο παρακάτω σχήμα ΙΙ (στα δεξιά). Στο σώμα Α εκτός από την συνιστώσα $m_A g\ cos\theta$ δρα και η κάθετη αντίδραση N_{AB} από το σώμα Β. Λόγω δράσης-αντίδρασης, υπάρχει μια ίση και αντίθετη δύναμη N_{AB} που δρα στο σώμα Β. Επιπλέον, σε αυτό το σώμα δρα η συνιστώσα $m_B g\ cos\theta$ του βάρους αλλά και η κάθετη αντίδραση N από το δάπεδο. Αφού κάθετα στην κίνηση υπάρχει ισορροπία, θα ισχύει για τα δυο σώματα

$$N_{AB} = m_A g\ cos\theta$$

$$N = m_B g\ cos\theta + N_{AB}$$

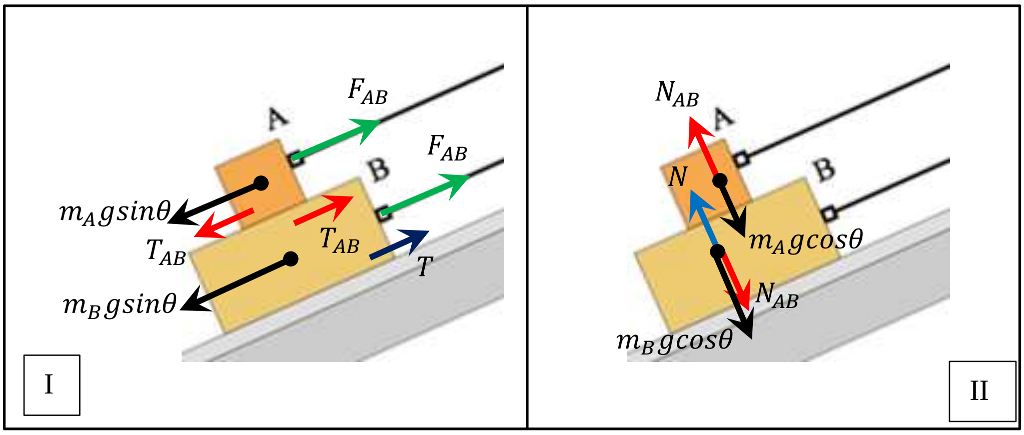
Συνδυάζοντας

$$N = (m_A + m_B) g\ cos\theta$$

Εξ' ορισμού οι δυνάμεις τριβής είναι ίσες με

$$T_{AB} = \mu N_{AB} = \mu m_A g\ cos\theta$$

$$T = \mu N = \mu (m_A + m_B) g\ cos\theta$$



Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση που βρήκαμε για τις δυνάμεις κατά μήκος της κίνησης, οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$$(m_B - m_A) g sin\theta - \mu (m_A + m_B) g\ cos\theta - 2\mu m_A g\ cos\theta = (m_B + m_A) a$$

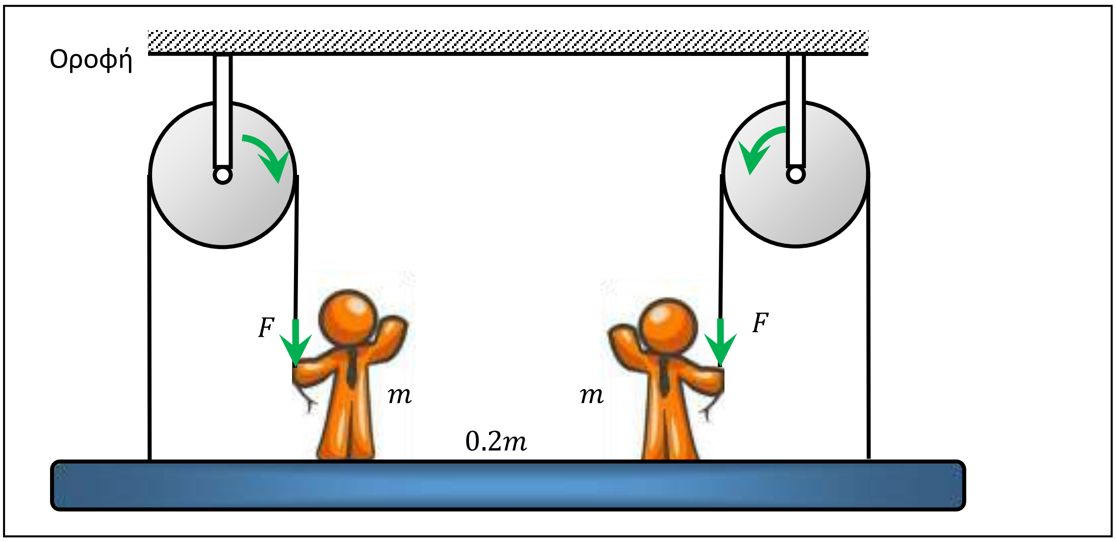
$$(m_B - m_A) g sin\theta - \mu (3m_A + m_B) g\ cos\theta = (m_B + m_A) a$$

Λύνοντας ως προς την επιτάχυνση, οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$a = \frac{m_B - m_A}{m_B + m_A} g sin\theta - \frac{3m_A + m_B}{m_B + m_A} \mu g\ cos\theta$$

4.9 Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, δυο εργάτες μάζας m ο καθένας είναι πάνω σε μια πλατφόρμα και την έλκουν με δύναμη F ο καθένας μέσω δυο ιδανικών τροχαλιών. Εάν η μάζα της πλατφόρμας είναι $0.2m$, να δειχθεί ότι η επιτάχυνσής της είναι ίση με

$$a = \frac{2F - 1.1mg}{1.1m}$$



<u>Λύση</u>: Ας ξεκινήσουμε θεωρώντας σαν σύστημα τον πρώτο εργάτη. Το περιβάλλον γι' αυτόν αποτελείται από το σκοινί, την πλατφόρμα και την γη. Άρα οι δυνάμεις που δέχεται είναι, η δύναμη F με φορά προς τα πάνω από το σχοινί, η κάθετη αντίδραση N με φορά προς τα πάνω από την πλατφόρμα και το βάρος του mg με φορά προς τα κάτω από την γη. Άρα σύμφωνα με την εξίσωση 3-α του βιβλίου έχουμε

$$\Sigma F = m\, a => F + N - mg = ma$$

Η ίδια εξίσωση ισχύει και για τον δεύτερο εργάτη. Για την συνέχεια θεωρούμε σαν σύστημα την πλατφόρμα. Το περιβάλλον γι' αυτήν αποτελείται από τα δύο σχοινιά, τους δύο εργάτες και την γη. Άρα οι δυνάμεις που δέχεται είναι, οι δύο δυνάμεις F από τα σχοινιά με φορά προς τα πάνω (λόγω του τρίτου νόμου του Νεύτωνα αλλά και της ιδανικής τροχαλίας έχουν ίδιο μέτρο F με την δύναμη που ασκεί ο κάθε εργάτης στο σχοινί), οι δύο κάθετες αντιδράσεις από τους εργάτες με φορά προς τα κάτω (λόγω του τρίτου νόμου του Νεύτωνα έχουν ίδιο μέτρο N με την δύναμη που ασκεί η πλατφόρμα σε αυτούς) και το βάρος της $0.2mg$ με φορά προς τα κάτω. Άρα σύμφωνα πάλι με την Εξ. 3-α του βιβλίου έχουμε

$$\Sigma F = 0.2\, m\, a => 2\, F - 2\, N - 0.2\, mg = 0.2\, ma$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω εξισώσεις αφού πολλαπλασιάσουμε την πρώτη $\times$ 2 οδηγεί στο αποτέλεσμα

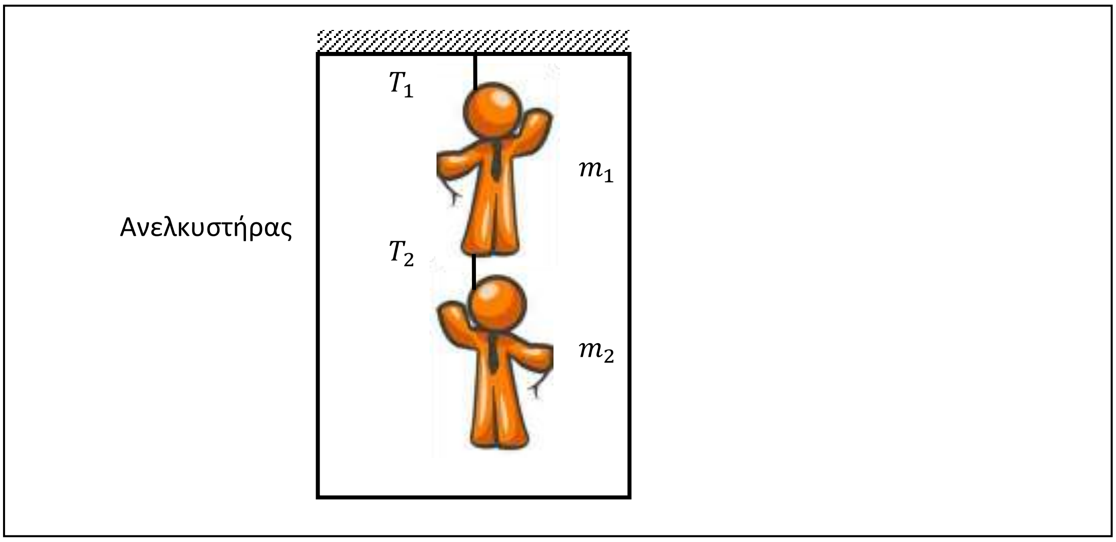
$$2\, F + 2\, N - 2\, mg\ + 2\, F - 2\, N\ - 0.2\, mg = 2\, ma + 0.2a$$

$$4\, F - 2.2\, mg = 2.2\, ma => a = \frac{4F - 2.2\, mg}{2.2\, mg}$$

και τελικά

$$a = \frac{2\,F - 1.1\,mg}{1.1\,mg}$$

4.10 Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, δυο ορειβάτες επιθυμούν να αναρτηθούν με σχοινί από την οροφή ενός ανελκυστήρα. Ο πάνω αναρτάται άμεσα από την οροφή ενώ ο κάτω αναρτάται από τον πάνω, χωρίς να αγγίζουν τα πόδια του στο δάπεδο του ανελκυστήρα. Ο ανελκυστήρας επιταχύνεται προς τα πάνω με επιτάχυνση $4.0\ ms^{-2}$. Εάν τα νήματα είναι ιδανικά και οι μάζες των ορειβατών είναι $m_1 = 80\ kg$ του πάνω και $m_2 = 65\ kg$ του κάτω, να βρεθούν οι τάσεις τους T_1 και T_2 στις εξής περιπτώσεις: (α) όπως στο παρακάτω σχήμα (β) εάν σπάσει μόνο το κάτω νήμα και (γ) εάν σπάσει μόνο το επάνω νήμα



Λύση:

α) Στον κάτω ορειβάτη ασκούνται η τάση T_2 προς τα πάνω και το βάρος του $m_2 g$ προς τα κάτω. Ο ορειβάτης κινείται μαζί με τον ανελκυστήρα και άρα πρέπει να έχουν την ίδια επιτάχυνση $a = 4.0\ ms^{-2}$ προς τα πάνω. Από τον 2^{o} νόμο του Νεύτωνα:

$$T_2 - m_2 g = m_2 a$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα και επιλέγοντας $g \approx 10\ ms^{-2}$ για ευκολία, οδηγούμαστε στο

$$T_2 = m_2(g + a) = 65(10 + 4) = 910\ N$$

Στον πάνω ορειβάτη, ασκούνται δυο τάσεις, μια από πάνω και μια από κάτω και επομένως ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα οδηγεί στο

$$T_1 - T_2 - m_1 g = m_1 a$$

$$T_1 = T_2 + m_1(g + a) = 2030\ N$$

β) Όταν σπάει κάτω νήμα, τότε αυτομάτως $T_2 = 0$ και ο 2ος νόμος του Νεύτωνα για τον κάτω ορειβάτη γίνεται:

$$0 - m_2 g = m_2 a => a = -g$$

δηλαδή αυτός εκτελεί ελεύθερη πτώση με επιτάχυνση αυτής της βαρύτητας προς τα κάτω. Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα για τον πάνω ορειβάτη γίνεται:

$$T_1 - 0 - m_1 g = m_1 a => T_1 = m_1(g + a) = 1120\ N$$

γ) Όταν σπάει το πάνω νήμα, τότε αυτομάτως $T_1 = 0$ και τα δυο σώματα ως σύνολο, εκτελούν ελεύθερη πτώση και άρα έχουν επιτάχυνση $a = -g$. Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα για τον πάνω ορειβάτη γίνεται:

$$0 - T_2 - m_1 g = m_1 a => T_2 = -m_1(g - g) = 0\ N$$

Αυτό σημαίνει ότι και το νήμα που συνδέει τους δυο ακροβάτες μεταξύ τους είναι χαλαρό και δεν ασκεί κάποια δύναμη σε κανένα από αυτούς.

4.11 Η διανυσματική δύναμη $\vec{F}(t) = F_0(cos\omega t, sin\omega t)$ δρα σε σημειακή μάζα m που κινείται στο επίπεδο $x - y$, όπου F_0 και ω είναι σταθερές και t ο χρόνος. Να σχεδιαστεί η τροχιά της m στο επίπεδο εάν είναι γνωστό ότι στο $t = 0$ το σημείο βρίσκεται στον άξονα x σε απόσταση $\beta > 0$ από την αρχή των συντεταγμένων και με ταχύτητα μέτρου $F_0/m\omega$ και κατεύθυνση προς τον αρνητικό άξονα y. Δίνονται ω =3.6 rad/s, F_0 =6 N και m =3 kg. <u>Σημείωση</u>: Στην γραφική σας παράσταση πρέπει να φαίνονται καθαρά όλα τα χαρακτηριστικά νούμερα της τροχιάς, π.χ. τυχόν ρίζες μέγιστα, ελάχιστα, ασύμπτωτοι, κ.τ.λ.

<u>Λύση</u>:

$$m v_x' = F_0 cos\omega t => v_x = \frac{F_0}{m\omega} sin\omega t + c_x$$

$$m v_y' = F_0 sin\omega t => v_y = -\frac{F_0}{m\omega} cos\omega t + c_y$$

Στο $t = 0$

$$0 = \frac{F_0}{m\omega} sin0 + c_x => c_x = 0$$

$$-\frac{F_0}{m\omega} = -\frac{F_0}{m\omega} cos0 + c_y => c_y = 0$$

Άρα

$$v_x = \frac{F_0}{m\omega} sin\omega t$$

$$v_y = -\frac{F_0}{m\omega} cos\omega t$$

Ολοκληρώνοντας

$$x = -\frac{F_0}{m\omega^2}cos\omega t + c_x$$

$$y = -\frac{F_0}{m\omega^2}sin\omega t + c_y$$

(διαφορετικές σταθερές). Στο $t = 0$

$$\beta = -\frac{F_0}{m\omega^2}cos0 + c_x => c_x = \beta + \frac{F_0}{m\omega^2} = \beta + \gamma$$

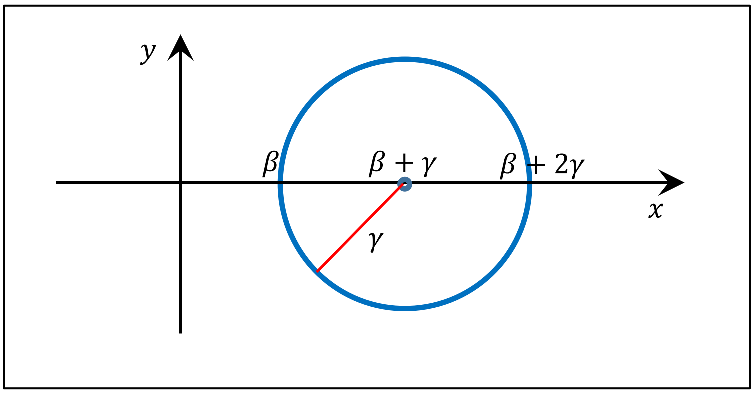
$$0 = -\frac{F_0}{m\omega^2}sin0 + c_y => c_y = 0$$

όπου $\gamma = F_0/m\omega^2$. Έτσι

$$x = -\gamma cos\omega t + \beta + \gamma$$

$$y = -\gamma sin\omega t$$

Κύκλος, κέντρο επάνω στον άξονα x στο $x = \beta + \gamma$, ακτίνα γ



4.12 Ξεκινώντας από την ηρεμία, ένας ανελκυστήρας επιταχύνει με σταθερή επιτάχυνση από το ισόγειο στον δεύτερο όροφο και επιβραδύνει επίσης με σταθερή επιβράδυνση από τον πέμπτο έως τον έκτο όροφο έως ότου σταματήσει εντελώς. Μεταξύ του δεύτερου και του πέμπτου ορόφου κινείται με σταθερή ταχύτητα καλύπτοντας κάθε όροφο απόστασης 6 μέτρων σε 1 δευτερόλεπτο. Στο εσωτερικό του ανελκυστήρα υπάρχει ζυγαριά πάνω στην οποία στέκεται φοιτητής. Κατά τη διάρκεια της κίνησης από τον δεύτερο στον πέμπτο όροφο ο φοιτητής "διαβάζει" στην οθόνη της ζυγαριάς την ένδειξη 80 kg. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη ένδειξη στην οθόνη της ζυγαριάς κατά την διάρκεια του ταξιδιού; Θεωρήστε ότι όλοι οι όροφοι, συμπεριλαμβανομένου και του ισογείου είναι ισοϋψείς.

Λύση:

Υπάρχουν τρεις φάσεις στην κίνηση, η πρώτη με σταθερή επιτάχυνση a_1, η δεύτερη με σταθερή ταχύτητα v και η τρίτη σταθερή επιβράδυνση a_3 (αρνητική). Όσον αφορά στις δυνάμεις, στον φοιτητή ασκούνται η κάθετη αντίδραση N από τη ζυγαριά προς τα πάνω και το βάρος του mg προς τα κάτω. Ο φοιτητής κινείται μαζί με τον ανελκυστήρα και άρα πρέπει να έχουν την ίδια επιτάχυνση a (ίση με a_1, μηδέν και a_3 στις τρεις φάσεις αντίστοιχα). Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα:

$$N - mg = ma => N = m(g + a)$$

Λόγω δράσης-αντίδρασης, η κάθετη δύναμη N που ασκεί η ζυγαριά στον φοιτητή, είναι ίση κατά μέτρο με τη δύναμη που αυτός ασκεί στην ζυγαριά και είναι αυτή που προκαλεί την παραμόρφωση του ελατηρίου της ζυγαριάς. Άρα η ένδειξη είναι ανάλογη του N και η ζυγαριά απλά μετατρέπει τα $Newtons$ σε kg διαιρώντας την N με το g το οποίο το λαμβάνουμε ως $10\,ms^{-2}$ για ευκολία. Στη δεύτερη φάση της κίνησης έχουμε $a = 0$ και έτσι από την παραπάνω σχέση $N = mg$ οπότε η ένδειξη της ζυγαριάς είναι ίση με $N/g = m$ δηλαδή ίση με τη μάζα του φοιτητή και άρα $m = 80\,kg$.

Στην πρώτη φάση της κίνησης του ανελκυστήρα έχουμε σταθερή επιτάχυνση έστω a_1. Από την Εξ. 1.19 της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης θα ισχύει

$$2a_1\Delta x = v^2 - {v_0}^2$$

όπου $v_0 = 0$ είναι αρχική ταχύτητα του ανελκυστήρα, v η τελική η οποία είναι αυτή της δεύτερης φάσης μεταξύ του δεύτερου και του πέμπτου ορόφου η οποία από τα δεδομένα ισούται με $v = 6\,m/s$. Η απόσταση Δx είναι η απόσταση από τον 2ο όροφο έως και την αρχή του ισογείου δηλαδή απόσταση τριών ορόφων και έτσι $\Delta x = 3 \times 6 = 18\,m$. Από την παραπάνω σχέση βρίσκουμε για την επιτάχυνση:

$$a_1 = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2\Delta x} = \frac{36}{2 \times 18} = 1\,m/s^2$$

Η κάθετη αντίδραση σε αυτή την περίπτωση ισούται με

$$N = m(g + a) = 80(10 + 1) = 880\,N$$

και η αντίστοιχη ένδειξη της ζυγαριάς $N/g = 88\,kg$.

Με παρόμοια λογική, κατά την τρίτη φάση ο ανελκυστήρας καλύπτει έναν όροφο οπότε η απόσταση είναι $\Delta x = 6\,m$, η τελική ταχύτητα είναι $v = 0$ ενώ η αρχική αυτή της δεύτερης φάσης $v = 6\,m/s$. Έτσι βρίσκουμε για την αντίστοιχη επιβράδυνση a_3 το εξής αποτέλεσμα

$$a_3 = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2\Delta x} = \frac{-36}{18} = -2\,m/s^2$$

Η κάθετη αντίδραση σε αυτή την περίπτωση ισούται με

$$N = m(g + a) = 80(10 - 2) = 640\,N$$

και η αντίστοιχη ένδειξη της ζυγαριάς $N/g = 64\,kg$ που βλέπουμε ως ένδειξη κατά τη μέτρηση. Στη δεύτερη φάση

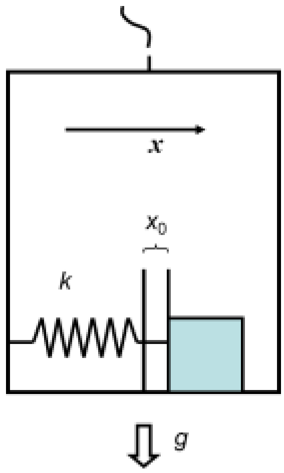
$$a_2 = -\frac{N - mg}{m}$$

Λόγω δράσης-αντίδρασης, η κάθετη δύναμη N που ασκεί η ζυγαριά στον φοιτητή, είναι ίση κατά μέτρο με τη δύναμη που αυτός ασκεί στην ζυγαριά και είναι αυτό που βλέπουμε ως ένδειξη κατά τη μέτρηση δηλαδή $N = 800\ N$. Αντικαθιστώντας τα δεδομένα και επιλέγοντας $g \approx 10\ ms^{-2}$ για ευκολία, οδηγούμαστε στο

$$a_2 = -\frac{N - mg}{m} = -\frac{800 - 10m}{m}$$

Επομένως η μέγιστη και η ελάχιστη ένδειξη της ζυγαριάς είναι 88 και 64 kg αντίστοιχα

4.13 Στο παρακάτω σχήμα ένας ανελκυστήρας ανέρχεται με επιτάχυνση a προς τα πάνω. Στο δάπεδο του ανελκυστήρα υπάρχει κιβώτιο το οποίο είναι συνδεδεμένο μέσω ελατηρίου με ένα από τα τοιχώματα του ανελκυστήρα. Ένας φοιτητής εφαρμόζει μια τέτοια δύναμη F στο κιβώτιο προς τα δεξιά ώστε αυτό να κινείται οριζόντια με σταθερή ταχύτητα. (α) Να βρεθεί η δύναμη F όταν το ελατήριο έχει παραμορφωθεί κατά $+x_0$ από την θέση ισορροπίας του. (β) Να απαντηθεί το ίδιο ερώτημα εάν το συρματόσχοινο ανάρτησης του ανελκυστήρα σπάσει οπότε και πέφτει στο κενό με επιτάχυνση g.



<u>Λύση</u>:

(α) Στο κιβώτιο κατά την κατακόρυφη διεύθυνση δρουν τα βάρος του mg και η κάθετη αντίδραση N. Αφού το κιβώτιο επιταχύνεται προς τα πάνω με επιτάχυνση a, τότε ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα ως προς αυτή την κατεύθυνση γράφεται ως εξής:

$$N - mg = ma => N = m(g + a)$$

Η αντίστοιχη δύναμη τριβής ολίσθησης είναι ίση με

$$T = \mu N = \mu m(g + a)$$

Επομένως ως προς τη διεύθυνση x ασκείται στο κιβώτιο η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου $-kx_0$ προς τα αριστερά και η T η οποία αντιτίθεται στην F (και αυτή προς αριστερά). Εφόσον το κιβώτιο κινείται οριζόντια με σταθερή ταχύτητα, τότε η αντίστοιχη οριζόντια επιτάχυνσή του είναι μηδέν και έτσι ο 2ος νόμος του Νεύτωνα ως προς την οριζόντια κατεύθυνση γράφεται ως εξής:

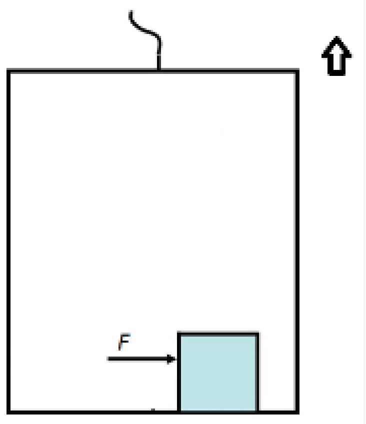
$$F - T - kx_0 = ma_x = 0 => F = kx_0 + \mu m(g + a)$$

(β) Όταν το συρματόσχοινο ανάρτησης αποτυγχάνει, ο ανελκυστήρας βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση οπότε η κατακόρυφη επιτάχυνσή του όπως και του κιβωτίου είναι $a = -g$ και η παραπάνω σχέση γίνεται

$$F = kx_0$$

Προσέξτε ότι σε αυτή την περίπτωση η τριβή $T = \mu N = \mu m(g + a)$ μηδενίζεται επειδή μηδενίζεται η δύναμη επαφής $N = m(g + a)$ μεταξύ κιβωτίου και δαπέδου. Επειδή όλα τα σώματα κινούνται με την ίδια επιτάχυνση προς τα κάτω, δεν υπάρχει δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ τους.

4.14 Φοιτητής ωθεί κιβώτιο μάζας $m = 4.5\ kg$ εφαρμόζοντας δύναμη F ώστε αυτό να κινείται με σταθερή οριζόντια ταχύτητα κατά μήκος του δαπέδου ενός ανελκυστήρα ο οποίος αρχικά είναι ακίνητος. Ο συντελεστής της τριβής ολίσθησης μεταξύ δαπέδου και κιβωτίου είναι μ. Ξαφνικά ο ανελκυστήρας ανέρχεται με επιτάχυνση λg όπου $\lambda = 0.4$ και ο φοιτητής παρατηρεί ότι χρειάζεται διαφορετική δύναμη F' για να προκαλέσει το ίδιο αποτέλεσμα όπως πριν (σταθερή οριζόντια ταχύτητα). Εάν $F' = 2\ N$, να βρεθεί ο συντελεστής της τριβής ολίσθησης. Πάρτε $g = 10\ m/s^2$ για ευκολία.



Απάντηση: 0.03

Λύση:

Ακίνητος ανελκυστήρας: Ως προς την κατακόρυφο υπάρχει ισορροπία οπότε

$$N - mg = 0 => N = mg$$

Σταθερή οριζόντια ταχύτητα σημαίνει μηδέν επιτάχυνση ως προς την οριζόντια διεύθυνση και άρα ισορροπία στις οριζόντιες δυνάμεις, δηλαδή η τριβή $T = \mu N$ είναι ίση με τη δύναμη του φοιτητή

$$F = \mu m g$$

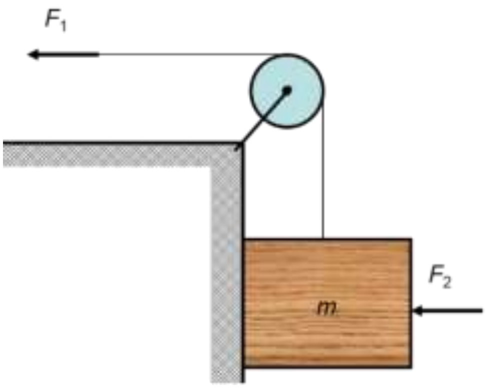
Κινούμενος ανελκυστήρας: Πλέον δεν υπάρχει ισορροπία στην κατακόρυφο. Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$N - mg = ma => N = mg + \lambda mg = (\lambda + 1)mg$$

Σταθερή ταχύτητα ως προς την οριζόντια κατεύθυνση σημαίνει ισορροπία στις οριζόντιες δυνάμεις, δηλαδή τριβή ίση με τη δύναμη του φοιτητή

$$F' = \mu(\lambda + 1)mg => \mu = \frac{F'}{(\lambda + 1)mg} = \frac{2}{(0.4 + 1)4.5 \times 10} = 0.03$$

4.15 Στο παρακάτω σχήμα το κιβώτιο μάζας $m = 0.2\ kg$ βρίσκεται σε ακινησία εάν η δύναμη F_2 είναι αρκετά μεγάλη λόγω τριβής με την επιφάνεια επαφής. Εάν την ελαττώσουμε, σε κάποια οριακή της τιμή το κιβώτιο ξεκινάει να ανέρχεται με σταθερή επιτάχυνση $a = 2.5\ m/s^2$ (λόγω της F_1). Εάν θεωρηθεί ότι η F_2 είναι απειροστά χαμηλότερη από αυτήν την οριακή τιμή και ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι ο μισός από τον συντελεστή στατικής τριβής, να βρεθεί η δύναμη F_1. Πάρτε $g = 10\ m/s^2$ για ευκολία.



Απάντηση: $2.5\ N$

Λύση:

Η οριακή δύναμη στατικής τριβής ισούται με $T_\Sigma = \mu_\Sigma F_2$ ενώ η τριβή ολίσθησης $T = \mu F_2$ όπου μ_Σ και μ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές τριβής. Από τα δεδομένα $\mu_\Sigma = 2\mu$ και άρα $T_\Sigma = 2T$. Στο κιβώτιο δρούνε 3 δυνάμεις, το βάρος του B, η τριβή (T_Σ ή T) και η F_1 (μέσω της ιδανικής τροχαλίας). Παίρνουμε δυο περιπτώσεις:

(α) Οριακή ισορροπία (τα θετικά προς τα πάνω).

$$F_1 - B - T_\Sigma = 0 => F_1 - B - 2T = 0$$

(β) Ολίσθηση με επιτάχυνση a. Από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα

$$F_1 - B - T = ma$$

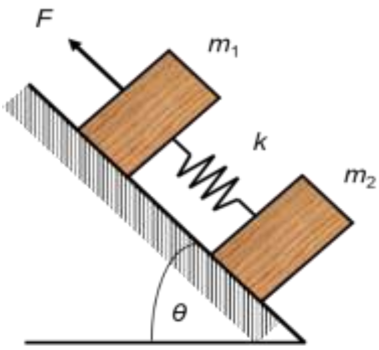
Συνδυάζοντας

$$\frac{F_1 - B}{2} = ma => F_1 = mg + 2ma = m(g + 2a)$$

Αντικαθιστώντας

$$F_1 = 0.2(10 + 2.5) = 2.5\ N$$

4.16 Τα δυο κιβώτια στο παρακάτω σχήμα συνδέονται μεταξύ τους με ελατήριο σταθεράς k. Όταν εφαρμόζεται μια σταθερή δύναμη F στο πάνω κιβώτιο, τότε τα δυο κιβώτια κινούνται με σταθερή (κοινή) επιτάχυνση. Εάν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης του κάθε κιβωτίου με το δάπεδο είναι μ_1 και μ_2 αντίστοιχα, τότε να βρεθεί η παραμόρφωση Δx του ελατηρίου.



Λύση:

Στο κάτω κιβώτιο ως προς τη διεύθυνση κάθετα στην κίνηση, δρα η συνιστώσα του βάρους $m_2 g cos\theta$ και η κάθετη αντίδραση N_2. Εφόσον το σώμα δεν κινείται ως προς αυτή τη διεύθυνση, τότε οι δυο αυτές δυνάμεις πρέπει να αλληλοαναιρούνται. Έτσι $N_2 = m_2 g cos\theta$. Ως προς τη διεύθυνση παράλληλα στην κίνηση, δρουν η δύναμη του ελατηρίου $k\Delta x$ προς τα πάνω, η συνιστώσα του βάρους $m_2 g sin\theta$ προς τα κάτω και η τριβή $\mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g cos\theta$ επίσης προς τα κάτω. Εάν η επιτάχυνση ως προς αυτή τη διεύθυνση είναι ίση με a, τότε από τον 2^o νόμο του Νεύτωνα

$$k\Delta x - m_2 g sin\theta - \mu_2 m_2 g cos\theta = m_2 a$$

Στο πάνω κιβώτιο η κατάσταση είναι παρόμοια αλλά η δύναμη του ελατηρίου είναι προς τα κάτω και δρα επιπλέον και η F. Εφόσον τα κιβώτια έχουν κοινή ταχύτητα, τότε θα έχουν και κοινή επιτάχυνση και επομένως

$$F - k\Delta x - m_1 g sin\theta - \mu_1 m_1 g cos\theta = m_1 a$$

Απαλείφουμε την επιτάχυνση a μεταξύ αυτών των δυο εξισώσεων διαιρώντας την πρώτη με m_2 και την δεύτερη με m_1. Το αποτέλεσμα είναι

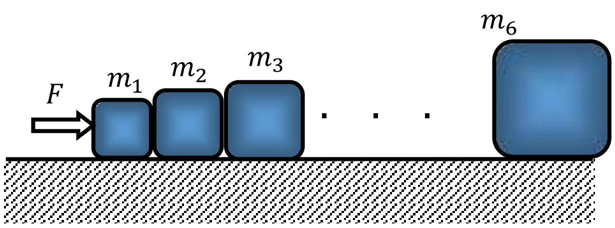
$$\frac{F}{m_1} - \frac{k}{m_1}\Delta x - g sin\theta - \mu_1 g cos\theta = \frac{k}{m_2}\Delta x - g sin\theta - \mu_2 g cos\theta$$

Λύνοντας

$$\frac{F}{m_1} - \frac{k}{m_1}\Delta x - \mu_1 g cos\theta = \frac{k}{m_2}\Delta x - \mu_2 g cos\theta$$

$$\Delta x = \frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}\left[\frac{F}{m_1} + (\mu_2 - \mu_1) g cos\theta\right]$$

4.17 Μια δύναμη F δρα στο αριστερό άκρο ενός συστήματος έξι κιβωτίων με μάζες $m_1 = m$ η πρώτη και $m_i = \lambda m_{i-1}$ οι υπόλοιπες όπου $i = 2,3 \dots 6$ και $\lambda > 1$ ένας καθαρός αριθμός. Εάν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης με το δάπεδο είναι μ, να βρεθεί η διαφορά $N_{23} - N_{34}$ όπου $N_{i,i\pm1}$ είναι η δύναμη αλληλεπίδρασης του κιβωτίου i με το γειτονικό του κιβώτιο $i \pm 1$ (Υπαινιγμός: Δουλέψτε πρώτα στο όλο συσσωμάτωμα σαν να ήταν ένα ενιαίο σώμα).



<u>Απάντηση</u>: $F\lambda^2(1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots \lambda^5)^{-1}$

<u>Λύση</u>: Έστω m_i η μάζα του κάθε κιβωτίου. Αφού $m_2 = \lambda m_1 = \lambda m$ και $m_3 = \lambda m_2 = \lambda^2 m$, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ισχύει αναδρομικά ότι

$$m_i = \lambda^{i-1} m$$

με $i = 1,2 \dots 6$. Η ολική μάζα του όλου του συσσωματώματος ισούται με

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_6 = (1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots \lambda^5) m$$

Λόγω δράσης αντίδρασης, η κάθετη δύναμη αντίδρασης από το δάπεδο στο συσσωμάτωμα ισούται με το βάρος του Mg και επομένως η ολική τριβή ισούται με $T = \mu Mg$. Αφού στο συσσωμάτωμα δρουν οριζοντίως μόνο η F και η T, η επιτάχυνσή του θα είναι ίση με

$$a = \frac{F - T}{M} = \frac{F}{M} - \mu g = \frac{F}{M} - \mu g$$

Η επιτάχυνση αυτή είναι κοινή για όλες τις μάζες. Στην κάθε μάζα m_i εκτός των δυο ακριανών, δρουν τρεις οριζόντιες δυνάμεις, οι δυνάμεις επαφής $N_{i,i-1}$ (από αριστερά) και $N_{i,i+1}$ (από δεξιά), και η δύναμη τριβής $T_i = \mu m_i g = \mu\lambda^{i-1}mg$. Έτσι ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα γράφεται

$$N_{i,i-1} - N_{i,i+1} - T_i = m_i a$$

Λόγω δράσης – αντίδρασης, $N_{i,i-1} = N_{i-1,1}$ οπότε δεν έχει σημασία η σειρά των δυο δεικτών στην δύναμη επαφής. Έτσι

$$N_{i-1,i} - N_{i,i+1} - \mu\lambda^{i-1}mg = \lambda^{i-1}ma =>$$

$$N_{i-1,i} - N_{i,i+1} = \mu\lambda^{i-1}mg + \lambda^{i-1}ma = \lambda^{i-1}m(\mu g + a)$$

ή

$$N_{i-1,i} - N_{i,i+1} = \lambda^{i-1}m\left(\mu g + \frac{F}{M} - \mu g\right) = \lambda^{i-1}m\frac{F}{M}$$

$$N_{i-1,i} - N_{i,i+1} = \lambda^{i-1}\frac{F}{(1+\lambda+\lambda^2+\cdots\lambda^5)}$$

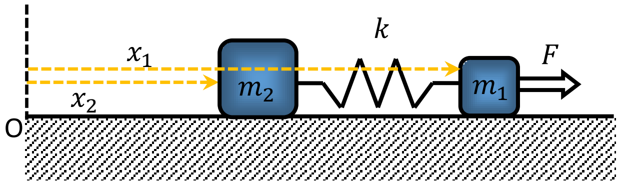
Η ζητούμενη διαφορά είναι αυτή για $i = 3$ οπότε

$$N_{2,3} - N_{3,4} = \frac{\lambda^2}{(1+\lambda+\lambda^2+\cdots\lambda^5)}F$$

4.18 Τα δυο κιβώτια στο παρακάτω σχήμα συνδέονται μεταξύ τους με ελατήριο σταθεράς k και αρχικά κρατιούνται ακίνητα σε τέτοια απόσταση ώστε το ελατήριο να έχει το φυσικό του μήκος L. Στο $t = 0$ εφαρμόζεται μια εξωτερική μεταβλητή δύναμη F και τα δυο κιβώτια κινούνται προς τα δεξιά με διαφορετικές ταχύτητες $x_1'(t)$ και $x_2{}'(t)$ όπου x_1 και x_2 είναι οι συντεταγμένες του κάθε κιβωτίου αντίστοιχα από κάποιο σημείο αναφοράς Ο. Δεν υπάρχει τριβή μεταξύ δαπέδου και κιβωτίων. Εάν η εξωτερική δύναμη αυτοπροσαρμόζεται ώστε σε κάθε χρονική στιγμή να είναι ίση με

$$F = \frac{(m_1+m_2)\lambda}{m_2}\Delta x$$

όπου $\Delta x = x_2 - x_1$ η παραμόρφωση του ελατηρίου, τότε να βρεθούν (α) η διαφορική εξίσωση (Δ.Ε.) που ικανοποιεί το Δx με τη βοήθεια του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα και (β) μια έκφραση του Δx συναρτήσει του χρόνου. Εάν δυσκολεύεστε να λύσετε τη Δ.Ε., μπορείτε να ακολουθήσετε την απλή μέθοδο που παρουσιάζεται στο βιβλίο στο παράδειγμα με τον αλεξιπτωτιστή).



<u>Απάντηση</u>: (β) $Lcos(\omega t)$ όπου $\omega = \sqrt{(m_1 + m_2)(k + \lambda)/m_1 m_2}$

<u>Λύση</u>:

(α) Στο αριστερό κιβώτιο δρα μόνο η δύναμη του ελατηρίου $k\Delta x$ προς τα δεξιά και η επιτάχυνσή του είναι ίση με x_2'' οπότε από τον 2° νόμο του Νεύτωνα

$$k\Delta x = m_2 x_2''$$

Στο δεξί κιβώτιο η κατάσταση είναι παρόμοια αλλά η δύναμη του ελατηρίου είναι αντίθετη και δρα επιπλέον και η F. Επομένως

$$F - k\Delta x = m_1 x_1''$$

Διαιρούμε την πρώτη εξίσωση με m_2, την δεύτερη με m_1, και αφαιρούμε κατά μέλη ώστε να προκύψει στο δεύτερο μέλος το $\Delta x'' = x_1'' - x_2''$:

$$\Delta x'' = -\frac{k}{m_2}\Delta x - \frac{k}{m_1}\Delta x - \frac{F}{m_1}$$

$$\Delta x'' = -\frac{(m_1 + m_2)k}{m_1 m_2}\Delta x - \frac{F}{m_1}$$

Χρησιμοποιώντας την δεδομένη δύναμη

$$\Delta x'' = -\frac{(m_1 + m_2)k}{m_1 m_2}\Delta x - \frac{(m_1 + m_2)\lambda}{m_1 m_2}\Delta x$$

$$\Delta x'' = -\frac{(m_1 + m_2)(k + \lambda)}{m_1 m_2}\Delta x$$

(β) Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι της μορφής

$$\Delta x'' = -c\Delta x$$

όπου $c = (m_1 + m_2)(k + \lambda)/m_1 m_2$ μια σταθερά και λύνεται όπως και η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση του Προβλήματος 4.4, δείτε τις λύσεις παραπάνω. Η λύση είναι της μορφής

$$\Delta x(t) = Asin(\omega t) + Bcos(\omega t)$$

όπου A, B και ω είναι σταθερές που πρέπει να προσδιορισθούν. Εάν παραγωγίσουμε ως προς το χρόνο, τότε το αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι ίσο με $\Delta x' = x_2' - x_1' = v_2 - v_1$ όπου v_1 και v_2 είναι οι ταχύτητες των δυο κιβωτίων. Στο $t = 0$ το όλο σύστημα ηρεμεί και έτσι $\Delta x'(0) = 0$. Παραγωγίζουμε την παραπάνω λύση της διαφορικής εξίσωσης και εφαρμόζουμε αυτή την αρχική συνθήκη για να πάρουμε

$$0 = A\omega cos(0) - B\omega sin(0) => A = 0$$

και επομένως

$$\Delta x(t) = Bcos(\omega t)$$

Επίσης στο $t = 0$ το ελατήριο να έχει το φυσικό του μήκος L και έτσι από την παραπάνω $B = L$. Επομένως

$$\Delta x(t) = Lcos(\omega t)$$

Τέλος, εάν αντικαταστήσουμε την παραπάνω έκφραση στην διαφορική εξίσωση, τότε βλέπουμε ότι

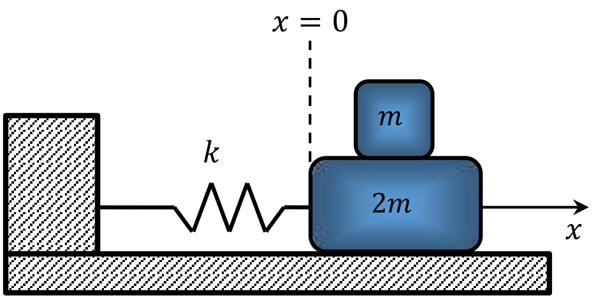
$$\omega^2 = c$$

οπότε

$$\omega = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)(k + \lambda)}{m_1 m_2}}$$

4.19 Το ελατήριο του παρακάτω σχήματος έχει σταθερά k, είναι στα αριστερά του στερεωμένο σε ακλόνητο τοίχο και συνδέεται στα δεξιά του με σώμα μάζας $2m$ το οποίο ολισθαίνει επάνω σε λείο δάπεδο και πάνω στο οποίο έχει τοποθετηθεί δεύτερο σώμα μάζας m. Ο συντελεστής στατικής τριβής και τριβής ολίσθησης μεταξύ των σωμάτων είναι μ_s και μ. Ένας φοιτητής εκτρέπει στο $t = 0$ το όλο συσσωμάτωμα δεξιά κατά $x = x_0$, όπου x η οριζόντια απόσταση του κάτω κιβωτίου από τη θέση ισορροπίας του ελατηρίου, και στη συνέχεια το αφήνει ελεύθερο. Παρατηρεί ότι αρχικά το πάνω σώμα ολισθαίνει και κατά την χρονική στιγμή t_1, πριν ακόμα το κάτω σώμα επιστρέψει για πρώτη φορά στην θέση ισορροπίας, σταματάει η ολίσθηση και τα δυο σώματα κινούνται μαζί ως ένα. Να βρεθεί η χρονική t_1 ακολουθώντας τα εξής απλά βήματα:

(α) Γράψτε τους νόμους του Νεύτωνα για τα δυο σώματα, (β) Με βάση αυτές τις εξισώσεις, λύστε ως προς x για χρόνους $t < t_1$ (σημειώστε ότι σε μια αντικατάσταση μεταβλητής $\alpha = \beta + c$ όπου c μια σταθερά, ισχύει για τις παράγωγους $\alpha' = \beta'$ και ομοίως για υψηλότερης τάξης παραγωγίσεις), (γ) Εφαρμόστε τις αρχικές συνθήκες ώστε να προσδιορισθούν τυχόν σταθερές ολοκλήρωσης και τέλος (δ) εφαρμόστε μια κατάλληλη συνθήκη στο $t = t_1$ ώστε να βρείτε το ζητούμενο.



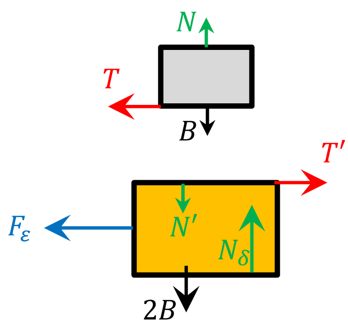
Λύση:

α) Οι δυνάμεις που δρουν στα κιβώτια φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Είναι τα βάρη B και $2B$ όπου $B = mg$, οι κάθετες αντιδράσεις $N = N'$ σαν ζεύγος δράσης-αντίδρασης μεταξύ των δυο κιβωτίων, η κάθετη αντίδραση N_δ από το δάπεδο προς το μεγάλο κιβώτιο, η δύναμη του ελατηρίου F_ε και οι τριβές T και T'. Στο πάνω κιβώτιο η ισορροπία στον κατακόρυφο άξονα οδηγεί στο $N = B = mg$. Αφού τα δυο κιβώτια ολισθαίνουν, τότε δεν θα έχουν την ίδια οριζόντια επιτάχυνση a. Από τον 2° νόμο του Νεύτωνα στο πάνω κιβώτιο

$$T = ma_1$$

Στο κάτω κιβώτιο δρουν μαζί η δύναμη ελατηρίου και η τριβή και έτσι

$$-F_\varepsilon + T = 2ma_2$$



(β) Για χρόνους για χρόνους $t < t_1$ έχουμε ολίσθηση οπότε ισχύει $T = \mu B = \mu mg$. Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση στην δεύτερη εξίσωση, μαζί με την δύναμη του ελατηρίου $F_\varepsilon = kx$ και την επιτάχυνση $a_2 = \ddot{x}$ σε μορφή δεύτερης παραγώγου ως προς το χρόνο, οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$2m\ddot{x} = -kx + \mu mg$$

ή

$$2m\ddot{x} = -k(x - \frac{\mu mg}{k})$$

Θέτουμε $\tilde{x} = x - \mu mg/k$ και σύμφωνα με τις οδηγίες της εκφώνησης έχουμε

$$2m\ddot{\tilde{x}} = -k\tilde{x}$$

με γενική λύση

$$\tilde{x} = \tilde{x}_0 sin(\omega t + \varphi)$$

όπου $\omega^2 = k/2m$. Από τις αρχικές συνθήκες $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$, έχουμε

$$\tilde{x}(0) = x_0 - \frac{\mu m g}{k} = \tilde{x}_0 sin\varphi$$

$$\dot{\tilde{x}}(0) = \dot{x}(0) = \omega\tilde{x}_0 cos\varphi = 0$$

Η δεύτερη δίνει $\varphi = \pi/2$ και αντικαθιστώντας στην πρώτη, οδηγεί στο

$$x_0 - \frac{\mu m g}{k} = \tilde{x}_0$$

Άρα

$$\tilde{x} = \left(x_0 - \frac{\mu m g}{k}\right) cos\omega t$$

Επαναφέρουμε την αρχική μεταβλητή x

$$x - \frac{\mu m g}{k} = \left(x_0 - \frac{\mu m g}{k}\right) cos\omega t$$

$$x = \frac{\mu m g}{k} + \left(x_0 - \frac{\mu m g}{k}\right) cos\omega t$$

(γ) Η επιτάχυνση του κάθε κιβωτίου δίνεται από την δεύτερη παράγωγο ως προς χρόνο:

$$\ddot{x} = -\omega^2 \left(x_0 - \frac{\mu m g}{k}\right) cos\omega t$$

Κατά την χρονική στιγμή t_1 που οριακά παύει η ολίσθηση, τα δυο σώματα έχουν την ίδια επιτάχυνση

$$a_1 = \ddot{x}$$

και η δύναμη τριβής που είναι η μόνη δύναμη που δρα στο επάνω σώμα, είναι η μέγιστη στατική τριβή $T = \mu_s m g$ και έτσι ο 2ος νόμος του Νεύτωνα γίνεται

$$m a_1 = T$$

ή

$$\ddot{x} = \mu_s g$$

ή

$$-\omega^2 \left(x_0 - \frac{\mu m g}{k}\right) cos\omega t_1 = \mu_s g$$

ή

$$t_1 = \frac{1}{\omega} cos^{-1}\left[\frac{\mu_s g}{\omega^2\left(\frac{\mu m g}{k} - x_0\right)}\right]$$

τελικά

$$t_1 = \sqrt{\frac{2m}{k}} cos^{-1}\left[\frac{2m\mu_s g}{k\left(\frac{\mu m g}{k} - x_0\right)}\right]$$

5. ΟΡΜΗ – ΩΘΗΣΗ

Θεώρημα Ώθησης – Ορμής

5.1 Ένας ποδοσφαιριστής κλωτσάει μια ακίνητη μπάλα ποδοσφαίρου μάζας $0.2\,kg$ προσδίδοντάς της ταχύτητα $30\,m/s$. Πόση είναι η ώθηση της δύναμης του ποδιού του σε αυτό το χτύπημα;

Λύση:

Σύμφωνα με το Θεώρημα Ώθησης- Ορμής, Εξ. 5.5, η ώθηση Ω είναι ίση με την μεταβολή της ορμής. Για ακίνητη μπάλα η ορμή είναι μηδέν. Η ορμή μετά το κτύπημα σύμφωνα με την Εξ. 5.1 είναι ίση με

$$p = mv = 0.2 \times 30 = 15\,kg \cdot m/s$$

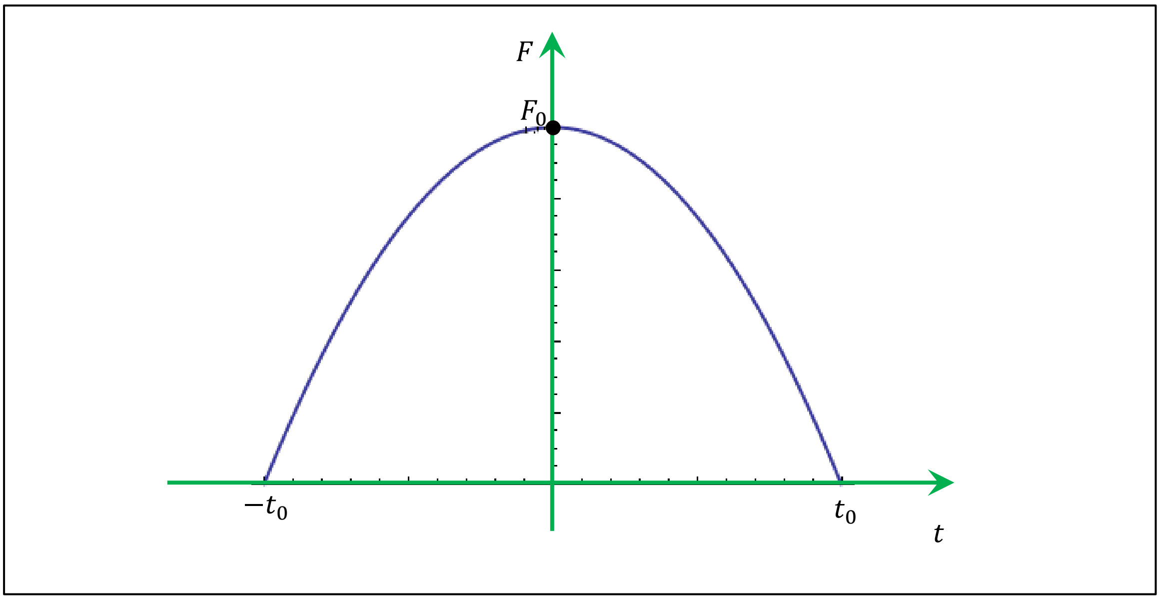
Επομένως

$$\Omega = p - 0 = 15\,kg \cdot m/s$$

5.2 Σε μια δοκιμή σύγκρουσης ενός βαγονιού τραίνου μάζας m με ένα ελαστικό προστατευτικό τοιχίο από κάποιο ειδικό σύνθετο υλικό, οι σχεδιαστές μηχανικοί κατέγραψαν την δύναμη $F(t)$ (κατά μέτρο) που δέχεται το βαγόνι όταν κινείται με μια συγκεκριμένη χαμηλή και σταθερή ταχύτητα v_0 προς τα δεξιά, συναρτήσει του χρόνου t. Συγκεκριμένα βρήκαν ότι η δύναμη αυτή είναι μηδέν, όπως αναμένεται, πριν την επαφή με το τοιχίο, αυξάνει μέχρι μιας μέγιστης τιμής F_0 και ξαναπέφτει στην τιμή μηδέν όταν σταματάει το βαγόνι. Η διάρκεια όλης της επαφής είναι ίση με $2t_0$. Επειδή η συνάρτηση αυτή $F(t)$ είναι συμμετρική ως προς το μέγιστο, όρισαν αυθαίρετα ως $t = 0$ το χρόνο στο μέγιστο και έτσι προκύπτει η πρώτη επαφή στο $t = -t_0$ και το σταμάτημα του βαγονιού στο $t = t_0$.
(α) Εάν γνωρίζετε ότι η $F(t)$ είναι μια τετραγωνική συνάρτηση του χρόνου, σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση και βρείτε τη μαθηματική εξίσωση του περιγράφει αυτή τη δύναμη από $t = -t_0$ έως το $t = t_0$
(β) οι μηχανικοί θέλουν να χρησιμοποιήσουν τα δεδομένα τους για να υπολογίζουν το v_0 και για το σκοπό αυτό βρείτε μια έκφραση του v_0 συναρτήσει του t_0, F_0 και m
(γ) Αποδείξτε το θεώρημα ώθησης-ορμής για το συγκεκριμένο παράδειγμα, δηλαδή υπολογίστε την ώθηση από τον ορισμό της και δείξτε ότι είναι ίση με την μεταβολή της ορμής του βαγονιού.

Λύση:

(α) Από τα δεδομένα, η γραφική παράσταση πρέπει να μοιάζει κάπως έτσι:



Αναγκαστικά πρέπει η τετραγωνική συνάρτηση να είναι με τα κοίλα προς τα κάτω και άρα είναι της μορφής

$$F(t) = F(0) - \lambda t^2$$

όπου από τα δεδομένα $F(0) = F_0$. Επίσης στο $t = \pm t_0$ η F μηδενίζεται και άρα

$$0 = F_0 - \lambda {t_0}^2 => \lambda = \frac{F_0}{{t_0}^2}$$

Έτσι η συνάρτηση είναι η

$$F(t) = F_0 - \frac{F_0}{{t_0}^2} t^2 = F_0 \left(1 - \frac{t^2}{{t_0}^2}\right)$$

(β) Αυτή η δύναμη επιβραδύνει το βαγόνι. Από τον 2^o νόμο του Νεύτωνα, η επιβράδυνση $a(t)$ είναι ίση με

$$a(t) = -\frac{F(t)}{m} = -\frac{F_0}{m}\left(1 - \frac{t^2}{{t_0}^2}\right)$$

Το αρνητικό πρόσημο είναι απαραίτητο επειδή η $F(t)$ μας δίνεται κατά μέτρο (θετική) ενώ η δύναμη έχει φορά προς τον αριστερά και επομένως είναι αρνητική. Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε για την ταχύτητα

$$v(t) = -\frac{F_0}{m}\left(t - \frac{t^3}{3{t_0}^2}\right) + c$$

Για να βρούμε το c, εφαρμόζουμε την αρχική συνθήκη $v(-t_0) = v_0$ για να πάρουμε:

$$v_0 = \frac{F_0}{m}\left(t_0 - \frac{{t_0}^3}{3{t_0}^2}\right) + c$$

Απαλείφοντας το c (με αφαίρεση κατά μέλη) προκύπτει

$$v(t) = -\frac{F_0}{m}\left(t - \frac{t^3}{3{t_0}^2}\right) - \frac{F_0}{m}\left(t_0 - \frac{{t_0}^3}{3{t_0}^2}\right) + v_0$$

Στο άλλο όριο του χρόνου $t = t_0$, έχουμε $v(t_0) = 0$ δηλαδή

$$0 = -\frac{F_0}{m}\left(t_0 - \frac{{t_0}^3}{3{t_0}^2}\right) - \frac{F_0}{m}\left(t_0 - \frac{{t_0}^3}{3{t_0}^2}\right) + v_0$$

από όπου προκύπτει ότι

$$v_0 = \frac{2F_0}{m}\left(t_0 - \frac{{t_0}^3}{3{t_0}^2}\right) = \frac{4F_0 t_0}{3m}$$

(γ) Εξ' ορισμού η ώθηση ισούται με

$$\Omega = \int_{-t_0}^{t_0} F dt = \int_{-t_0}^{t_0} -F_0\left(1 - \frac{t^2}{{t_0}^2}\right) dt = -F_0\left(t - \frac{t^3}{3{t_0}^2}\right)_{-t_0}^{t_0}$$

(θυμηθείτε τον λόγο ύπαρξης του αρνητικού προσήμου στην $F(t)$). Τελικά

$$\Omega = -2F_0\left(t_0 - \frac{t^3}{3{t_0}^2}\right) = -\frac{4F_0 t_0}{3}$$

Από την άλλη, η μεταβολή της ορμής ισούται με

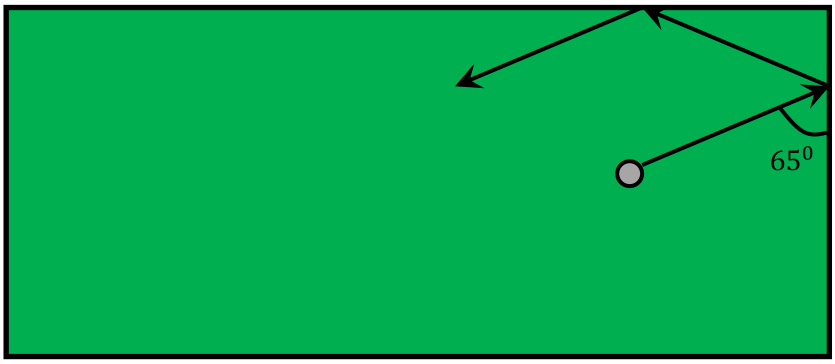
$$\Delta p = p_1 - p_0 = 0 - m v_0 = -m v_0$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του υποερωτήματος β για το v_0 οδηγεί στο

$$\Delta p = -\frac{4F_0 t_0}{3}$$

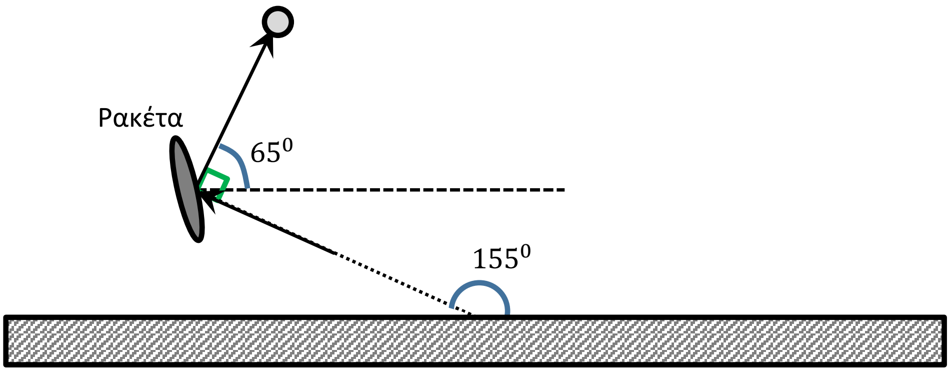
που είναι ταυτόσημο με το Ω!

5.3 Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα το οποίο απεικονίζει την κάτοψη ενός τραπεζιού μπιλιάρδου, μια μπάλα μάζας $0.2\ kg$ που κινείται με ταχύτητα $10\ m/s$ προσπίπτει στη δεξιά πλευρά τραπεζιού, ανακλάται και ακολούθως προσπίπτει στην πάνω πλευρά του και ανακλάται ξανά. Να βρεθεί η ώθηση που ασκεί το τραπέζι στην μπάλα κατά τις δυο ανακλάσεις, εάν σε κάθε ανάκλαση γνωρίζουμε ότι (α) η γωνία πρόσπτωσης ισούται με τη γωνία ανάκλασης και (β) σε κάθε ανάκλαση η ταχύτητα μειώνεται κατά 20%.



5.4 Μια μπάλα του τένις μάζας $0.1\ kg$ η οποία προσπίπτει σε μια ρακέτα με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 45\ m/s$ και γωνίας $\theta_1 = 155^0$ (ως προς τον άξονα-x), δέχεται μια στιγμιαία δύναμη $\vec{F}$ από αυτήν ώστε μετά την επαφή να ταξιδεύει με ταχύτητα μέτρου $v_2 = 70\ m/s$ και γωνίας $\theta_2 = \theta_1 - 90^0$. Να βρεθεί η γωνία θ της δύναμης $\vec{F}$ (ως προς τον άξονα-x).

<u>Λύση</u>:



Η αρχική ορμή της μπάλας έχει μέτρο

$$p_1 = mv_1 = 0.1 \times 45 = 4.5\ kg \cdot m/s$$

και διεύθυνση ίδια με της ταχύτητας $\theta_1 = 155^0$ και έτσι οι συνιστώσες της είναι ίσες με:

$$p_{1x} = -4.079\ kg \cdot m/s$$

$$p_{1y} = \ 1.901\ kg \cdot m/s$$

Η τελική ορμή της μπάλας έχει μέτρο

$$p_2 = mv_2 = 0.1 \times 70 = 7.0\ kg \cdot m/s$$

και διεύθυνση ίδια με της ταχύτητας $\theta_2 = 155 - 90 = 65^0$ και έτσι οι συνιστώσες της είναι ίσες με:

$$p_{2x} = 2.958\ kg \cdot m/s$$

$$p_{2y} = 6.344\ kg \cdot m/s$$

Η ώθηση της δύναμης $\vec{\Omega} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ έχει συνιστώσες:

$$\Omega_x = p_{2x} - p_{1x} = 7.037\ kg \cdot m/s$$

$$\Omega_y = p_{2y} - p_{1y} = 4.442\ kg \cdot m/s$$

Η διεύθυνσή της συμπίπτει με τη διεύθυνση της δύναμης και περιγράφεται από τη γωνία θ η οποία δίνεται από την

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{\Omega_y}{\Omega_x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{4.442}{7.037}\right) = 32.3^0$$

5.5 Σώμα το οποίο έχει αρχική ορμή μέτρου $p = 45\ kg\ m/s$ και ταξιδεύει με ταχύτητα η οποία σχηματίζει γωνία 20^0 ως προς τον άξονα-x, εκτρέπεται από την πορεία του λόγω μιας δύναμης που ασκείται επάνω του στο χρονικό διάστημα από $t = 0\ s$ έως και $2\ s$ και η οποία έχει συνιστώσες $F_x = bt^2 + ct$ και $F_y = ctsin(bt/c)$ όπου $b = 6\ N/s^2$ και $c = 10\ N/s$. Να βρεθεί η x-συνιστώσα της τελικής ορμής σε μονάδες S.I. στο πέρας των 2 δευτερολέπτων.

Λύση:

Η αρχική ορμή της μπάλας έχει μέτρο $p = 45\ kg \cdot m/s$

και διεύθυνση ίδια με αυτή της ταχύτητας $\theta = 20^0$ και έτσι οι συνιστώσες της είναι ίσες με:

$$p_x = 42.3\ kg \cdot m/s$$

$$p_y = 15.4\ kg \cdot m/s$$

Από το θεώρημα ώθησης – ορμής στον άξονα-x:

$$\int_{t_1}^{t_2} F_x dt = p'_x - p_x$$

έχουμε για την x-συνιστώσα της τελικής ορμής

$$p'_x = p_x + \int_0^2 (bt^2 + ct)dt = p_x + \frac{2^3 b}{3} + \frac{2^2 c}{2}$$

Αντικαθιστώντας:

$$p'_x = 78.3\ kg \cdot m/s$$

Διατήρηση της Ορμής

5.6 Ένα άτομο 75 kg που στέκεται σε μια πλατφόρμα πάγου χωρίς τριβή ρίχνει μια μπάλα προς τα εμπρός με ταχύτητα 11 m/s. Εάν μετά τη ρίψη κινείται προς τα πίσω με ταχύτητα 30 cm/s, ποια είναι η μάζα της μπάλας;

5.7 Ένα αυτοκίνητο που κινείται με 9 m/s συντρίβεται επάνω σε άλλο αυτοκίνητο ίσης μάζας σταματημένο σε ένα φανάρι. Ποια είναι η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά τη συντριβή, υποθέτοντας ότι τα δυο αυτοκίνητα προσκολλιούνται μεταξύ τους;

5.8 Σημειακή μάζα $m_1 = 0.6\ kg$ ταξιδεύει κατά μήκος του θετικού άξονα x με ταχύτητα u_1 και συγκρούεται με δεύτερη σημειακή και ακίνητη μάζα $m_2 = 0.3\ kg$. Μετά την σύγκρουση, η m_1 κινείται προς τον αρνητικό άξονα y με ταχύτητα $4\ m/s$ ενώ η ταχύτητα v_2 της m_2 σχηματίζει γωνία 41^0 με τον άξονα x. Να βρεθούν οι u_1 και v_2.

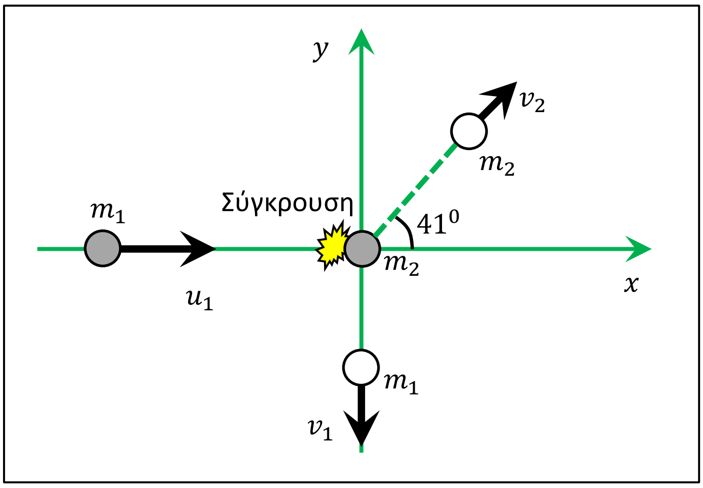
<u>Απάντηση</u>:

<u>Λύση</u>:

Πριν τη σύγκρουση $u_2 = 0$ οπότε υπάρχει ορμή μόνο κατά τον άξονα x δηλαδή

$$p_x = m_1 u_1$$

$$p_y = 0$$



Μετά την σύγκρουση η ταχύτητα $v_1 = 4\ m/s$ είναι κατά μήκος του αρνητικού άξονα-y ενώ η v_2 σχηματίζει γωνία 41^0 ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Επομένως η ορμή της m_2 πρέπει να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες $m_2 v_2 cos41^0$ στον άξονα-x και $m_2 v_2 sin41^0$ στον άξονα-y. Έτσι η συνολική ορμή μετρά τη σύγκρουση σε συνιστώσες έχει ως εξής:

$$p_x' = m_2 v_2 cos41^0$$

$$p_y' = m_2 v_2 sin41^0 - m_1 v_1$$

Στη σύγκρουση λαμβάνουν χώρα εσωτερικές δυνάμεις οπότε η ορμή διατηρείται. Από την διατήρηση στον άξονα y

$$0 = m_2 v_2 sin41^0 - m_1 v_1 => v_2 = \frac{0.6 \times 4}{0.3 \times sin41^0} = 12.2\, m/s$$

Ομοίως από την διατήρηση στον άξονα x

$$m_1 u_1 = m_2 v_2 cos41^0 + 0 => u_1 = \frac{0.3 \times 12.2 \times cos41^0}{0.6} = 4.6\, m/s$$

5.9 Ένα βλήμα μάζας $1.2\ kg$ εκτοξεύεται από ένα σημείο Ο στο έδαφος με αρχική ταχύτητα $18\ m/s$ και γωνία 65^0 ως προς το έδαφος. Σε χρόνο $0.5\ s$ το βλήμα εκρήγνυνται και χωρίζεται οριζοντίως σε δυο μέρη (οι δυνάμεις της εκρήξεως έδρασαν οριζόντια) με αναλογία μάζας $2:1$ (δεν υπάρχουν άλλα θραύσματα) τα οποία οριζοντίως κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση όπως και το αρχικό βλήμα (υπάρχει και κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας). Εάν η ταχύτητα του μεγάλου θραύσματος απειροστά μετά την έκρηξη σε χρόνο $t = 0.5^+\ s$ είναι κατά μέτρο ίση με $12\ m/s$, να βρεθούν (α) Η ταχύτητα κατά μέτρο του άλλου θραύσματος στον ίδιο χρόνο και (β) η γωνία μεταξύ των δυο ταχυτήτων των δυο θραυσμάτων στον ίδιο χρόνο. Πάρτε $g \approx 10\ m/s^2$ για ευκολία.

Απάντηση: (α) $18.6\ \ m/s$, (β) 33.2^0

Λύση:

(α) Η κίνηση του βλήματος είναι βολή. Από την Εξ. 2.22, οι συνιστώσες της αρχικής ταχύτητας του βλήματος είναι ίσες με

$$v_{0x} = v_0 cos\theta = 18cos35^0 = 7.61\, m/s$$

$$v_{0y} = v_0 sin\theta = 18sin35^0 = 16.3\, m/s$$

Στην έκρηξη λαμβάνουν χώρα εσωτερικές δυνάμεις. Επειδή ως προς την οριζόντια διεύθυνση δεν υπάρχουν άλλες δυνάμεις, η ορμή διατηρείται. Η έκρηξη δεν επηρεάζει την κατακόρυφη κίνηση. Από τον Πίνακα 2.1, οι συνιστώσες της ταχύτητας του βλήματος στο $t = 0.5^-\ s$ απειροστά πριν από την έκρηξη είναι ίσες με

$$v_x = v_{0x} = 7.61\ \ m/s$$

$$v_y = v_{0y} - gt = 16.3\ - 10 \times 0.5 = 11.3\, m/s$$

Η μάζα του βλήματος είναι $m = 1.2\ kg$ οπότε από τις δεδομένες αναλογίες, οι δυο μάζες των θραυσμάτων είναι $m_1 = 0.8\,kg$ και $m_2 = 0.4\,kg$. Αφού η κατακόρυφη κίνηση δεν επηρεάζεται, τότε και τα δυο θραύσματα στο $t = 0.5^+\ s$ θα έχουν την ίδια κατακόρυφη συνιστώσα ταχύτητας, όση και πριν την έκρηξη:

$$v_{1y} = v_{2y} = v_y = 11.3\,m/s$$

Από το μέτρο της ταχύτητας $v_1 = 12\,m/s$ του μεγάλου θραύσματος στο $t = 0.5^+\ s$, μπορούμε να βρούμε την οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητάς του:

$$v_1 = \sqrt{{v_{1x}}^2 + {v_{1y}}^2} => v_{1x} = \sqrt{{v_1}^2 - {v_{1y}}^2} = \pm\, 4.00\,m/s$$

Επιλέγουμε μόνο τη θετική ρίζα $v_{1x} = 4.00\ \ m/s$ επειδή από την εκφώνηση γνωρίζουμε ότι τα δυο θραύσματα κινούνται οριζοντίως προς την ίδια κατεύθυνση όπως και το αρχικό βλήμα. Από την αρχή διατήρησης της ορμής κατά την οριζόντια διεύθυνση, μπορούμε να βρούμε και την οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητάς του μικρού θραύσματος:

$$mv_x = m_1 v_{x1} + m_2 v_{x2} =>$$

$$1.2 \times 7.61 = 0.8 \times 4 + 0.4 \times v_{x2} => v_{x2} = 14.8\,m/s$$

Επομένως το μέτρο της ταχύτητας του δεύτερου θραύσματος ισούται με

$$v_2 = \sqrt{{v_{2x}}^2 + {v_{2y}}^2} = \sqrt{14.8^{\,2} + 11.3^2} = 18.6\,m/s$$

(β) Από τις εξισώσεις 2.9 και 2.10 του εσωτερικού γινομένου $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$, μπορούμε να βρούμε τη γωνία θ μεταξύ των δυο αυτών διανυσμάτων

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} = v_1 v_2 cos\theta =>$$

$$cos\theta = \frac{v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y}}{v_1 v_2} = 0.837$$

δηλαδή $\theta = 33.2^0$

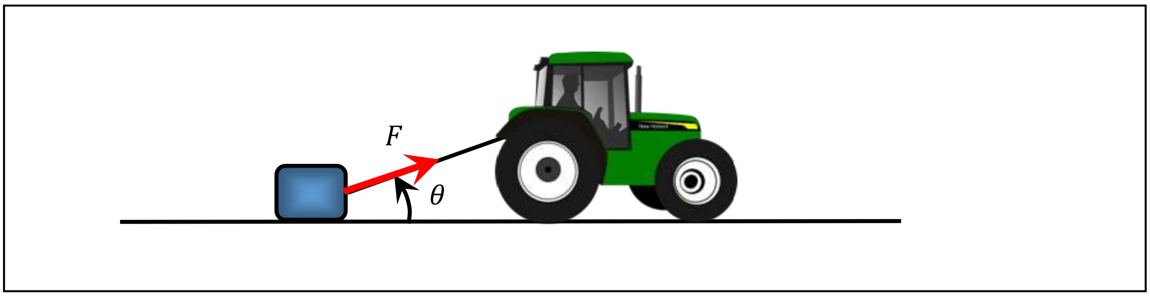
Ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα ως μεταβολή της Ορμής

5.10 Πύραυλος μάζας M_0 τοποθετημένος κατακόρυφα στην επιφάνεια της γης, θέτει σε εφαρμογή τον μηχανισμό προώθησης στο $t = 0$ ο οποίος καίει υδρογόνο με ρυθμό κ χιλιόγραμμα ανά δευτερόλεπτο (θετικός αριθμός) τα μόρια του οποίου εξέρχονται λόγω της υψηλής θερμοκρασίας τους με μεγάλη ταχύτητα V σχετικά με τον πύραυλο. Να βρεθεί η ταχύτητα του πυραύλου σε κάθε χρονική στιγμή $t > 0$ ενόσω υπάρχει ακόμα διαθέσιμο καύσιμο στον πύραυλο. Μπορείτε να θεωρήσετε ότι η καύση διαρκεί για λίγα δευτερόλεπτα και έτσι να θεωρήσετε την επιτάχυνση της βαρύτητας g σταθερή.

6. ΕΡΓΟ ΚΑΙ ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

<u>Ορισμός του Έργου</u>

6.1 Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, τρακτέρ ελκύει κιβώτιο μάζας $500\ kg$ υπό γωνία $\theta = 35^0$ με δύναμη $F = 4000\ N$. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι 0.40. Εάν το κιβώτιο μετακινείται κατά $8\ m$ με επιτάχυνση $a = 1.2\ ms^{-2}$, να υπολογισθεί το έργο της κάθε δύναμης που δρα στο κιβώτιο. Πάρτε $g = 10\ ms^{-2}$ για ευκολία.



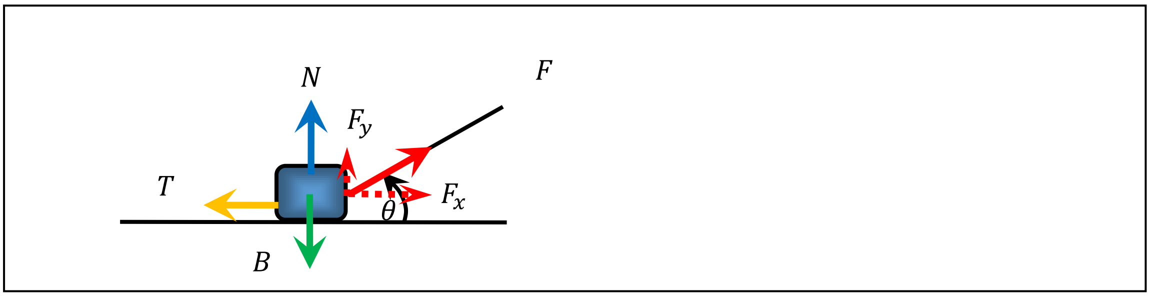
<u>Απάντηση</u>: 26210 & $-8660\ J$, οι άλλες μηδέν.

<u>Λύση</u>:

Παρόμοια με το Παράδειγμα 6.1, στο κιβώτιο ασκούνται τέσσερις συνολικά δυνάμεις, η έλξη $F = 4000\ N$ από το τρακτέρ, η κάθετη αντίδραση του εδάφους N, η τριβή ολίσθησης T και το βάρος $B = mg = 500 \times 10 = 5000\ N$. όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, αναλύουμε την F σε δυο συνιστώσες, την $F_x = Fcos35^0 = 3276\ N$ και την $F_y = Fsin41^0 = 2294\ N$. Ως προς την κατακόρυφη διεύθυνση έχουμε ισορροπία οπότε οι δυνάμεις πρέπει να αλληλοαναιρούνται:

$$N + F_y = B => N = 2705\ N$$

Η τριβή ολίσθησης ισούται με $T = \mu N = 0.40 \times 2705 = 1082\ N$.



Τα αντίστοιχα έργα από την Εξ. 6.7 είναι τα εξής:

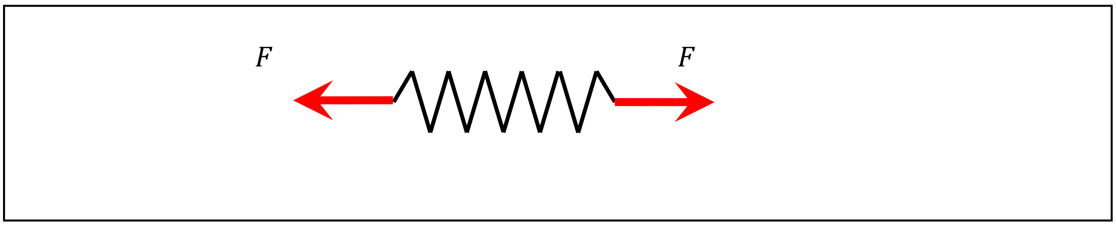
$$W_F = F\Delta x\ cos(41^0) = 4000 \times 8 \times cos(35^0) = 26210\ J$$

$$W_B = B\Delta x\ cos(-90^0) = 0\ J$$

$$W_N = N\Delta x\ cos(90^0) = 0\ J$$

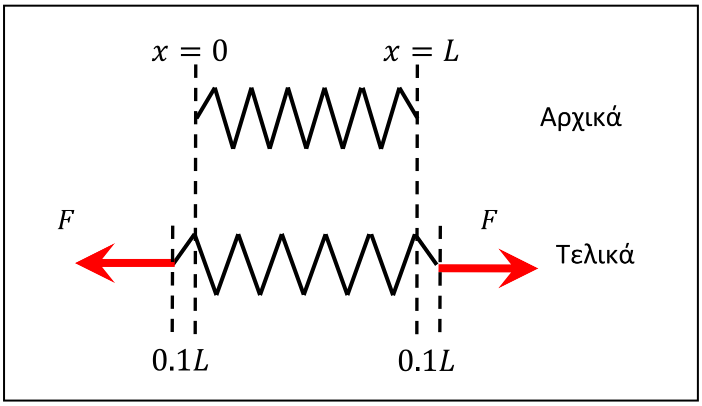
$$W_T = T\Delta x \cos(180^0) = -1082 \times 8 = -8660\,J$$

6.2 Ελατήριο σταθεράς k και μήκους L έχει τις άκρες του ελεύθερες. Όταν το ελατήριο είναι στο φυσικό του μήκος, τότε η αριστερή άκρη του βρίσκεται στο $x = 0$. Ένας φοιτητής το παραμορφώνει πολύ αργά εφαρμόζοντας δυο ίσες μεταβαλλόμενες δυνάμεις F εκατέρωθεν. Να βρεθεί το έργο της δύναμης του φοιτητή από αρχική παραμόρφωση 0% έως και τελική παραμόρφωση 20%.



Απάντηση: $0.02kL^2$

Λύση:



Αφού οι δυνάμεις είναι συμμετρικές, τότε και το ελατήριο παραμορφώνεται συμμετρικά. Από τα δεδομένα η συνολική παραμόρφωση είναι $0.2L$ οπότε το κάθε άκρο θα μετακινηθεί αντίστοιχα κατά $0.2L/2 = 0.1L$. Θα χρησιμοποιήσουμε την μεταβλητή x' για να περιγράφει την παραμόρφωση της κάθε πλευράς κατά συνεχή τρόπο, δηλαδή αρχικά $x' = 0$ ενώ τελικά $x' = \pm 0.1L$ στο δεξί και το αριστερό άκρο αντίστοιχα. Βέβαια η δύναμη του ελατηρίου Εξ. 3.7 έχει να κάνει με την συνολική παραμόρφωση του ελατηρίου, δηλαδή ισούται με

$$F_E = -k(2x) = -2kx$$

Αφού ο φοιτητής παραμορφώνει το ελατήριο πολύ αργά, αναγκαστικά πρέπει να παρέχει στο κάθε άκρο δύναμη F οριακά μεγαλύτερη κατά μέτρο και αντίθετη κατά φορά από την F_E ώστε να επέρχεται ισορροπία στην κάθε θέση δηλαδή

$$F \approx -F_E = 2kx$$

Αφού έχουμε ένα ζεύγος δυνάμεων που δρουν σε δυο σημεία, πρέπει να εφαρμόσουμε την Εξ. 6.4 δυο φορές, μια για το κάθε άκρο. Το συνολικό έργο είναι επομένως ίσο με:

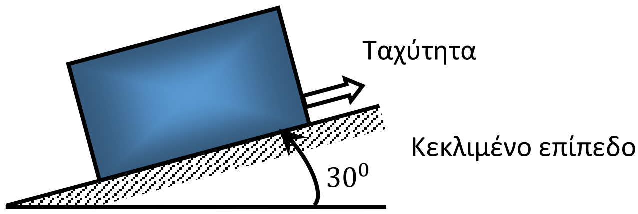
$$W = \int_{x=0}^{-0.1L} F dx + \int_{x=0}^{0.1L} F dx$$

Και στα δυο άκρα η δύναμη είναι κατά μήκος της παραμόρφωσης οπότε το συνημίτονο της Εξ. 6.7 είναι ίσο με 1. Αντικαθιστώντας

$$W = \int_{x=0}^{-0.1L} 2kxdx + \int_{x=0}^{0.1L} 2kxdx = 0.01kL^2$$

$$W = k0.01L^2 + \int_{x=0}^{0.1L} 2kxdx = 0.02kL^2$$

6.3 Έστω ότι στο παρακάτω σχήμα το κιβώτιο μάζας $m = 12\ kg$ κινείται σε επαφή με το κεκλιμένο επίπεδο προς τα πάνω με σταθερή επιτάχυνση $4\ ms^{-2}$ λόγω εφαρμογής μιας έλξης $200\ N$ παράλληλης με το επίπεδο. Εάν ο συντελεστής της τριβής ολίσθησης ισούται με $\mu = 0.6$ να βρεθεί το έργο της τριβής ολίσθησης και του βάρους για μια μετακίνηση $2\ m$ κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Πάρτε $g = 10\ ms^{-2}$ για ευκολία.

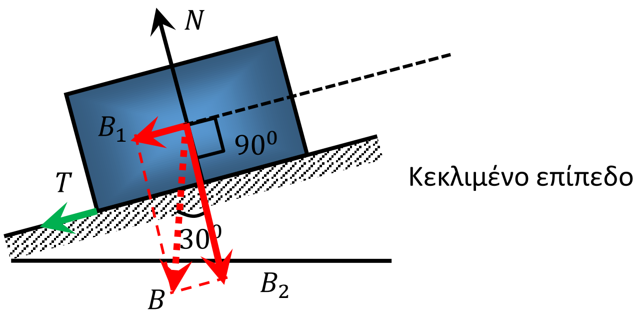


Απάντηση: -124.6 & $-120\ J$

Λύση:

Το βάρος είναι ίσο με $B = mg = 120\ N$. Από ισορροπία κάθετα στο κεκλιμένο επίπεδο:

$$N = B_2 = Bcos30^0 = 120 \times 0.866 = 104\ N$$



Τριβή $T = \mu N = 0.6 \times 104 = 62.3\ N$

Η τριβή είναι πάντοτε σε 180^0 σε σχέση με την μετατόπιση οπότε το $cos\theta$ που εμφανίζεται στην Εξ. 6.7 είναι ίσο με -1. Έτσι το έργο της τριβής για μετατόπιση $\Delta x = 2\ m$ είναι ίσο με

$$W_T = -T\Delta x = -62.3 \times 2 = -124.6\ Joules$$

Το βάρος B σχηματίζει γωνία $30 + 90 = 120^0$ ως προς τη μετατόπιση του κιβωτίου οπότε σύμφωνα με την Εξ. 6.7:

$$W_B = B\Delta x cos 120^0 = 120 \times 2 \times cos 120^0 = -120\ Joules$$

6.4 Μια διανυσματική δύναμη $\vec{F} = -c(2x^3/y, -3x^2)$ όπου $c = 90\ N/m^2$, δρα σε κινητό το οποίο κινείται στην ευθεία $y = 3x$. Να βρεθεί το έργο της δύναμης όταν δράσει στο κινητό από $x = 1$ έως $x = 2\ m$.

Απάντηση: $1750\ J$

Λύση: Από την Εξ. 6.8 έχουμε

$$W = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y dy$$

όπου $F_x = -2cx^3/y$ και $F_y = 3cx^2$ είναι οι συντεταμένες της δύναμης. Η πρώτη ολοκλήρωση είναι ως προς x οπότε πρέπει να τα εκφράσουμε όλα ως προς x. Επάνω στην ευθεία που βρίσκεται το κινητό ισχύει $y = 3x$. Αντικαθιστώντας έχουμε

$$-2\int_{x=1}^{2} \frac{cx^3}{y} dx = -\frac{2}{3} 90 \int_{x=1}^{2} x^2 dx = -20[x^3]_{x=1}^{2} = -140\ J$$

Ομοίως για το δεύτερο ολοκλήρωμα πρέπει να εκφράσουμε τα όρια συναρτήσει του x. Από στη δεδομένη ευθεία έχουμε $x = y/3$. Επίσης τα όρια $x_A = 1$ και $x_B = 2$ αντιστοιχούν στα όρια $y_A = 3$ και $y_B = 6$. Επομένως

$$\int_{y_A}^{y_B} F_y dy = 3c\int_{y=3}^{6} x^2 dy = 3 \times 90 \int_{y=3}^{6} \frac{y^2}{9} dx = 10[y^3]_{y=3}^{6} = 1890\ J$$

Έτσι, το συνολικό έργο είναι ίσο με $W = 1890 - 140 = 1750\ J$

Κινητική Ενέργεια

6.5 Φορτηγό μάζας πέντε τόνων κινείται με $90\ km/h$. (α) Να βρεθεί η κινητική του ενέργεια σε $MJoules$ (όπου $M = 10^6$) και (β) Όταν βρίσκεται στο $x = 0$, εφαρμόζεται σε αυτό μια μεταβλητή δύναμη $F(x) = -ax + b$, όπου $a = 1.0\ MN/m$ και $b = 5.74\ MN$ και το σταματάει μετά από κάποιο διάστημα Δx. Να βρεθεί το Δx εξισώνοντας όλη την κινητική ενέργεια με το έργο της δύναμης (κατά απόλυτη τιμή αφού το έργο είναι αρνητικό).

Απάντηση: $6\ m$

Λύση:

(α) Μετατρέπουμε την ταχύτητα σε m/s και τη μάζα σε kg

$$v = 90\frac{km}{h} = 90\frac{1000\ m}{3600\ s} = 25\ m/s$$

$$m = 5\ tn = 5000\ kg$$

Από την Εξ. 6.9

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}5000 \times 25^2 = 1.56\ MJ$$

(β) Το έργο της δύναμης στη μια διάσταση δίνεται από την Εξ. 6.4 ως εξής

$$W = \int_0^{\Delta x} F dx$$

όπου Δx είναι η συνολική απόσταση επιβράδυνσης. Αντικαθιστώντας

$$W = \int_0^{\Delta x} (-ax + b)dx = [-ax^2 + bx]_0^{\Delta x} = -a\Delta x^2 + b\Delta x$$

Αφού αναμένουμε αυτό το έργο να είναι αρνητικό, η απόλυτη τιμή του είναι η αντίθετη από το παραπάνω αποτέλεσμα:

$$|W| = a\Delta x^2 - b\Delta x$$

Εξισώνοντας αυτό το αποτέλεσμα με την αρχική κινητική ενέργεια και αντικαθιστώντας

$$1.0\Delta x^2 - 5.74\Delta x = 1.56$$

όπου όλες οι ποσότητες στην παραπάνω εξίσωση είναι σε MJ. Λύνοντας την δευτεροβάθμια οδηγεί στο αποτέλεσμα $\Delta x = 6\ m$ και $-0.26\ m$. Η δεύτερη λύση απορρίπτεται επειδή είναι αρνητική επομένως

Θεώρημα Έργου – Ενέργειας

6.6 Ένα τρακτέρ έλκει με συρματόσχοινο ένα κιβώτιο $400\ kg$ υπό γωνία 25.8^0, όπως στο Παράδειγμα 6.1 και το Πρόβλημα 6.1 παραπάνω. Η ταχύτητα του τρακτέρ σε κάποιο σημείο της διαδρομής του είναι ίση με $5\ m/s$ από όπου διανύει άλλα $6\ m$ με την ταχύτητά του να αυξάνεται γραμμικά ως την τιμή $9\ m/s$. Εάν η τριβή που ασκείται στο κιβώτιο είναι ίση με $2000\ N$, να βρεθεί η δύναμη με την οποία το τρακτέρ ελκύει το κιβώτιο με τη βοήθεια του θεωρήματος έργου – ενέργειας.

Απάντηση: $3056\ N$

Λύση:

Από το θεώρημα έργου – ενέργειας Εξ. 6.10, το έργο της συνολικής δύναμης που δρα στο κιβώτιο είναι ίσο με

$$W = \frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2$$

Το κιβώτιο έχει την ίδια ταχύτητα με το τρακτέρ και μάζα $m = 200\ kg$ και επομένως

$$W = \frac{1}{2}200(9^2 - 6^2) = 4500\ J$$

Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 6.1, ασκούνται τέσσερις δυνάμεις στο σώμα αλλά μόνο δυο από αυτές συνεισφέρουν στο συνολικό έργο, η δύναμη έλξης του τρακτέρ με έργο W_F και η τριβή με έργο W_T. Επομένως μπορούμε να γράψουμε ότι

$$W_F + W_T = 4500\ J$$

Εφόσον η ταχύτητα αυξάνει γραμμικά, τότε η επιτάχυνση του κιβωτίου είναι σταθερή και άρα και από τον 2^{o} νόμο του Νεύτωνα και η συνολική δύναμη που δρα σε αυτό. Αφού η τριβή T είναι σταθερή, άρα θα είναι και η έλξη F του τρακτέρ. Από την Εξ. 6.7, η παραπάνω εξίσωση γίνεται (δείτε το σχήμα του Παραδείγματος 6.1 για κατανόηση των γωνιών)

$$T\Delta x cos180^0 + F\Delta x cos25^0 = 4500$$

Αντικαθιστώντας και λύνοντας

$$6(-2000 + 0.90F) = 4500 => F = 3056\ N$$

$$Fsin25^0 = 3056$$

6.7 Έστω ότι στο προηγούμενο Πρόβλημα, η έλξη παύει κάποια στιγμή να ασκείται στο κιβώτιο και έτσι αυτό επιβραδύνεται και σταματάει αφού καλύψει $8.5\ m$ κατά μήκος της διαδρομής. Να βρεθεί η ταχύτητα του κιβωτίου τη στιγμή ακριβώς που έπαψε η δύναμη της έλξης μέσω του θεωρήματος έργου – ενέργειας.

Απάντηση: $9.22\ m/s$

Λύση:

Δουλεύοντας όπως στο προηγούμενο πρόβλημα

$$W = \frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2$$

όπου $v_2 = 0$ το σώμα έρχεται σε ηρεμία. Αφού παύει η έλξη $F = 0$ και έτσι στο παραπάνω έργο συνεισφέρει μόνο η τριβή, δηλαδή

$$W_T = -\frac{1}{2}m{v_1}^2 => T\Delta x cos180^0 = -\frac{1}{2}m{v_1}^2$$

Λύνοντας

$$v_1 = \sqrt{\frac{2T\Delta x}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 2000 \times 8.5}{400}} = 9.22\, m/s$$

6.8 Ένα σώμα είναι περιορισμένο να κινείται μόνο στον θετικό ημιάξονα x κάτω από την επίδραση μιας μοναδικής δύναμης, τέτοια ώστε η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια να δίνεται από τη σχέση

$$U(x) = 4c\left[\left(\frac{b}{x}\right)^2 - \frac{b}{x}\right]$$

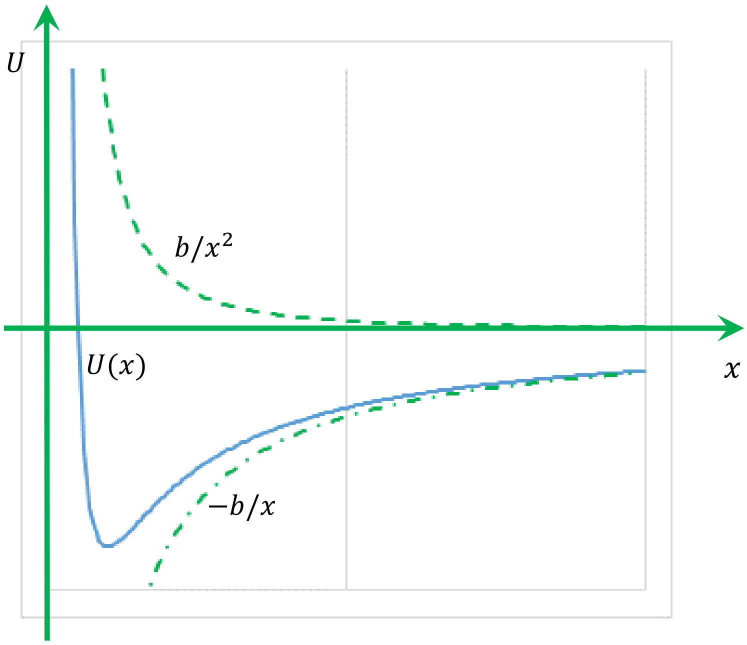
όπου c και b θετικές σταθερές και $x \geq 0$. (α) Να γίνει ξεχωριστά η γραφική παράσταση του κάθε όρου που αποτελείται η $U(x)$ (του τετραγωνικού και του αρνητικού όρου) συναρτήσει του x αλλά στο ίδιο γράφημα με κοινούς άξονες (ποιοτική σχεδίαση και όχι σημείο-σημείο) και από αυτές να προσπαθήσετε να σκιαγραφήσετε ποιοτικώς (στο ίδιο γράφημα) και την γραφική παράσταση της $U(x)$. (β) Χωρίς να γίνει η γραφική παράσταση της $F(x)$, να εξηγήσετε ποιοτικώς πως περιμένετε να μοιάζει, βασιζόμενοι στην παραπάνω γραφική παράσταση της $U(x)$. (γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της $F(x)$ (απλή ποιοτική σχεδίαση αλλά να φαίνονται τα βασικά χαρακτηριστικά της). Να σχολιαστεί εάν τα υποερωτήματα β και γ συμφωνούν. (δ) Να ερμηνευτεί γραφικώς η σημασία των σταθερών b και c

<u>Απάντηση</u>: (α) τείνουν στο $\pm\infty$ στο $x \to 0$ και στο 0 στο $x \to \infty$, (β) $U \to \infty$ στο $x \to 0$ και στο 0^- στο $x \to \infty$, ενδιάμεσο ελάχιστο, μηδενικό στο $x = b$ (γ) $F \to \infty$ στο $x \to 0$ και στο 0^- στο $x \to \infty$, ενδιάμεσο ελάχιστο, μηδενικό στο $x = 2b$ (δ)

<u>Λύση</u>:

(α) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας $U(x)$ καθώς και των δυο όρων που αποτελείται, τον b^2/x^2 και τον $-b/x$. Για μικρές τιμές του x υπερισχύει ο όρος b^2/x^2 έναντι του b/x οπότε ο δεύτερος μπορεί να αγνοηθεί. Γιατί όμως γίνεται αυτό; Επειδή όταν έχουμε μια τιμή του x μικρότερη της μονάδας, π.χ. $x = 0.01$, τότε το τετράγωνό της $x^2 = 0.0001$ είναι ακόμα μικρότερο. Και βέβαια αντιστρόφως, το $1/x^2$, ίσο με 10000 σε αυτό το παράδειγμα, είναι κατά πολύ μεγαλύτερο από το $1/x = 100$. Η κατάσταση αντιστρέφεται στις μεγάλες τιμές του x όπου $x^2 \gg x$ και έτσι αντιστρέφοντας $1/x^2 \ll 1/x$. Ας εξετάσουμε τώρα το σχετικό πρόσημο των δυο όρων. Εάν και οι δυο όροι ήτανε θετικοί, η γραφική παράσταση δεν θα είχε και πολύ ενδιαφέρον. Θα έτεινε στο άπειρο κοντά στο $x = 0$ και στο 0 για $x \to \infty$. Επειδή όμως ο δεύτερος όρος b/x εμφανίζεται με αρνητικό πρόσημο ενώ ο b^2/x^2 με θετικό, τότε η συνάρτηση ξεκινάει θετική για μικρά x λόγω της υπερίσχυσης του πρώτου όρου όπως είδαμε παραπάνω, ενώ στο άλλο όριο για μεγάλα x τείνει στο μηδέν από αρνητικές τιμές y, λόγω της υπερίσχυσης του δεύτερου όρου.

Άρα κάπου ενδιάμεσα πρέπει να εμφανίζεται ένα ελάχιστο το οποίο όπως θα δούμε σε επόμενο εδάφιο σχετίζεται με την ευσταθή ισορροπία ενός συστήματος.



(β) Όσον αφορά την δύναμη, μπορούμε να εξάγουμε ποιοτικά συμπεράσματα μέσω της Εξ. 6.11

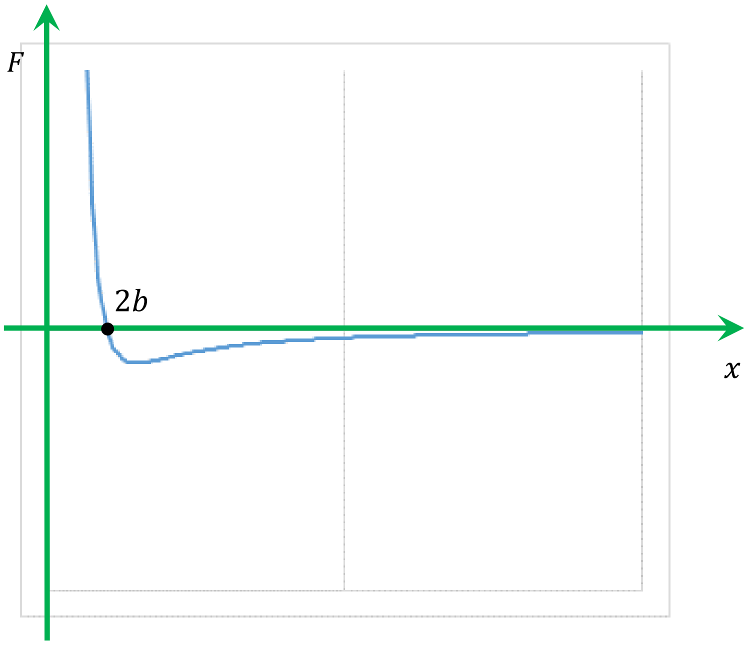
$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

η οποία βασικά μας λέει ότι η F είναι ίση με το μείον της κλίσης της $U(x)$. Από την παραπάνω γραφική παράσταση βλέπουμε ότι η $U(x)$ ξεκινάει με μεγάλη αρνητική κλίση και άρα η F θα είναι πολύ θετική για μικρά x. Αργότερα η κλίση ομαλοποιείται οπότε η F γίνεται λιγότερο θετική ώσπου στο ελάχιστο της $U(x)$ να μηδενίζεται. Μετά το ελάχιστο, η κλίση αυξάνει προσωρινά οπότε και η F γίνεται αρνητική αλλά μετά από κάποιο x και πάνω μειώνεται και πάλι βαθμιαία, τείνοντας οριακά στο μηδέν και άρα $F \to 0$ για μεγάλα x.

(γ) Μπορούμε βέβαια να εκτελέσουμε την παραγώγιση και να βρούμε την ακριβή έκφραση της δύναμης. Από την Εξ. 6.11

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -4c\frac{d}{dx}[b^2x^{-2} - bx^{-1}] = \frac{4c}{b}\left[2\left(\frac{b}{x}\right)^3 - \left(\frac{b}{x}\right)^2\right]$$

Από την παραπάνω έκφραση, μπορούμε εύκολα να δούμε τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της γραφικής παράστασης της $F(x)$. Στο $x \to 0$ υπερισχύει ο κυβικός όρος και $F \to \infty$. Θέτοντας $F = 0$ βρίσκουμε εύκολα μια ρίζα στο $x = 2b$ ενώ η δεύτερη είναι στο άπειρο, δηλαδή η γραφική παράσταση τείνει ασυμπτωτικά στον άξονα των x. Εκεί υπερισχύει ο τετραγωνικός αρνητικός όρος της παραπάνω έκφρασης, δηλαδή είναι πολύ μεγαλύτερος από τον κυβικό όρο ο οποίος μπορεί να αγνοηθεί. Έτσι η συνάρτηση τείνει ασυμπτωτικά στο 0^-. Η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και συμφωνεί εντελώς με την ποιοτική ανάλυση του υποερωτήματος β. Βλέπουμε εύκολα από την έκφραση $F(x)$ ότι το μηδενικό της δύναμης εμφανίζεται στο $x = 2b$ και σύμφωνα με την Εξ. 6.11 είναι εκεί που εμφανίζεται και το ελάχιστο της $U(x)$.



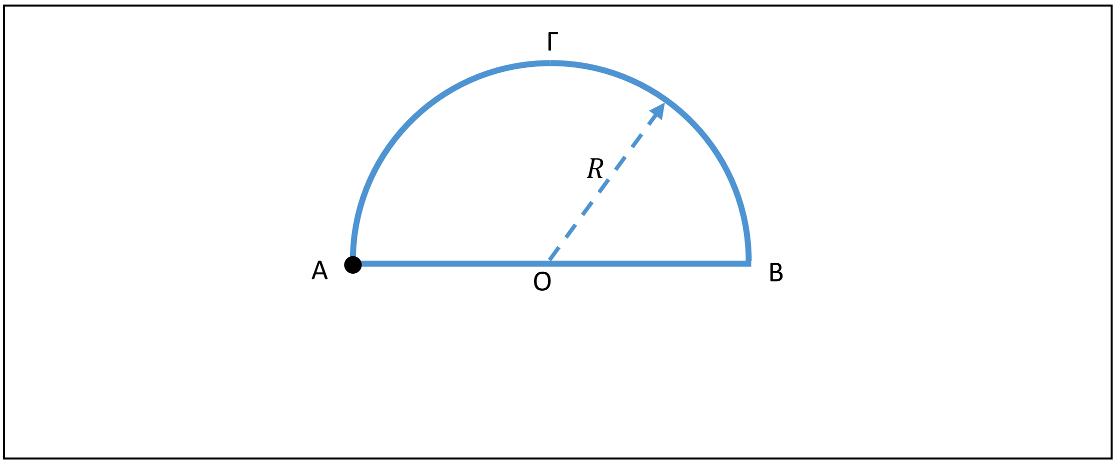
(δ) Είδαμε τη φυσική σημασία του b ότι η $U(x)$ εμφανίζει ελάχιστο στο $2b$. Η τιμή της U εκεί είναι ίση με

$$U(2b) = 4c\left[\left(\frac{b}{2b}\right)^2 - \frac{b}{2b}\right] = 4c\left[\left(\frac{b}{2b}\right)^2 - \frac{b}{2b}\right] = -c$$

Επομένως το c είναι η ελάχιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας (κατ' απόλυτη τιμή).

<u>Συντηρητικές Δυνάμεις - Δυναμική Ενέργεια</u>

6.9 Στο παρακάτω σχήμα ένα υλικό σημείο βρίσκεται στο σημείο Α ενός ημικυκλίου ακτίνας R. (α) Υπολογίστε το έργο της τριβή ολίσθησης εάν θεωρηθεί ότι είναι σταθερή και ίση με T παντού για τις δυο διαδρομές ΑΟΒ (ευθύγραμμη κατά μήκος της διαμέτρου) και ΑΓΒ (ημικυκλική). (β) Σχολιάστε εάν η τριβή είναι συντηρητική ή όχι ανάλογα με το αποτέλεσμα που βρήκατε στο α.



<u>Απάντηση</u>: (α) $-2TR$, (β) $-\pi TR$

<u>Λύση</u>:

(α) Η τριβή πάντοτε αντιτίθεται στην κίνηση και έτσι $cos\theta = cos180^0 = -1$ στην Εξ. 6.3. Αφού η T είναι σταθερή, βγαίνει εκτός ολοκληρώματος

$$W_T = \int_A^B Tcos\theta\, dr = -T\int_A^B dr$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα όμως είναι το μήκος της διαδρομής που για την ΑΟΒ είναι το μήκος της διαμέτρου $2R$. Έτσι

$$W_{\text{AOB}} = -2TR$$

(β) Δουλεύουμε ακριβώς όπως στο παραπάνω υποερώτημα αλλά τώρα το μήκος της διαδρομής ΑΓΒ είναι το μήκος του ημικυκλίου δηλαδή πR και έτσι

$$W_{\text{AΓB}} = -\pi TR$$

Αφού $W_{\text{AΓB}} \neq W_{\text{AOB}}$ η δύναμη της τριβής δεν είναι συντηρητική.

6.10 Μια συντηρητική δύναμη $\vec{F} = a\vec{e}_x - b\vec{e}_y$ όπου $a = b = 2\ N$ εφαρμόζεται σε ένα σώμα κατά την διάρκεια της μετακίνησής του από το $(0{,}0)$έως το $r = -3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y\ m$. Να βρεθεί το έργο της δύναμης.

<u>Απάντηση</u>: $-14\ J$

<u>Λύση</u>:

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η μετακίνηση είναι από το σημείο $A(0{,}0)$ έως το σημείο $B(-3{,}4)$. Επειδή η δύναμη είναι συντηρητική, μπορούμε να διαλέξουμε όποια διαδρομή μας αρέσει. Επιλέγουμε την $ΑΓΒ$ και έτσι το ολοκλήρωμα της Εξ. 6.3 σπάει σε δυο κομμάτια, ένα για το τμήμα $ΑΓ$ και ένα για το τμήμα $ΓΒ$:

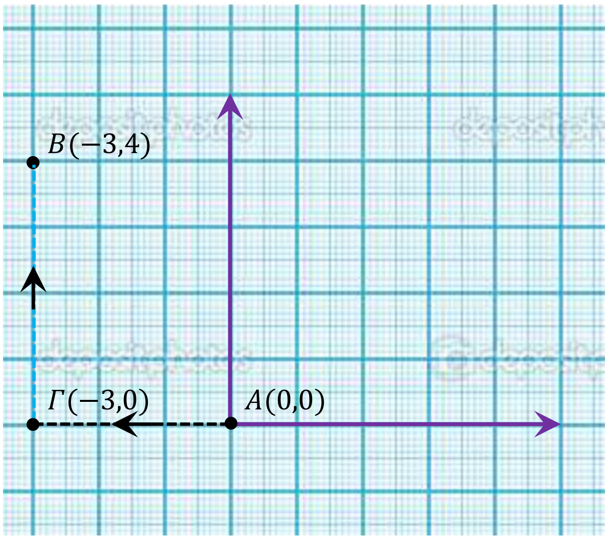
$$W = \int_A^\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_\Gamma^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^\Gamma \left(F_x dx + F_y dy\right) + \int_\Gamma^B \left(F_x dx + F_y dy\right)$$

Στο τμήμα $A\Gamma$ έχουμε y: σταθερό και άρα και $dy = 0$, ενώ στο τμήμα ΓB έχουμε x: σταθερό και άρα $dx = 0$. Έτσι το έργο γίνεται

$$W = \int_A^\Gamma (F_x dx + 0) + \int_\Gamma^B \left(0 + F_y dy\right)$$

Αντικαθιστώντας τις συνιστώσες της δύναμης αλλά και τα όρια στο κάθε ολοκλήρωμα:

$$W = \int_{x=0}^{-3} 2dx + \int_{y=0}^{4} (-2)dy = 2(-3) + (-2)4 = -14\ Nm = -14\ J$$



6.11 Η δυναμική ενέργεια σε μια περιοχή του χώρου δίνεται από την $V(x) = ax^2 + bx^3$ όπου $a\ = 1\,J/m^2$ και $b =\ 2\,J/m^3$. Να βρεθούν οι περιοχές του x όπου η αντίστοιχη δύναμη $F(x)$ είναι θετική.

<u>Απάντηση</u>: Θετική μόνο μεταξύ $-1/3$ και 0, αρνητική αλλού

<u>Λύση</u>:

Από την Εξ. 6.11

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -(2ax + 3bx^2) = -x(2a + 3bx)$$

Αντικαθιστώντας

$$F(x) = -x(2+6x) = -2x(3x+1)$$

Επομένως η $F(x)$ έχει δυο ρίζες, το $x = 0$ και το $x = -1/3$ και άρα εκεί αλλάζει πρόσημο. Αντικαθιστούμε τυχαία μια τιμή σε μια από τις περιοχές για να δούμε το πρόσημο αφού στις άλλες θα εναλλάσσεται το πρόσημο. Π.χ. για $x = 1$ έχουμε $F(1) = -8 < 0$ και επομένως έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

$$F(x)\colon \begin{cases} < 0 & x < -1/3 \\ > 0 & -\dfrac{1}{3} < x < 0 \\ < 0 & x > 0 \end{cases}$$

<u>Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας</u>

6.12 Μικρή μπάλα μάζας $m = 0.12\ kg$ πετιέται από ύψος $0.85\ m$ κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα $15\ m/s$. Αγνοώντας την αντίσταση του αέρα και κάνοντας χρήση του ΑΔΜΕ, με τι ταχύτητα χτυπάει η μπάλα το έδαφος; Πάρτε $g = 10\ ms^{-2}$ για ευκολία.

<u>Απάντηση</u>: $-15.6\ m/s$

<u>Λύση</u>:

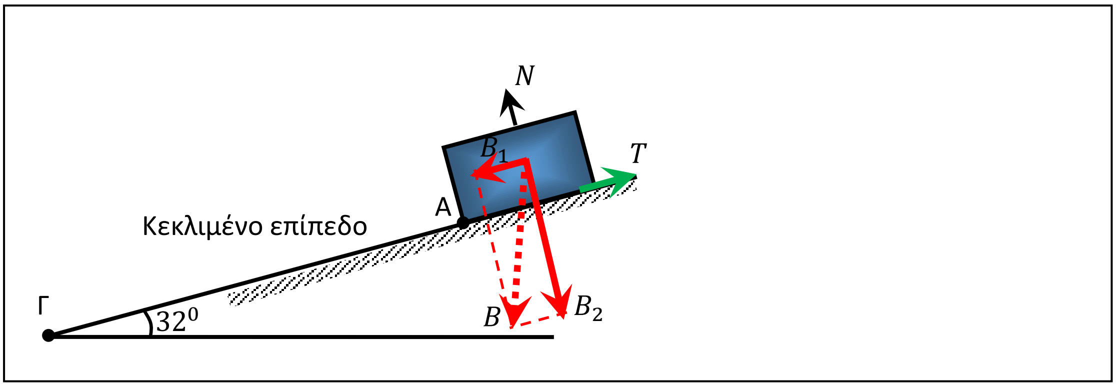
Αρχικές συνθήκες $v_1 = 15\ m/s$ και $y_1 = 0.85\ m$, τελικές $y_2 = 0\ m$ και άγνωστο v_2. Η βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι ίση με $U = mgy$. Από την Εξ. 6.13

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 => \frac{1}{2} m{v_1}^2 + mgy_1 = \frac{1}{2} m{v_2}^2 + mgy_2$$

Αντικαθιστώντας και λύνοντας $v_2 = \pm 15.6\ m/s$. Η αποδεκτή λύση είναι η αρνητική για το συγκεκριμένο πρόβλημα αφού η μπάλα είναι σε κάθοδο. Η θετική θα αντιστοιχούσε σε ένα άλλο πρόβλημα εκτόξευσης της μπάλας κατακόρυφα προς τα πάνω κατά την οποία θα έφτανε στο δεδομένο ύψος y_1 με τη δεδομένη ταχύτητα v_1.

<u>Ταυτόχρονη δράση συντηρητικών και μη συντηρητικών δυνάμεων</u>

6.13 Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ένα σώμα μάζας $m = 2\ kg$ ολισθαίνει υπό την επήρεια του βάρους του και χωρίς την εφαρμογή εξωτερικής δύναμης, επάνω σε κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία 32^0 με τον ορίζοντα. Υπάρχει τριβή μεταξύ του κιβωτίου και του δαπέδου. Το κιβώτιο ξεκινάει από την ηρεμία από ένα σημείο Α που βρίσκεται $14\ m$ (κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου) από ένα άλλο χαμηλότερο σημείο Γ που είναι στο ίδιο ύψος με το έδαφος. Να βρεθεί ο συντελεστής τριβής ολίσθησης εάν στο σημείο Γ το κιβώτιο έχει αποκτήσει ταχύτητα $6.5\ m/s$. Πάρτε $g = 10\ ms^{-2}$ για ευκολία.



<u>Απάντηση</u>: 0.46

<u>Λύση</u>:

Η απόσταση $ΑΓ$ είναι ίση με $14\,m$ οπότε το ύψος του σημείου Α είναι ίσο με $y_A = 14sin32^0 = 7.42\,m$. Εάν υπολογίσουμε την μηχανική ενέργεια στα σημεία Α και Γ θα δούμε ότι $E_Γ < E_A$:

$$E_A = \frac{1}{2}mv_A{}^2 + mgy_A = 0 + 2 \times 10 \times 7.42 = 148\,J$$

$$E_Γ = \frac{1}{2}mv_A{}^2 + mgy_A = \frac{1}{2}2 \times 6.5^2 + 0 = 38.4\,J$$

Αυτό είναι αναμενόμενο αφού στο πρόβλημα είναι παρούσα μια μη συντηρητική δύναμη. Επομένως πρέπει να καταφύγουμε στην Εξ. 6.16 για να λύσουμε το πρόβλημα

$$K_A + U_A + W_T = K_Γ + U_Γ => E_A + W_T = E_Γ$$

όπου W_T είναι το έργο της τριβής. Αντικαθιστώντας

$$W_T = E_Γ - E_A = 38.4 - 148 = -109.6\,J$$

Από τον ορισμό του έργου Εξ. 6.7

$$W_T = TΔxcos180^0 = -TΔx$$

όπου $θ = 180^0$ επειδή η τριβή πάντα αντιτίθεται στην κίνηση και $Δx = 14\,m$. Εξισώνοντας τις δυο τελευταίες εκφράσεις

$$T = \frac{109.6}{14} = 7.83\,N$$

Όπως έχουμε δει σε πλήθος προβλημάτων με κεκλιμένο επίπεδο, η κάθετη αντίδραση που δρα στο κιβώτιο είναι ίση με την συνιστώσα B_2 του βάρους δηλαδή

$$N = mgcos32^0 = 2 \times 10 \times cos32^0 = 17.0\,N$$

Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης βρίσκεται από την $T = μN$ ίσος με

$$μ = \frac{T}{N} = \frac{7.83}{17.0} = 0.46$$

6.14 Μπάλα μάζας $0.15\ kg$ πετιέται κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα $20\ m/s$. (α) Να βρεθεί σε ποιο ύψος φτάνει. (β) Εάν η ώθηση δίνεται στην μπάλα από χέρι το οποίο είναι σε επαφή με την μπάλα για $0.5\ m$ πριν να του φύγει η μπάλα, να βρεθεί η δύναμη του χεριού εάν την θεωρήσουμε προσεγγιστικά σταθερή. (γ) Να βρεθεί η ταχύτητα της μπάλας $15\ m$ πάνω από το σημείο που η μπάλα αφήνει το χέρι.

Ισχύς

6.15 Πόση είναι η ισχύς σε $Watt$ ενός κινητήρα αυτοκινήτου 120 αλόγων;

Απάντηση: 89.48

6.16 Σημειακή μάζα m κινείται κατά μήκος του άξονα x έτσι ώστε η ταχύτητά της συναρτήσει του χρόνου να δίνεται από την $v(t) = ct^2 + q$ όπου c και q είναι σταθερές και t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα. Να βρεθούν: (α) Οι μονάδες των σταθερών c και q εάν το $v(t)$ είναι σε m/s. (β) Η απομάκρυνση x της μάζας ανά πάσα χρονική στιγμή από την αρχή των αξόνων Ο εάν γνωρίζετε ότι στο $t = 0$ βρισκόταν στο $x = d$, όπου d μια άλλη σταθερά. (γ) Η επιτάχυνση της μάζας και η δύναμη που δρα σε αυτή ανά πάσα χρονική στιγμή. (δ) Η ισχύς που δίνεται στο σώμα ανά πάσα χρονική στιγμή και από αυτή το έργο που παράγεται στο σώμα κατά το χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως $t = 1\ s$.

Απάντηση: (δ) $mc(q + c/2)$

Λύση:

(α) Το c είναι σε m/s^3 και το q σε m/s.

(β) Ολοκληρώνοντας

$$x(t) = \frac{1}{2}ct^3 + qt + d$$

όπου d είναι η σταθερά ολοκλήρωσης.

(γ) Παραγωγίζοντας την ταχύτητα

$$a(t) = 2ct$$

(δ) Σύμφωνα με την Εξ. 6.19, η ισχύς δίνεται από την

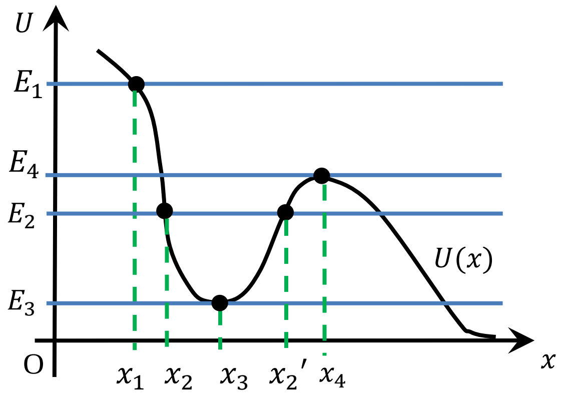
$$P = Fv = mav = 2mct(ct^2 + q)$$

Αυτή είναι η στιγμιαία ισχύς. Από την Εξ. 6.19 έχουμε $P = dW/dt$ οπότε με ολοκλήρωση

$$W = \int_{t=0}^{1} Pdt = 2mc\int_{t=0}^{1} t(ct^2 + q)dt = \frac{1}{2}mc^2 + mcq = mc(q + \frac{c}{2})$$

<u>Δυναμική ενέργεια και σημεία ισορροπίας - Δέσμιες τροχιές</u>

6.17 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια τυχαία συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(x)$ σε μια διάσταση. Να βρεθεί το πρόσημο της αντίστοιχης δύναμης στα σημεία x_1, x_2 και $x_2{}'$. Να βρεθεί το μέτρο της δύναμης στα σημεία x_3 και x_4.



<u>Απάντηση</u>: Θετική – θετική – αρνητική. Μηδέν – μηδέν.

6.18 Η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας ενός κινητού στη μια διάσταση δίνεται από την έκφραση $U(x) = a(x-1)(x-3)x + b$ όπου $a = 2\,J/m^3$, $b = 8\,J$ και το x σε m. (α) Να γίνει η γραφική παράσταση από $x = 0$ έως $x = 5\,m$, (β) Να βρεθούν τα σημεία x ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας και (γ) εάν η μηχανική ενέργεια του κινητού είναι $8\,J$, να εξηγηθεί ποιοτικά το είδος της κίνησης του κινητού

<u>Απάντηση</u>: (β) $x = 0.451$ ασταθής, 2.21 ευσταθής. (γ) Δέσμια ανάμεσα στα $x = 1$ και $x = 3$

<u>Λύση</u>:

(α) Η γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω και εμφανίζει ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο. Τείνει στο ∞ για μεγάλα x.

(β) Σύμφωνα με την Εξ. 6.11

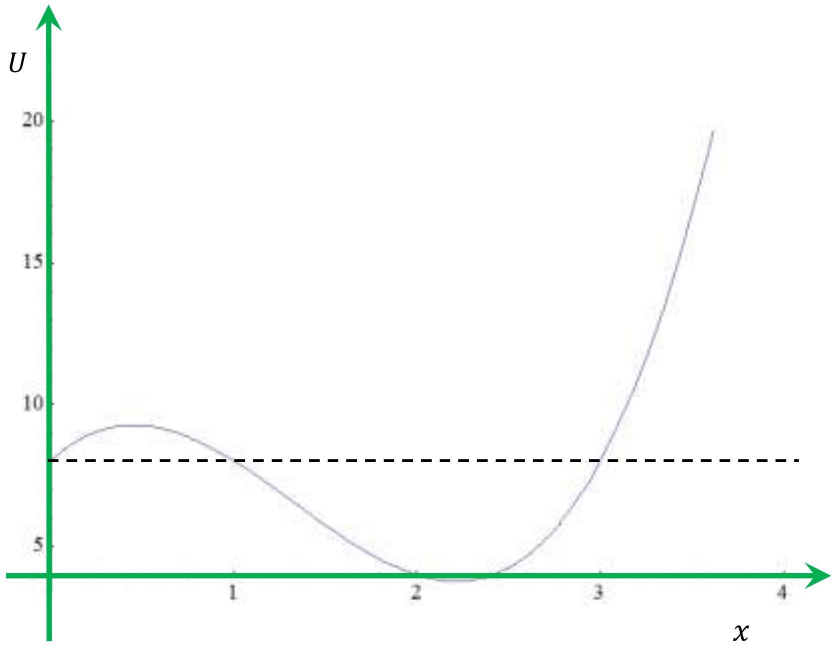
$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -6 + 16\,x - 6x^2$$

Θέτοντας την ίση με μηδέν, βρίσκουμε $x = 0.451$ και 2.21. Κοιτώντας την γραφική παράσταση, το πρώτο σημείο αντιστοιχεί σε ασταθή (μέγιστο) ενώ το δεύτερο σε ευσταθή (ελάχιστο) ισορροπία.

(γ) Φέρουμε μια οριζόντια ευθεία στο $E = 8\,J$ στην γραφική παράσταση $U(x)$ και βλέπουμε ότι τέμνει την $U(x)$ εκεί όπου

$$U(x) = 8 => 2(x-1)(x-3)x + 8 = 8 => (x-1)(x-3)x = 0$$

δηλαδή στα $x = 0{,}1{,}3$. Η κίνηση είναι εφικτή μόνο ανάμεσα στα $x = 1$ και $x = 3$ αφού εκεί $U(x) \leq E$ και είναι δέσμια τροχιά.



6.19 Η δυναμική ενέργεια μιας συντηρητικής δύναμης η οποία δρα στη μια διάσταση, δίνεται από την έκφραση $U(x) = a(x - x_1)^2(x - x_2)^2 + \beta$ όπου $a = 3.1\, Joules/m^4$, $\beta = 1.2\, Joules$, $x_1 = 1.2\, m$ και $x_2 = 3.2\, m$. Μια σημειακή μάζα $m = 1\, kg$ βρίσκεται υπό την επίδραση μόνο αυτής της δύναμης. Να βρεθούν τα εξής:

(α) Τα σημεία ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας της δυναμικής ενέργειας.

(β) Να βρεθεί η μέγιστη ταχύτητα της μάζας εάν η συνολική μηχανική ενέργεια της είναι ίση με $4.3\, Joules$

(γ) Να σχολιαστεί ποιοτικά το είδος της κίνησης της μάζας του προηγούμενου υπο-ερωτήματος

(δ) Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται στη μάζα στα σημεία αναστροφής (εκεί που η κίνηση αλλάζει κατεύθυνση) στο προηγούμενο υπο-ερώτημα.

Σημείωση: Παρότι που η $U(x)$ είναι τετάρτου βαθμού, λύνεται σχετικά εύκολα λόγω συμμετρίας. Επίσης μια γραφική παράσταση είναι αναγκαία για τη λύση του προβλήματος.

Απάντηση: (α) $x = 1.2$, 2.2 και 3.2, ευστ – ασταθ - ευστ (β) $2.49\, m/s$, (γ) 2.2 και $2.2 \pm \sqrt{2}$, (δ) $\mp 17.5\, N$

Λύση: $x = 1.2$, 2.2 και 3.2

(α) Η $U(x)$ είναι το άθροισμα ενός τετραγώνου συν ενός θετικού όρου $\beta = 1.2\, Joules$ οπότε λαμβάνει μόνο θετικές τιμές. Αφού η ελάχιστη τιμή ενός τετραγώνου είναι 0, τότε το ελάχιστο της $U(x)$ είναι το β. Στο $x \to \pm\infty$ η συνάρτηση απειρίζεται λόγω του τετραγώνου. Για να βρούμε τα μέγιστα – ελάχιστα, παραγωγίζουμε και θέτουμε ίσο με μηδέν.

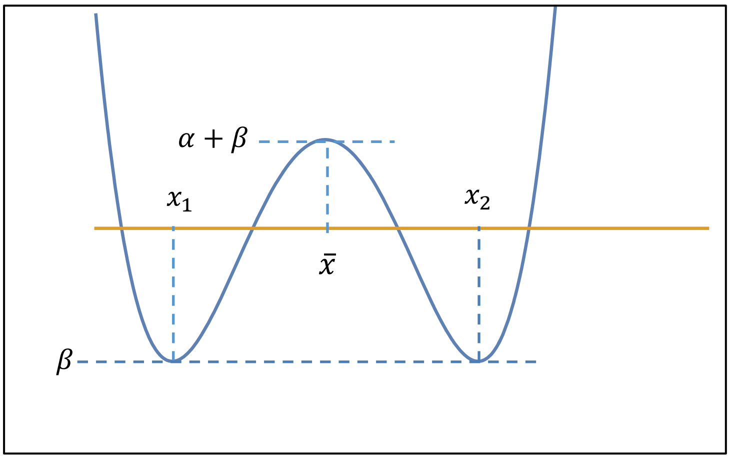
$$\frac{dU}{dx} = 0 => 2(x - x_1)(x - x_2)^2 + 2(x - x_1)^2(x - x_2) = 0$$

$$2(x - x_1)(x - x_2)(x - x_1 + x - x_2) = 0$$

$$(x - x_1)(x - x_2)(2x - (x_1 + x_2)) = 0$$

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - \bar{x}) = 0$$

Ρίζες $x = x_1$, $x = x_2$ και $x = \bar{x}$, Δηλαδή $x = 1.2$, 2.2 και 3.2. Στα $x = x_1$ και $x = x_2$ παίρνουμε $U(x_{1,2}) = \beta = 1.2\,J$ και σύμφωνα με τα παραπάνω αυτό είναι ένα ελάχιστο => σημείο ευσταθούς ισορροπίας. Αναγκαστικά λοιπόν στον μέσο όρο αυτών των σημείων $x = \bar{x}$ πρέπει να έχουμε μέγιστο => σημείο ασταθούς ισορροπίας. Στο $x = \bar{x}$ έχουμε $U(\bar{x}) = \alpha + \beta = 3.1 + 1.2 = 4.3\,J$. Επομένως η γραφική παράσταση θα είναι κάπως έτσι:



(β) Η μέγιστη ταχύτητα είναι εκεί όπου η δυναμική ενέργεια είναι ελάχιστη $U = \beta$. Η μηχανική ενέργεια ισούται με:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \beta = a + \beta => \frac{1}{2}mv^2 = a => mv^2 = 2a => v = \sqrt{2a/m} = 2.49\,m/s$$

(γ) Όταν η μηχανική ενέργεια είναι $E = 4.3\,J$ έχουμε το κινητό οριακά στο μέγιστο οπότε θα έχει δέσμια τροχιά είτε αριστερά είτε δεξιά. Τα σημεία αναστροφής είναι εκεί όπου $U(x) = E$:

$$U(x) = 3.1(x - 1.2)^2(x - 3.2)^2 + 1.2 = 4.3 => (x - x_1)^2(x - x_2)^2 = 1$$

Παίρνουμε ρίζα

$$(x - 1.2)(x - 3.2) \pm 1 = 0$$

$$x^2 - 4.4x + (3.84 \pm 1) = 0$$

Δευτεροβάθμια. Ρίζες:

$$x = \bar{x} \pm \begin{cases} \sqrt{0} \\ \sqrt{8} \end{cases} = \begin{cases} 2.2 \\ 2.2 \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

(δ) Ο πρώτος κλάδος αντιστοιχεί στο μέγιστο και άρα $F = -dU/dx = 0$

Στο δεύτερο κλάδο έχουμε $x = 2.2 \pm \sqrt{2}$. Εκεί

$$\frac{dU}{dx} = 2a(x - x_1)(x - x_2)^2 + 2a(x - x_1)^2(x - x_2)$$

$$\frac{dU}{dx} = 6.2(2.2 \pm \sqrt{2} - 1.2)\left(2.2 \pm \sqrt{2} - 3.2\right)^2 + 6.2\left(2.2 \pm \sqrt{2} - 1.2\right)^2\left(2.2 \pm \sqrt{2} - 3.2\right)$$

$$\frac{dU}{dx} = 6.2(1 \pm \sqrt{2})\left(-1 \pm \sqrt{2}\right)^2 + 6.2\left(1 \pm \sqrt{2}\right)^2\left(-1 \pm \sqrt{2}\right) = \pm 17.5$$

Οπότε η δύναμη ισούται με

$$F = -\frac{dU}{dx} = \mp 17.5\ N$$

6.20 Η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας ενός κινητού στη μια διάσταση δίνεται από την έκφραση $U(x) = a(x^2 - h)(x - h)$ όπου $a = 2\ J/m^3$ και το x σε $m.$ (α) Να γίνει η γραφική παράσταση από $x = -3$ έως $x = 5\ m,$ (β) Να βρεθούν τα σημεία x ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας και (γ) εάν η μηχανική ενέργεια του κινητού είναι $E = ak^3$ όπου $k = 1\ m,$ να εξηγηθεί ποιοτικά το είδος της κίνησης του κινητού

6.21 Ένα σώμα κινείται στη μια διάσταση κάτω από την εφαρμογή μιας μοναδικής συντηρητικής δύναμης η οποία περιγράφεται από δυναμική ενέργεια που είναι συνάρτηση του x και δίνεται από την έκφραση

$$U(x) = \lambda(x - x_0)^2$$

όπου $\lambda = 3\ J/m^2$ και $x_0 = 2\ m.$ Εάν το σώμα διαθέτει συνολική ενέργεια $E = 12\ J,$ να βρεθεί η έκφραση $|x_2 - x_1|/x_0$ όπου x_1 και x_2 είναι το ελάχιστο και μέγιστο x σε m αντίστοιχα της κίνησης που εκτελεί το σώμα.

Απάντηση: 2

Λύση:

Προφανώς πρόκειται για δέσμια τροχιά. Τα x_1 και x_2 είναι εκεί όπου ισχύει

$$U(x) = E \Rightarrow (x - x_0)^2 - \frac{E}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x_0x + \left(x_0{}^2 - \frac{E}{a}\right) = 0$$

Δευτεροβάθμια εξίσωση, διακρίνουσα

$$\Delta = 4{x_0}^2 - 4\left({x_0}^2 - \frac{E}{a}\right) = 4\frac{E}{a}$$

Λύσεις

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(2x_0 + \sqrt{4\frac{E}{a}}\right) = x_0 + \sqrt{\frac{E}{a}}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(2x_0 - \sqrt{4\frac{E}{a}}\right) = x_0 - \sqrt{\frac{E}{a}}$$

Η διαφορά τους είναι ίση με

$$x_2 - x_1 = 2\sqrt{\frac{E}{a}}$$

Έτσι το ζητούμενο είναι ίσο με

$$\frac{|x_2 - x_1|}{x_0} = \frac{2}{x_0}\sqrt{\frac{E}{a}} = \frac{2}{2}\sqrt{\frac{12}{3}} = 2$$

6.22 Ένα σώμα κινείται στη μια διάσταση κάτω από την εφαρμογή μιας μοναδικής συντηρητικής δύναμης η οποία περιγράφεται από δυναμική ενέργεια που είναι συνάρτηση του x και δίνεται από την έκφραση

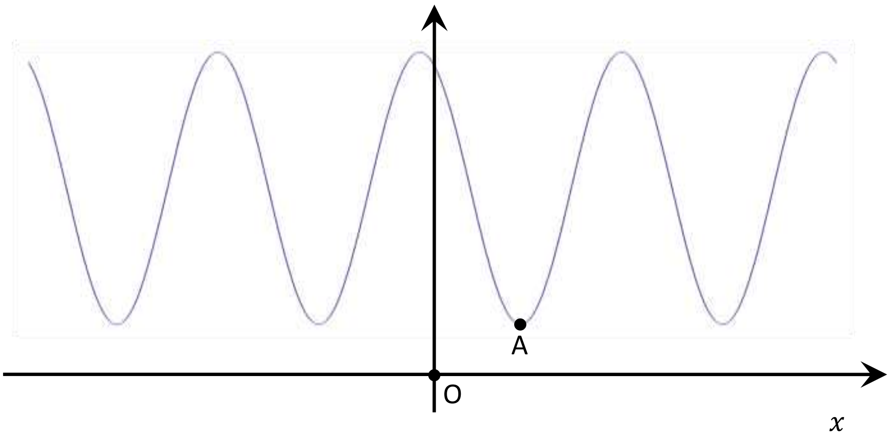
$$U(x) = a\left[2 + cos\left(2\pi\frac{x}{x_0} + \frac{\pi}{2\kappa}\right)\right]$$

όπου $a = 1.0\,J$, $x_0 = 1.2\,m$ και $\kappa = 4$. Να βρεθεί η απομάκρυνση x του πλησιέστερου σημείου ευσταθούς ισορροπίας ως προς την αρχή των συντεταγμένων Ο.

Απάντηση: $x = 0.525$

Λύση:

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση του $U(x)$. Λόγω της αρχικής φάσης $\pi/2\kappa$, η γραφική παράσταση του συνημιτόνου είναι ελαφρά μετατοπισμένη προς τα αριστερά (επειδή η αρχική φάση είναι θετική) και έτσι το πρώτο ελάχιστο Α στα δεξιά είναι πιο κοντά στο Ο από ότι το αντίστοιχο πρώτο ελάχιστο στα αριστερά.



Επομένως το α είναι το ζητούμενο σημείο ευσταθούς ισορροπίας. Ως γνωστό, το ελάχιστο του συνημιτόνου (τιμή: -1) εμφανίζεται στη γωνία π και έτσι:

$$2\pi \frac{x}{x_0} + \frac{\pi}{2\kappa} = \pi => x = \frac{2\kappa - 1}{4\kappa} x_0$$

Αντικαθιστώντας

$$x = \frac{8-1}{16} 1.2 = \ 0.525$$

6.23 Ένα σώμα κινείται στη μια διάσταση κάτω από την εφαρμογή μιας μοναδικής συντηρητικής δύναμης η οποία περιγράφεται από δυναμική ενέργεια που είναι συνάρτηση του x και δίνεται από την έκφραση

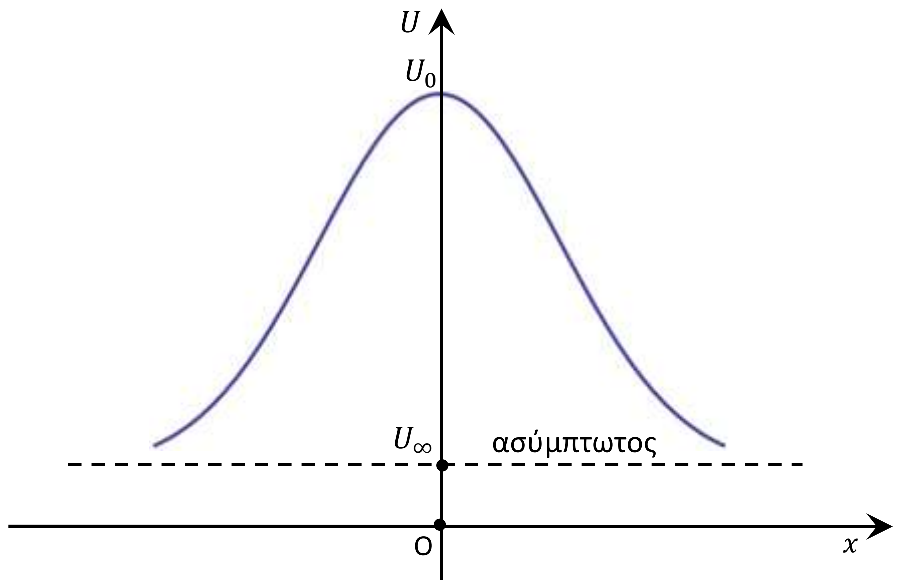
$$U(x) = -a \frac{x^2}{x^2 + c^2} + b$$

όπου a και b σταθερές σε μονάδες ενέργειας, $b > a$ και η σταθερά c σε μονάδες μήκους, όλα θετικά. Εάν η ποσότητα $E > 0$ είναι η συνολική ενέργεια του σώματος, να περιγραφεί ποιοτικά η κίνηση του κινητού για διάφορες τιμές της (πρέπει να δοθούν κάποιες σημαντικές τιμές τόσο ως προς U όσο και ως προς x).

Απάντηση: Τρείς περιοχές που ορίζονται από τις $E = b - a$ και b. Κίνηση αδύνατη, μη δέσμια με αναστροφή, και μη δέσμια χωρίς αναστροφή

Λύση:

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση του $U(x)$. Θέτοντας $x = 0$ παίρνουμε για το μέγιστο της δυναμικής ενέργειας $U_0 = b$. Η συνάρτηση είναι συμμετρική ως προς $\pm x$ δηλαδή άρτια. Για μεγάλα $x \to \pm\infty$ το κλάσμα τείνει στην τιμή 1 οπότε η συνάρτηση έχει ασύμπτωτη στο $U_\infty = b - a$



Επομένως διακρίνουμε γενικά τρεις περιοχές:

α) Για $E < U_\infty$ η κίνηση είναι αδύνατη

β) Για $U_0 < E < U_\infty$ έχουμε μια μη δέσμια κίνηση που αναστρέφει την πορεία της αφού θα υπάρχουν γενικά σημεία αναστροφής όπου $E = U(x)$ (σημεία A και B, δείτε επόμενο σχήμα)

γ) Για $E > U_0$ δεν υπάρχουν σημεία αναστροφής αφού παντού $E > U(x)$ και άρα το σώμα κινείται εσαεί με την ίδια φορά

Για την περίπτωση β όπου $b - a < E < b$, μπορούμε να βρούμε τα σημεία αναστροφής A και B θέτοντας

$$E = U(x)$$

Λύνοντας

$$E = -a\frac{x^2}{x^2 + c^2} + b => \frac{x^2}{x^2 + c^2} = -\frac{E - b}{a}$$

ή

$$ax^2 = (b - E)(x^2 + c^2)$$

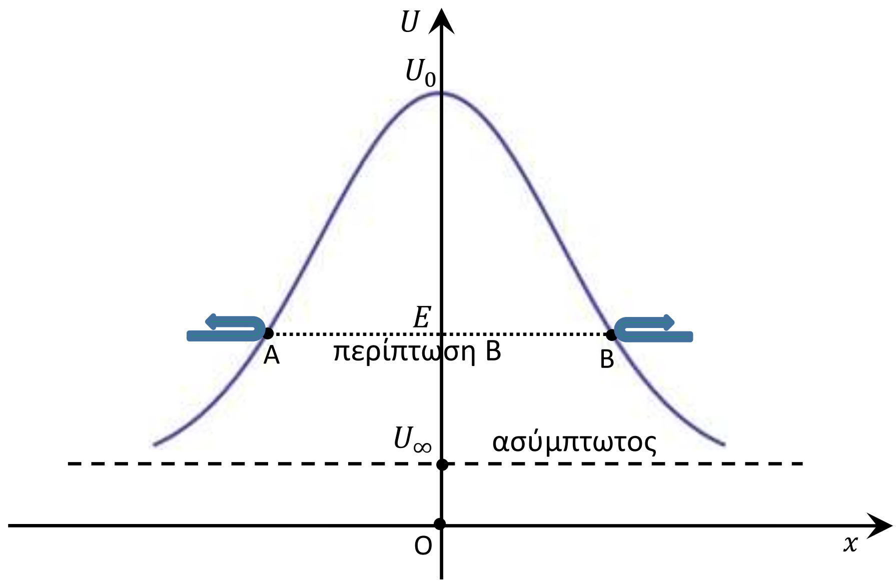
$$(a - b + E)x^2 = c^2(b - E)$$

Δηλαδή

$$x = \pm c\sqrt{\frac{b - E}{a - b + E}}$$

(η υπόριζος ποσότητα είναι θετική αφού $b - a < E < b$)

Το σημείο ασταθούς ισορροπίας είναι το μέγιστο $x = 0$ με $U = U_0$ και η μέγιστη κινητική ενέργεια για τις δυο περιπτώσεις β και γ είναι ίση με $K\_max = E - U_\infty$ ενώ για την περίπτωση γ υπάρχει και ελάχιστη κινητική ενέργεια $K\_min = E - U_0$.



6.24 Ένα σώμα κινείται στη μια διάσταση κάτω από την εφαρμογή μιας μοναδικής συντηρητικής δύναμης η οποία περιγράφεται από δυναμική ενέργεια που είναι συνάρτηση του x και δίνεται από την έκφραση

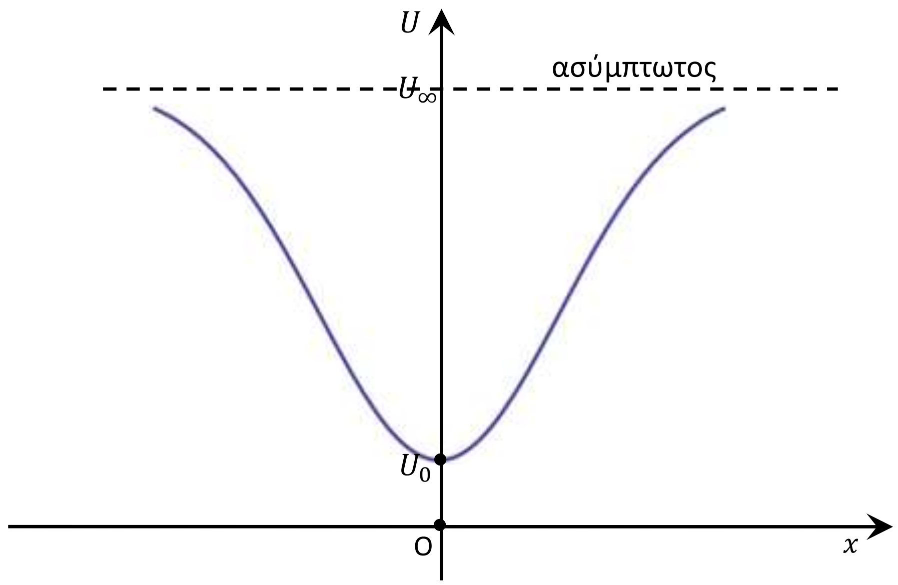
$$U(x) = a\left(\lambda - e^{-\frac{x^2}{c^2}}\right) + b$$

όπου a και b σταθερές σε μονάδες ενέργειας, η c σταθερά σε μονάδες μήκους και $\lambda > 1$ ένας καθαρός αριθμός, όλα θετικά. Εάν $E > 0$ είναι η συνολική ενέργεια του σώματος, να περιγραφεί ποιοτικά η κίνηση του κινητού για διάφορες τιμές της (πρέπει να δοθούν κάποιες σημαντικές τιμές τόσο ως προς U όσο και ως προς x).

<u>Απάντηση</u>: Τρείς περιοχές που ορίζονται από τις $E = a(\lambda - 1) + b$ και $a\lambda + b$. Κίνηση αδύνατη, δέσμια και μη δέσμια χωρίς αναστροφή

<u>Λύση</u>:

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση του $U(x)$. Θέτοντας $x = 0$ παίρνουμε για το ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας $U_0 = a(\lambda - 1) + b$. Η συνάρτηση είναι συμμετρική ως προς $\pm x$ δηλαδή άρτια. Για μεγάλα $x \to \pm\infty$ ο εκθετικός όρος σβήνει $e^{-\infty} \to 0$ και έτσι η συνάρτηση έχει ασύμπτωτη στο $U_\infty = a\lambda + b$



Επομένως διακρίνουμε γενικά τρεις περιοχές:

α) Για $E < U_0$ η κίνηση είναι αδύνατη

β) Για $U_0 < E < U_\infty$ έχουμε δέσμια τροχιά αφού θα υπάρχουν γενικά σημεία αναστροφής όπου $E = U(x)$ (σημεία Α και Β, δείτε επόμενο σχήμα)

γ) Για $U_\infty < E$ δεν υπάρχουν σημεία αναστροφής αφού παντού $E > U(x)$ και άρα το σώμα κινείται εσαεί με την ίδια φορά

Για την περίπτωση β, μπορούμε να βρούμε τα σημεία αναστροφής Α και Β θέτοντας

$$E = U(x)$$

Λύνοντας

$$\lambda - e^{-\frac{x^2}{c^2}} = \frac{E-b}{a} => e^{-\frac{x^2}{c^2}} = \lambda - \frac{E-b}{a}$$

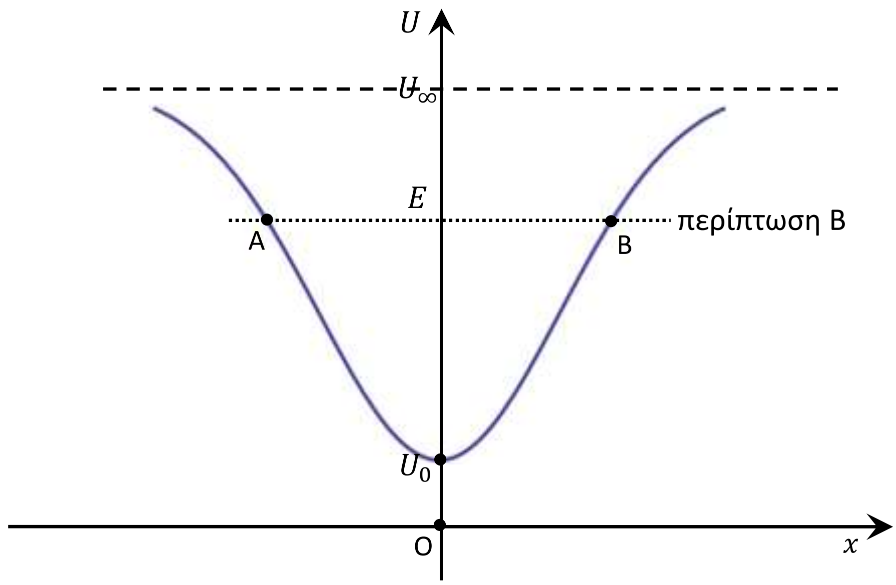
Παίρνοντας λογαρίθμους

$$\frac{x^2}{c^2} = ln\left[\frac{a}{\lambda a + b - E}\right]$$

Η ενέργεια είναι μικρότερη από την ασύμπτωτη τιμή $U_\infty = a\lambda + b$ και άρα το όρισμα του λογαρίθμου είναι θετικός αριθμός. Επίσης επειδή είναι μεγαλύτερη και από την ελάχιστη τιμή U_∞, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι το όρισμα του λογαρίθμου είναι μεγαλύτερο του 1 και άρα ο λογάριθμος είναι θετικός. Έτσι μπορούμε να πάρουμε την ρίζα και να λύσουμε:

$$x = \pm c\sqrt{ln\left[\frac{a}{\lambda a - E - b}\right]}$$

Το σημείο ευσταθούς ισορροπίας είναι το ελάχιστο $x = 0$ με $U = U_0$ και η μέγιστη κινητική ενέργεια είναι ίση με $K_{max} = E - U_0$.



U
U_∞
E
περίπτωση Β
Α
Β
U_0
Ο
x

7. ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ – ΥΛΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ

7.1 Μια περιστρεφόμενη τροχαλία συμπληρώνει 15 περιστροφές σε 5 δευτερόλεπτα. Να βρεθεί η συχνότητα σε περιστροφές ανά δευτερόλεπτο και σε περιστροφές ανά λεπτό (*rpm* δηλαδή "*revolutions per minute*" στα Αγγλικά) και η αντίστοιχη γωνιακή της ταχύτητα σε rad/s

Απάντηση: $3\ Hz$ - $300\ rpm$ - $6\pi\ rad/s$

Λύση: Από την Εξ. 7.13

$$f = \frac{n}{t} = \frac{15}{5} = 3\ Hz$$

Τα $3\ s$ αντιστοιχούν σε $3/60 = 1/20$ λεπτά οπότε

$$f = \frac{n}{t} = \frac{15}{1/20} = 300\ rpm$$

Από την Εξ. 7.14

$$\omega = 2\pi f = 6\pi\ rad/s$$

7.2 Ένας τροχός ακτίνας $12\ cm$ εκκινεί από την ηρεμία και συμπληρώνει 2.5 περιστροφές σε 4 δευτερόλεπτα. (α) Ποια είναι η μέση γωνιακή του ταχύτητα σε rad/s; (β) Ποια είναι η τελική γραμμική ταχύτητα ενός σημείου στην περιφέρεια του τροχού;

7.3 Ένας τροχός εκκινεί από την ηρεμία και επιταχύνει με γωνιακή ταχύτητα που δίνεται από την $\omega = bt^2 + ct$, όπου $b = 2\ rad/s^3$ και $c = 5\ rad/s^2$. Πόσες περιστροφές (όχι αναγκαστικά ακέραιος αριθμός) συμπληρώνει ο τροχός σε χρόνο $\Delta t = 1.5\ s$;

Απάντηση: 1.25 στροφές

Λύση:

Ολοκληρώνουμε για να βρούμε τη γωνία

$$\Delta\theta = \frac{bt^3}{3} + \frac{ct^2}{2}$$

Στο δεδομένο χρόνο:

$$\Delta\theta = \frac{b\Delta t^3}{3} + \frac{c\Delta t^2}{2}$$

Αντικαθιστώντας

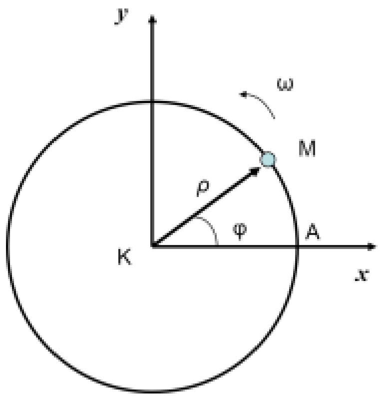
$$\Delta\theta = 7.875\ rad$$

Μετατροπή σε περιστροφή (η 1 περιστροφή αντιστοιχεί σε $2\pi\ rad$):

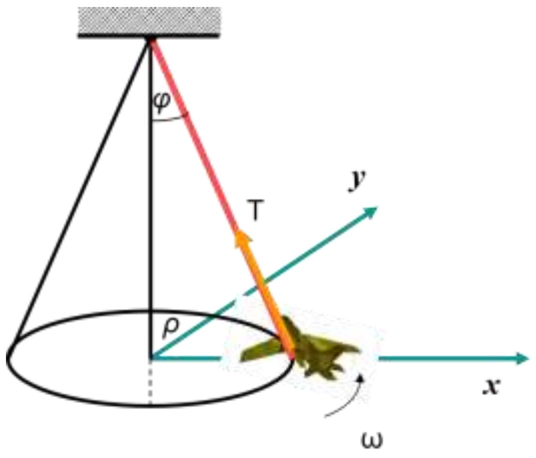
$$n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = 1.25$$

7.4 Δυο υλικά σημεία Μ και Μ' εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση διαφορετικής γωνιακής ταχύτητας $\omega\ και\ \omega'$ αλλά ίδιας φοράς επάνω στον ίδιο κύκλο ακτίνας ρ. Εάν την χρονική στιγμή $t = 0$ τα δυο σημεία βρίσκονται πάνω στον άξονα x τότε ξανασυναντιούνται μετά από πόσο χρόνο t;

7.5 Ένας δίσκος ακτίνας ρ και αμελητέου πάχους περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Η ακτίνα ΚΜ σχηματίζει γωνία $\varphi = 0$ με τον άξονα x στο $t = 0$. Ένα έντομο κινείται με σταθερή ταχύτητα v_0 επάνω στην ακτίνα ΚΜ προς τα έξω. Εάν στο $t = 0$ το έντομο βρίσκεται στο σημείο Κ τότε να βρεθεί σε τυχαία χρονική στιγμή t ο λόγος του μήκους που έχει διανύσει το έντομο επάνω στην ευθεία ΚΜ δια του αντίστοιχου μήκους τόξου ΑΜ.



7.6 Ένα μικρό παιχνίδι αεροπλανάκι είναι προσδεμένο σε νήμα από την οροφή ενός δωματίου έτσι ώστε να κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας ρ με γωνιακή συχνότητα ω. Το νήμα σχηματίζει συνεχώς γωνία φ με την κατακόρυφο. Εάν T είναι το μέτρο της τάσης του νήματος τότε να δοθεί μια έκφραση της κεντρομόλου δύναμης για κάθε χρονική στιγμή t συναρτήσει των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{e}_x$ και $\vec{e}_y$ και των δεδομένων του προβλήματος.



7.7 Δυο υλικά σημεία κινούνται επάνω στον ίδιο κύκλο ακτίνας R, το πρώτο με γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_1 = c_1 t^2$ και το δεύτερο με $\alpha_2 = c_2 (t/\tau)^{-1}$ όπου c_1, c_2 και τ κατάλληλες σταθερές σε μονάδες rad/s^4, rad/s^2 και s αντίστοιχα και t ο χρόνος. Το πρώτο υλικό σημείο ξεκινά από την ηρεμία στο $t = 0$ με αρχική γωνία 60^0 ενώ το δεύτερο ξεκινά από την ηρεμία στο $t = \tau$ με αρχική γωνία 45^0. Να βρεθεί η σταθερά c_1 εάν δίνονται οι άλλες δυο σταθερές $c_2 = 0.25$ και $\tau = 0.5$ και γνωρίζουμε ότι τα δυο υλικά σημεία συναντιούνται όταν $t = 2\,s$ (Σημείωση: Επισυνάπτεται πίνακας ολοκληρωμάτων)

Απάντηση: $-0.124\,rad/s^4$

Λύση:

Με ολοκλήρωση

$$\omega_1 = \frac{c_1}{3} t^3 + {c_1}'$$

$$\omega_2 = c_2 \tau l\,n(t) + {c_2}'$$

και εφαρμογή των αρχικών τιμών για την γωνιακή ταχύτητα:

$$\omega_1(0) = 0 => \frac{c_1}{3} 0 + c_1' = 0 => c_1' = 0$$

$$\omega_1(\tau) = 0 => c_2 \tau l\,n(\tau) + c_2' = 0 => c_2' = -c_2 \tau l\,n(\tau)$$

Έτσι

$$\omega_1 = \frac{c_1}{3} t^3$$

$$\omega_2 = c_2 \tau l\,n(t/\tau)$$

Με ολοκλήρωση και εφαρμογή των αρχικών τιμών για την γωνία του πρώτου υλικού σημείου:

$$\theta_1 = \frac{c_1}{12} t^4 + \frac{\pi}{3}$$

Με ολοκλήρωση για την γωνία του δεύτερου υλικού σημείου:

$$\theta_2 = c_2\tau^2(t/\tau)[l\,n(t/\tau) - 1] + c$$

και εφαρμογή των αρχικών τιμών

$$\theta_2(\tau) = c_2\tau^2[ln(1) - 1] + c = \frac{\pi}{4} => c = \frac{\pi}{4}$$

Άρα

$$\theta_2 = c_2\tau^2(t/\tau)[ln\,(t/\tau) - 1] + \frac{\pi}{4}$$

Όταν τα δυο κινητά συναντηθούν, οι γωνίες τους θα γίνουν ίσες

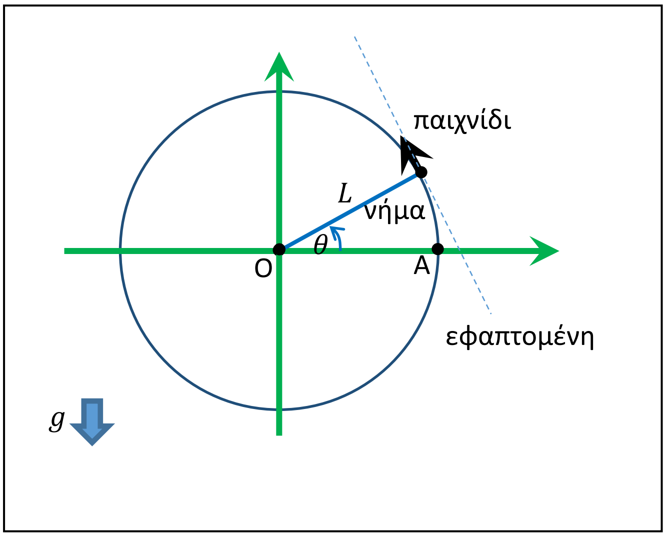
$$\theta_1 = \theta_2$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα $t = 2$, $c_2 = 0.25$ και $\tau = 0.5$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\frac{c_1}{12}16 + \frac{\pi}{3} = 0.25 \times 0.5^2 \times (2/0.5)[(\,ln\,(2/0.5) - 1)] + \frac{\pi}{4} =>$$

$$c_1 = -0.124$$

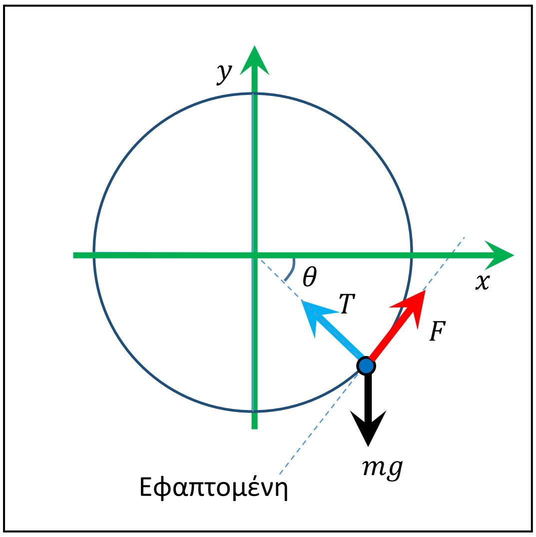
7.8 Μικρό παιχνίδι αεροπλανάκι μάζας m είναι προσδεμένο σε ιδανικό νήμα μήκους L, η άλλη άκρη του οποίου είναι στερεωμένη σε ακλόνητο σημείο το οποίο θεωρούμε ως την αρχή των αξόνων. Το παιχνίδι τοποθετείται αρχικά σε ηρεμία κατακόρυφα στο σημείο Α και λόγω της προωθήσεως του έλικά του αλλά και του νήματος, διαγράφει κατακόρυφη κυκλική τροχιά (θετικής περιστροφικής φοράς) και παραμένει εφαπτομενικό σε αυτή. Η δύναμη προωθήσεως δίνεται από την εξίσωση $F = c + bcos\theta$ όπου τα c και b είναι θετικές σταθερές και το παιχνίδι θεωρείται ως υλικό σημείο. (α) Πόση πρέπει να είναι η τιμή του b ώστε το αεροπλανάκι να εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση; (β) Να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\vec{e}_r$ που έχει το αεροπλανάκι ένα δευτερόλεπτο μετά την αρχική θέση Α με το διάνυσμα $\vec{e}_\theta$ δυο δευτερόλεπτα μετά την αρχική θέση Α. (γ) Να βρεθεί μια έκφραση της τάσης T του νήματος συναρτήσει της γωνίας θ.



<u>Απάντηση</u>: (α) mg & (γ) $2c\theta - mgsin\theta$

<u>Λύση</u>:

(α) Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, στο σώμα δρουν τρεις δυνάμεις, το βάρος του mg, η τάση του νήματος T και η δύναμη προωθήσεως F.



Αναλύουμε το βάρος σε δυο συνιστώσες, μια κατά την τροχιά $B_1 = -mgcos\theta$ και μια κατά το νήμα $B_2 = mgsin\theta$. Το αρνητικό πρόσημο προκύπτει επειδή η B_1 είναι αντίθετη με το $cos\theta$, π.χ. στο 1° και 4° τεταρτημόριο όπου $cos\theta > 0$, το B_1 τείνει να προκαλέσει περιστροφή κατά τη φορά του ρολογιού (αρνητική περιστροφική φορά).

Οι δυο εφαπτομενικές δυνάμεις B_1 και F προκαλούν ροπή γύρω από την αρχή των αξόνων O η οποία είναι ίση με

$$\tau = FL + B_1L = cR + bLcos\theta \; - mgLcos\theta$$

Για να έχουμε ομαλά επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση, πρέπει από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα $\tau = I\alpha$ η γωνιακή ταχύτητα α να είναι σταθερή και άρα και τ. Επομένως οι δυο όροι $cos\theta$ στην ροπή τ πρέπει να αλληλο-αναιρούνται και αυτό γίνεται μόνο για

$$b = mg$$

(β) Από το προηγούμενο υποερώτημα βλέπουμε ότι όταν $b = mg$, η ροπή γίνεται πιο απλά

$$\tau = cL$$

Η γωνιακή επιτάχυνση είναι ίση με

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{cL}{mL^2} = \frac{c}{mL}$$

όπου $I = mL^2$ είναι η ροπή αδράνειας σημειακής μάζας. Στην ομαλά επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση, η γωνία δίνεται από την

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{c}{2mL}t^2$$

που η αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0 είναι μηδέν αφού το σώμα ξεκινάει από ηρεμία και η αρχική γωνία θ_0 είναι μηδέν αφού το σώμα ξεκινάει από τον άξονα x. Τα μοναδιαία διανύσματα στην κυκλική κίνηση είναι τα

$$\vec{e}_r = (cos\theta, sin\theta)$$

και

$$\vec{e}_\theta = (-sin\theta, cos\theta)$$

Στο $t = 1\ s$ η γωνία γίνεται

$$\theta_1 = \frac{c}{2mL}$$

και

$$\vec{e}_r(1) = (cos\theta_1, sin\theta_1)$$

Στο $t = 2\ s$ η γωνία γίνεται

$$\theta_2 = \frac{c}{2mL}2^2 = 4\theta_1$$

και

$$\vec{e}_\theta(2) = (-sin4\theta_1, cos4\theta_1,)$$

Το εσωτερικό γινόμενο είναι ίσο με

$$\vec{e}_r(1) \cdot \vec{e}_\theta(2) = -cos\theta_1\ sin4\theta_1 + sin\theta_1\ cos4\theta_1 =>$$

$$\vec{e}_r(1) \cdot \vec{e}_\theta(2) = sin(\theta_1 - 4\theta_1) = -sin(3\theta_1)$$

ή

$$\vec{e}_r(1) \cdot \vec{e}_\theta(2) = sin(\theta_1 - 4\theta_1) = -sin\left(\frac{3c}{2mL}\right)$$

(γ) Κατά μήκος της ακτίνας υπάρχουν δυο δυνάμεις, η τάση του νήματος προς το κέντρο και η συνιστώσα B_2 του βάρους προς τα έξω. Μαζί τους οι δυο παίζουν το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης και έτσι

$$T - B_2 = mL\omega^2$$

Η συνιστώσα του βάρους είναι

$$B_2 = -mgsin\theta$$

Το μείον προκύπτει επειδή στο 4^o τεταρτημόριο που δείχνουμε τις δυνάμεις στο προηγούμενο σχήμα, το $sin\theta$ είναι αρνητικό (εάν δουλεύαμε στο 1^o τεταρτημόριο το $sin\theta$ θα ήταν αρνητικό αλλά η B_2 θα ήταν από την άλλη μεριά και έτσι το τελικό αποτέλεσμα θα ήταν το ίδιο, όπως αναμένεται). Έτσι

$$T + mgsin\theta = mR\omega^2$$

Η Στην ομαλά επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση, η γωνιακή ταχύτητα δίνεται από την

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = \alpha t = \frac{c}{mL}t$$

(όπως προαναφέρθηκε, η αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0 είναι μηδέν). Έτσι

$$T = \frac{c^2}{mL}t^2 - mgsin\theta$$

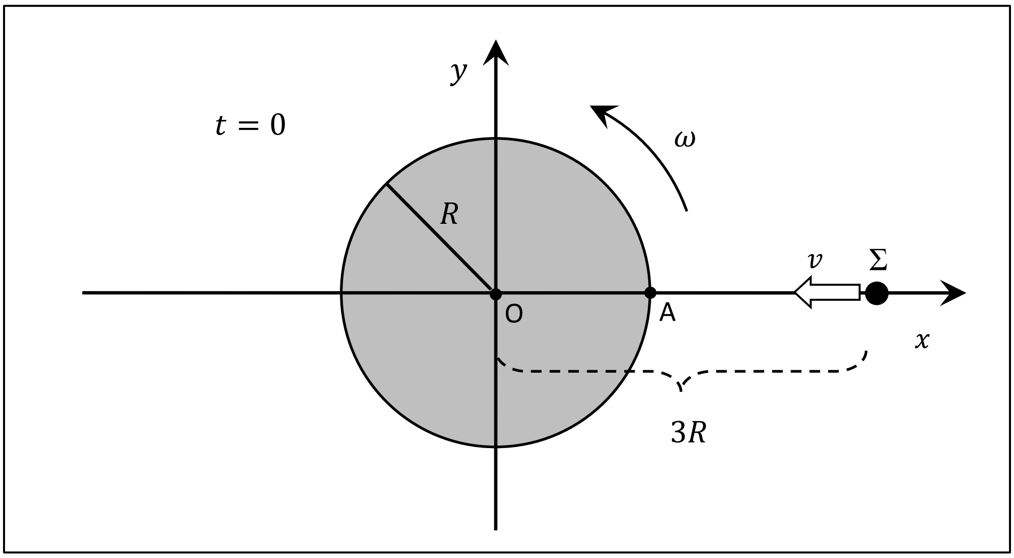
Εφόσον θέλουμε το T συναρτήσει της γωνίας, πρέπει να απαλείψουμε τον χρόνο και στη θέση του να αντικαταστήσουμε μια έκφραση της γωνίας. Βρήκαμε προηγουμένως ότι

$$\theta = \frac{c}{2mL}t^2$$

οπότε

$$T = +2c\theta - mgsin\theta$$

7.9 Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ένας λεπτός δίσκος ακτίνας $R = 4\ m$ βρίσκεται στη σελίδα και μπορεί και περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από την αρχή Ο ενώ το Α είναι ένα σημείο στην περιφέρειά του το οποίο αρχικά βρίσκεται επάνω στον άξονα $+x$, όπως δείχνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ και ενώ ο δίσκος ηρεμεί, εφαρμόζεται κάποια ροπή η οποία προσδίδει μη σταθερή γωνιακή επιτάχυνση στον δίσκο ίση με $\alpha(t) = \pi^4 ct$ όπου $c = 1\ rad/s^3$. Παράλληλα ένα σημειακό σώμα Σ κινείται κατά μήκος του αρνητικού άξονα x με σταθερή ταχύτητα v και συναντάει το σημείο Α αφού αυτό έχει εκτελέσει 18 πλήρεις περιστροφές. Να βρεθεί κατ' απόλυτο τιμή η ταχύτητα v εάν στο $t = 0$ το Σ απέχει απόσταση $3R$ από το Ο.



Απάντηση: $5.236\ m/s$

Λύση:

Από την ολοκλήρωση της α και λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο δίσκος βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία, βρίσκουμε για την γωνιακή του ταχύτητα την εξής έκφραση:

$$\omega = \frac{1}{2}\pi^4 ct^2$$

Ολοκληρώνοντας ακόμα μια φορά και λαμβάνοντας υπόψιν ότι η αρχική γωνία του σημείου Α είναι μηδέν, βρίσκουμε για την γωνία του σε τυχαία χρονική στιγμή την εξής έκφραση:

$$\theta = \frac{1}{6}\pi^4 ct^3$$

Οι 18 πλήρεις περιστροφές αντιστοιχούν σε γωνία $\theta = 18 \times 2\pi = 36\pi$ οπότε αντικαθιστώντας στην παραπάνω έκφραση, βρίσκουμε για τον αντίστοιχο χρόνο το εξής:

$$36\pi = \frac{1}{6}\pi^4 ct^3 \Rightarrow t = \frac{6}{\pi}$$

Το Σ απέχει απόσταση $3R$ από το Ο και άρα απόσταση $2R$ από το Α (στην αρχική του δέση). Επομένως η ταχύτητα του Α κατ' απόλυτη τιμή είναι ίση με:

$$v = \frac{\Delta x}{t} = \frac{2R\pi}{6} = \frac{8\pi}{6} = 5.236\ m/s$$

7.10 Ένα κινητό κινείται επάνω σε κύκλο ακτίνας R με γωνία (ως προς τον x-άξονα) που δίνεται από την έκφραση $\theta(t) = bt^2 + ct^3$ όπου $b = 4\, rad/s^2$ και $c = 1.2\, rad/s^3$. Να βρεθεί ο λόγος κ των μέτρων της κεντρομόλου επιτάχυνσης δια την επιτρόχιο επιτάχυνση κατά τη χρονική στιγμή $t = 1\, s$.

Απάντηση: $\kappa = 8.85$

Λύση:

Από την δεδομένη γωνία βρίσκουμε για την γωνιακή ταχύτητα

$$\omega(t) = \theta'(t) = 2bt + 3ct^2$$

και γωνιακή επιτάχυνση

$$\alpha(t) = \omega'(t) = 2b + 6ct$$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση δίνεται από την

$$a_K = R\omega^2$$

ενώ η επιτρόχιος

$$a_E = R\alpha$$

Παίρνοντας λόγους

$$\frac{a_K}{a_E} = \frac{\omega^2}{\alpha}$$

Τη χρονική στιγμή $t = 1\, s$ έχουμε

$$\frac{a_K}{a_E} = \frac{(2b + 3c)^2}{2b + 6c} = \frac{(2 \times 4 + 3 \times 1.2)^2}{2 \times 4 + 6 \times 1.2} = 8.85$$

7.11 Στο προηγούμενο πρόβλημα εάν η ακτίνα είναι ίση με $R = 2\, m$, να βρεθεί η απόλυτη τιμή της x-συνιστώσας της γραμμικής (επιτρόχιας) ταχύτητας του κινητού κατά τη χρονική στιγμή $t = 1\, s$.

Απάντηση: $20.5\, m/s$

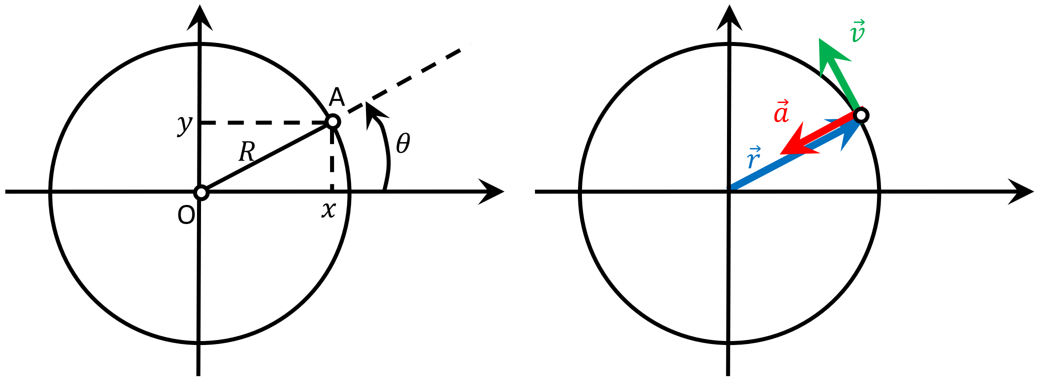
Λύση:

Από την δεδομένη γωνία βρίσκουμε για την γωνιακή ταχύτητα

$$\omega(t) = \theta'(t) = 2bt + 3ct^2$$

Η αντίστοιχη γραμμική ταχύτητα ισούται με:

$$v(t) = \omega(t)R = R(2bt + 3ct^2)$$



Τη χρονική στιγμή $t = 1\ s$ η ταχύτητα ισούται με

$$v(1) = R(2b + 3c) = 23.2\ m/s$$

ενώ η γωνία του κινητού θ που είναι στην ουσία η γωνία του διανύσματος θέσης $\vec{r}$ (δείτε παραπάνω σχήμα) ισούται με:

$$\theta(1) = b + c = 5.2\ rad$$

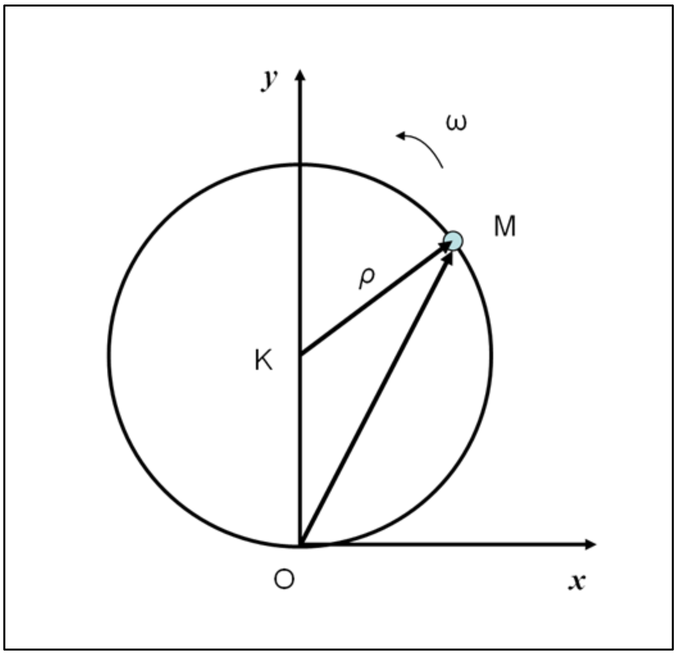
Η γραμμική ταχύτητα $\vec{v}$ είναι κάθετη στο $\vec{r}$ και άρα η γωνία της φ είναι κατά $\pi/2$ μεγαλύτερη από τη θ

$$\varphi = \theta + \frac{\pi}{2} = 6.77\ rad$$

Έτσι η απόλυτος τιμή της x-συνιστώσας του διανύσματος $\vec{v}$ είναι ίση με:

$$|v_x| = |v cos\varphi| = 20.5\ m/s$$

7.12 Στο παρακάτω σχήμα το σημείο Μ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση γωνιακής ταχύτητας $\omega = 0.5\ rad/s$ επάνω σε κύκλο ακτίνας $\rho = 2\ m$ ο οποίος εφάπτεται στην αρχή των αξόνων Ο. Εάν στο $t = 0$ το Μ βρίσκεται στο Ο, να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος θέσης του Μ στο $t = 1.5\ s$.



<u>Απάντηση</u>: $3.72\ m$

<u>Λύση</u>:

Το διάνυσμα θέσης είναι το OM ενώ η γωνία $\theta = O\widehat{K}M$ δίνεται στην ομαλή κυκλική κίνηση από την

$$\theta = \omega t$$

Στο $t = 1.5\ s$

$$\theta = 0.5 \times 1.5 = 0.75\ rad$$

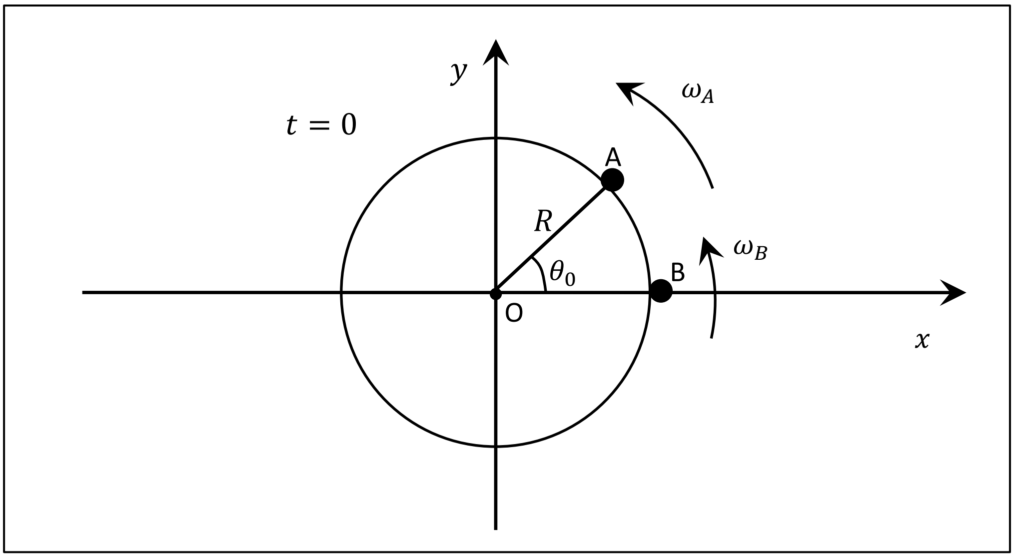
Οι αποστάσεις OK και KM είναι ίσες με την ακτίνα ρ του κύκλου. Από τον νόμο των συνημιτόνων:

$$r^2 = \rho^2 + \rho^2 + 2\rho^2 cos\theta$$

οπότε

$$r = \sqrt{2 \times 2^2 + 2 \times 2^2 cos(0.75)} = 3.72\ m$$

7.13 Στο παρακάτω σχήμα δυο σημειακές μάζες Α και Β κινούνται επάνω στον ίδιο κύκλο ακτίνας R με διαφορετικές σταθερές γωνιακές ταχύτητες $\omega_A = 2\ rad/s$ και $\omega_B = \omega_A/10$. Το σχήμα απεικονίζει την κατάσταση στο $t = 0$ όπου η Β βρίσκεται επάνω στον άξονα x ενώ το Α έχει μια αρχική γωνία $\theta_0 = 1\ rad$. Όταν οι δυο μάζες θα συναντηθούν, να βρεθεί το ποσοστό % της περιφέρειας του κύκλου που έχει καλύψει η Α σε σχέση με την αρχική της θέση.



<u>Απάντηση</u>: 93.4 %

<u>Λύση</u>:

Η κίνηση και των δυο μαζών είναι ομαλή κυκλική και επομένως θα ισχύει:

$$\theta_A = \theta_0 + \omega_A t$$

$$\theta_B = \omega_B t$$

(η Α έχει μια αρχική γωνία θ_0 ενώ η Β δεν έχει). Η γωνιακή ταχύτητα της Β είναι το $1/10$ της Α οπότε $\omega_B = \omega_A/10 = 0.2\, rad/s$. Εφόσον η Α είναι πιο γρήγορη αλλά και επειδή ξεκινάει και πιο ψηλά από την Β, όταν συναντηθεί με την Β θα έχει διανύσει ένα επιπλέον κύκλο, δηλαδή

$$\theta_A - \theta_B = 2\pi$$

Από τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να βρούμε τον χρόνο της συνάντησης των δυο μαζών

$$\theta_0 + \omega_A t - \omega_B t = 2\pi => t = \frac{2\pi - \theta_0}{\omega_A - \omega_B} = \frac{2\pi - 1}{2 - 0.2} = 2.935\ s$$

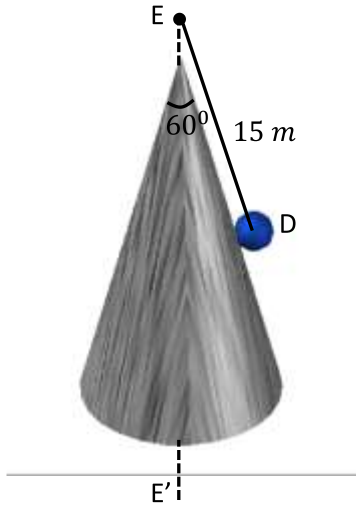
Η γωνία που θα έχει εκτελέσει η Α από την αρχική της θέση θα ισούται με

$$\theta_A - \theta_0 = \omega_A t = 2 \times 2.935 = 5.87\ rad$$

Θέλουμε το % ποσοστό σε σχέση με το 2π (ένας πλήρης κύκλος) και έτσι

$$\kappa = \frac{\theta_A - \theta_0}{2\pi} 100 = \frac{5.87}{2 \times 3.14} 100 \ = 93.4\ \%$$

7.14 Στο παρακάτω σχήμα, το σώμα D εξαρτάται με νήμα μήκους $L = 15\ m$ από το σημείο E, εφάπτεται στη λεία κωνική επιφάνεια γωνίας 30^0 και περιστρέφεται γύρω από τον άξονα EE' με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 2\pi/6\ rad/s$. Αν το σώμα D έχει μάζα $4\ kg$ αλλά μπορεί να θεωρηθεί ως σημειακό, να υπολογίσετε: (α) Τη γραμμική ταχύτητα του σώματος. (β) Την αντίδραση της επιφάνειας επάνω στο σώμα. (γ) Την τάση του νήματος. (δ) Εάν η ω αυξηθεί, ποια θα είναι η μέγιστη τιμή της ώστε η αντίδραση να γίνει μηδέν; Πάρτε $g \approx 10\ m/s^2$ για ευκολία.

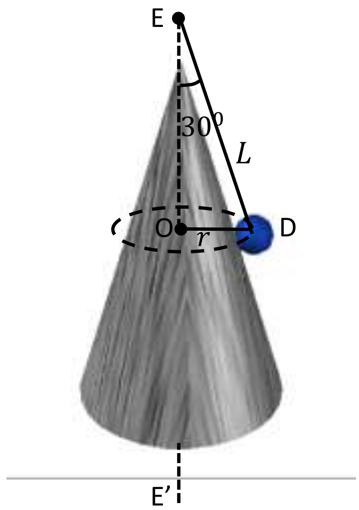


<u>Απάντηση</u>: (α) $3.93\ m/s$, (β) $12.8\ N$, (γ) $38.7\ N$, (δ) 0.524 rad/s

<u>Λύση</u>:

(α) Το σώμα D εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από τη σημείο O που βρίσκεται επάνω στον άξονα EE'. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, το μήκος του νήματος L παίζει το ρόλο της υποτείνουσας στο τρίγωνο EOD που σχηματίζεται. Από απλή τριγωνομετρία η ακτίνα περιστροφής ισούται με

$$r = Lsin30^0 = \frac{L}{2} = 7.5\ m$$

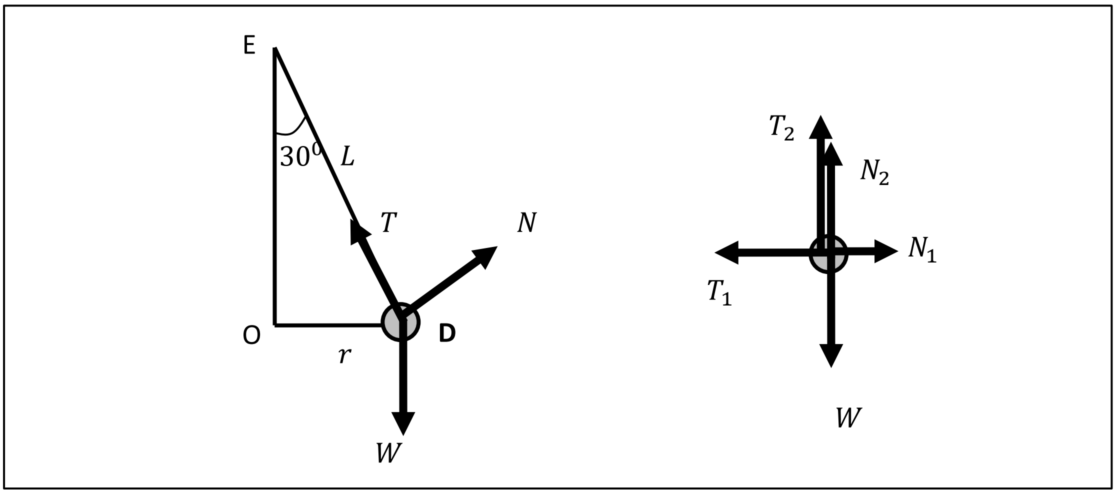


Αφού η γωνιακή ταχύτητα ισούται με $\omega = \pi/6\, rad/s$ τότε η αντίστοιχη γραμμική ταχύτητα σύμφωνα με την Εξ. 7.16 θα ισούται με:

$$v = \omega r = \pi/6 \times 7.5 = 3.93\, m/s$$

(β) Οι δυνάμεις που δρουν στο σώμα φαίνονται στο παρακάτω σχήμα στα αριστερά. Η αντίδραση από την κωνική επιφάνεια είναι η N και δρα κάθετα ως προς αυτή. Οι άλλες δυο δυνάμεις είναι το βάρος W του σώματος και η τάση του νήματος T. Αναλύουμε τις N και T σε συνιστώσες όπως στο σχήμα στα δεξιά, κατακόρυφα κατά μήκος του βάρους W και οριζόντια δηλ. κάθετα στο βάρος. Κατακόρυφα το σώμα ισορροπεί οπότε:

$$T_2 + N_2 = W \qquad (1)$$



Οριζόντια το σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση και επομένως επιταχύνεται προς το κέντρο Ο της τροχιάς, σύμφωνα με αυτά που είπαμε για την κυκλική κίνηση. Άρα το σύνολο των δυνάμεων πρέπει να ισούται με την κεντρομόλο δύναμη $F_\kappa = mv^2/r$. Έτσι:

$$T_1 - N_1 = mv^2/r \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας στις (1) και (2) τις εκφράσεις των συνιστωσών έχουμε:

$$Tcos30^0 + N\,sin30^0 = mg \qquad (3)$$

$$Tsin30^0 - Ncos30^0 = mv^2/r \qquad (4)$$

Για να απαλείψουμε το T πολλαπλασιάζουμε την (3) με $sin60^0$ και την (4) με $cos60^0$ και αφαιρούμε:

$$Nsin^2 30^0 + Ncos^2 30^0 = m(gsin30^0 - cos30^0 v^2/\,r)$$

ή

$$N = m(gsin30^0 - cos30^0 v^2/\,r) \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας τα νούμερα έχουμε $N = 12.8\,N$

γ) Από την (3) λύνουμε ως προς T και έχουμε:

$$T = (mg - N\,sin30^0)\,/\,cos30^0 = 38.7\,N$$

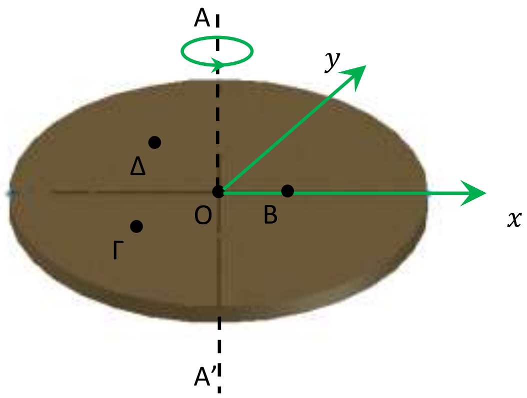
δ) Από την (5) έχουμε $N = 0$ όταν

$$gsin30^0 - \frac{cos30^0 v^2}{r} = 0 => v^2 = grtan30^0$$

από την οποία παίρνουμε $v = 6.58\,m/s$ και $\omega = v/r = 0.524\ \mathrm{rad/s}$

8. ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

8.1 Ο παρακάτω δίσκος έχει απειροελάχιστο πάχος, βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία και τα τρία σημεία του $B(2{,}0)$, $\Gamma(-2,-3)$ και $\Delta(-3{,}3)$ έχουν συντεταγμένες που αναφέρονται σε σύστημα αναφοράς με αρχή το κέντρο Ο του δίσκου και άξονες που βρίσκονται στο επίπεδο του δίσκου (όλα σε m). Στο $t = 0$ ο δίσκος τίθεται σε περιστροφή γύρω από τον άξονα ΑΑ' ο οποίος τέμνει τον δίσκο κάθετα στο σημείο Ο, με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha = 0.5\,rad/s^2$. Να βρεθεί η γραμμική ταχύτητα των τριών σημείων την χρονική στιγμή $t = 2.4\,s$.



<u>Απάντηση</u>: 2.40, 4.32 και 5.09 m/s

<u>Λύση</u>: Η γραμμική ταχύτητα στην περιστροφική κίνηση δίνεται από την Εξ. 8.3 $v = \omega r$ όπου r είναι η απόσταση του κάθε σημείο από τον άξονα περιστροφής, δηλαδή το Ο. Εφόσον το Ο είναι η αρχή των συντεταγμένων, η απόσταση r είναι αυτομάτως και το μέτρο του διανύσματος θέσης των τριών διανυσμάτων. Έτσι

$$r_A = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2.00\ m$$
$$r_B = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = 3.60\ m$$
$$r_\Gamma = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 4.24\ m$$

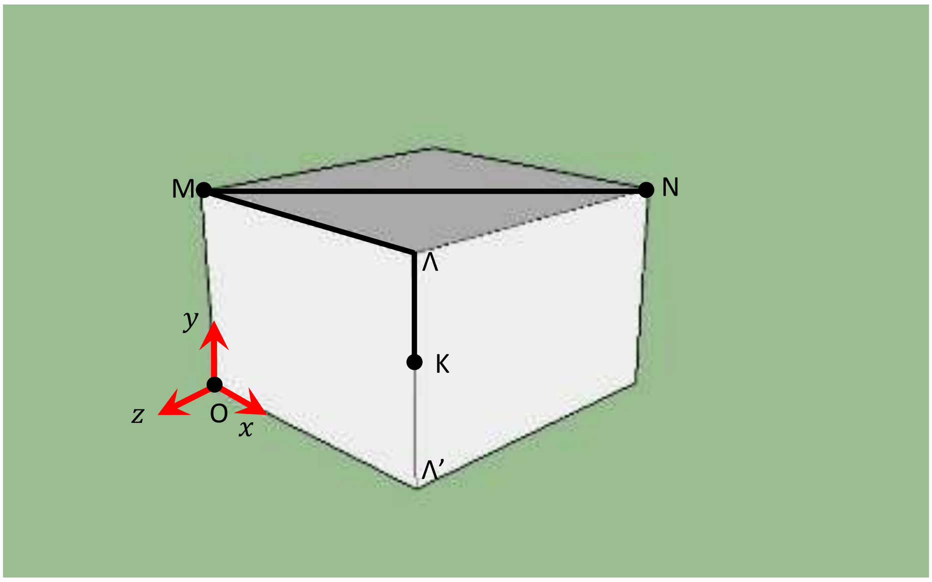
Αφού το α είναι σταθερό έχουμε ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση και άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 8.6 για να υπολογίσουμε το ω στην χρονική στιγμή $t = 2\ s$. Εφόσον ο δίσκος βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία $\omega_0 = 0$ και έτσι:

$$\omega = \alpha t = 0.5 \times 2.4 = 1.2\ rad/s$$

Επομένως η γραμμική ταχύτητα των τριών σημείων ισούται με

$$v_A = \omega r_A = 1.2 \times 2.00 = 2.40\ m/s$$
$$v_B = \omega r_B = 1.2 \times 3.60 = 4.32\ m/s$$
$$v_\Gamma = \omega r_\Gamma = 1.2 \times 4.24 = 5.09\ m/s$$

8.2 Στο παρακάτω σχήμα τα σημεία Λ, Μ, Ν και Ο είναι τρεις από τις οκτώ κορυφές ενός κύβου πλευράς $a = 2.8\ cm$ με το Ο να είναι η αρχή των αξόνων και το σημείο Κ να είναι το μέσο της ακμής ΛΛ' του κύβου. Ο κύβος περιστρέφεται γύρω από την ακμής του ΜΟ με γωνιακή επιτάχυνση που δίνεται από την έκφραση $\alpha(t) = bt + ft^2$ όπου $b = 0.4\ rad/s^3$ και $f = 0.3\ rad/s^4$. Εάν η αρχική γωνιακή ταχύτητα του κύβου στο $t = 0$ είναι $1\ rad/s$, να βρεθεί η γραμμική ταχύτητα των σημείων Κ, Λ, Μ και Ν την χρονική στιγμή $t = 2\ s$



<u>Απάντηση</u>: 0, 7.28 και 10.3 cm/s

<u>Λύση</u>: Η γραμμική ταχύτητα στην περιστροφική κίνηση δίνεται από την Εξ. 8.3 $v = \omega r$ όπου r είναι η απόσταση του κάθε σημείου από τον άξονα περιστροφής. Το σημείο Μ βρίσκεται επάνω στο άξονα περιστροφής οπότε $r = 0$ και η γραμμική του ταχύτητα είναι μηδέν σε κάθε χρονική στιγμή. Τα σημεία Κ και Λ απέχουν την ίδια απόσταση ΛΜ από τον άξονα περιστροφής η οποία είναι ίση με την πλευρά του κύβου και έτσι

$$r_\Lambda = r_K = a = 2.8\, cm$$

Το σημείο Ν βρίσκεται επάνω στην διαγώνιο της πάνω έδρας και άρα απέχει απόσταση ΜΝ από τον άξονα περιστροφής που είναι ίση με

$$r_N = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} = 3.96\, cm$$

Αφού το α δεν είναι σταθερό, καταφεύγουμε στην Εξ. 8.2 $\alpha = d\omega/dt$ για να βρούμε το ω από όπου με ολοκλήρωση βρίσκουμε

$$\omega = \frac{b}{2}t^2 + \frac{f}{3}t^3 + c$$

Θέτοντας $t = 0$ εύκολα βλέπουμε ότι η σταθερά ολοκλήρωσης είναι ίση με την αρχική γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = 1\, rad/s$. Την χρονική στιγμή $t = 2\, s$

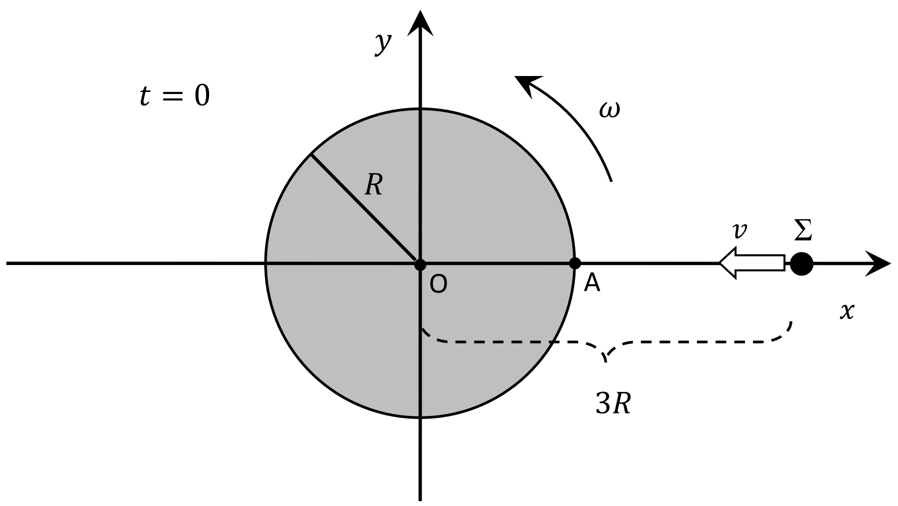
$$\omega(2) = \frac{b}{2}2^2 + \frac{f}{3}2^3 + \omega_0 = \frac{0.4}{2}2^2 + \frac{0.3}{3}2^3 + 1 = \ 2.6\, s$$

Επομένως η γραμμική ταχύτητα των τριών σημείων ισούται με

$$v_K = \omega r_K = 2.6\ \times 2.8\ = 7.28\, cm/s$$

$$v_\Lambda = \omega r_\Lambda = 2.6 \times 2.8 = 7.28\, cm/s$$
$$v_M = \omega r_M = 0\, cm/s$$
$$v_N = \omega r_N = 2.6 \times 3.96 = 10.3\, cm/s$$

8.3 Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, ένας λεπτός δίσκος ακτίνας $R = 4\, m$ βρίσκεται μέσα στη σελίδα και μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από την αρχή Ο ενώ το Α είναι ένα σημείο του στην περιφέρειά του το οποίο αρχικά βρίσκεται επάνω στον άξονα $+x$, όπως στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ και ενώ ο δίσκος ηρεμεί, εφαρμόζεται κάποια ροπή η οποία προσδίδει γωνιακή επιτάχυνση στον δίσκο ίση με $\alpha(t) = \pi^4 ct$ όπου $c = 1\, rad/s^3$ μια σταθερά. Παράλληλα ένα σημειακό σώμα Σ κινείται κατά μήκος του αρνητικού άξονα x με σταθερή ταχύτητα v και συναντάει το σημείο Α αφού αυτό έχει εκτελέσει 18 πλήρεις περιστροφές. Να βρεθεί κατ' απόλυτο τιμή η ταχύτητα v (σε m/s) εάν στο $t = 0$ το Σ απέχει απόσταση $3R$ από το Ο.



<u>Απάντηση</u>: $5.236\, m/s$

<u>Λύση</u>:

Από την ολοκλήρωση της α και λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο δίσκος βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία, βρίσκουμε για την γωνιακή του ταχύτητα την εξής έκφραση:

$$\omega = \frac{1}{2}\pi^4 ct^2$$

Ολοκληρώνοντας ακόμα μια φορά και λαμβάνοντας υπόψιν ότι η αρχική γωνία του σημείου Α είναι μηδέν, βρίσκουμε για την γωνία του σε τυχαία χρονική στιγμή την εξής έκφραση:

$$\theta = \frac{1}{6}\pi^4 c t^3$$

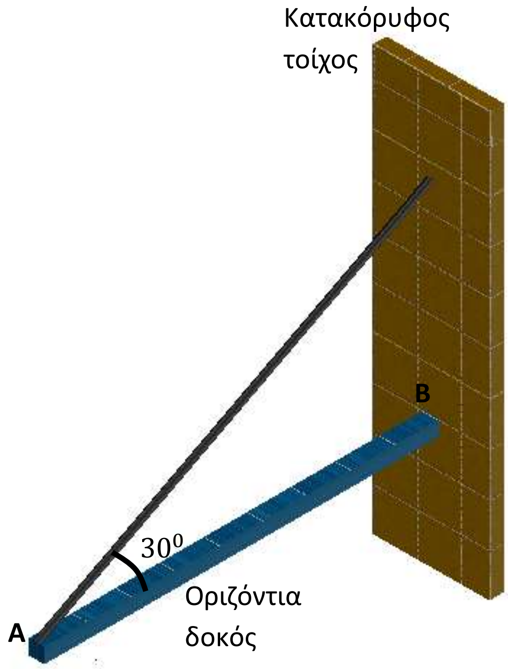
Οι 18 πλήρεις περιστροφές αντιστοιχούν σε γωνία $\theta = 18 \times 2\pi = 36\pi$ οπότε αντικαθιστώντας στην παραπάνω έκφραση, βρίσκουμε για τον αντίστοιχο χρόνο το εξής:

$$36\pi = \frac{1}{6}\pi^4 c t^3 => t = \frac{6}{\pi}$$

Το Σ απέχει απόσταση $3R$ από το Ο και άρα απόσταση $2R$ από το Α (στην αρχική του δέση). Επομένως η ταχύτητα του Α κατ' απόλυτη τιμή είναι ίση με:

$$v = \frac{\Delta x}{t} = \frac{2R\pi}{6} = \frac{8\pi}{6} = 5.236\ m/s$$

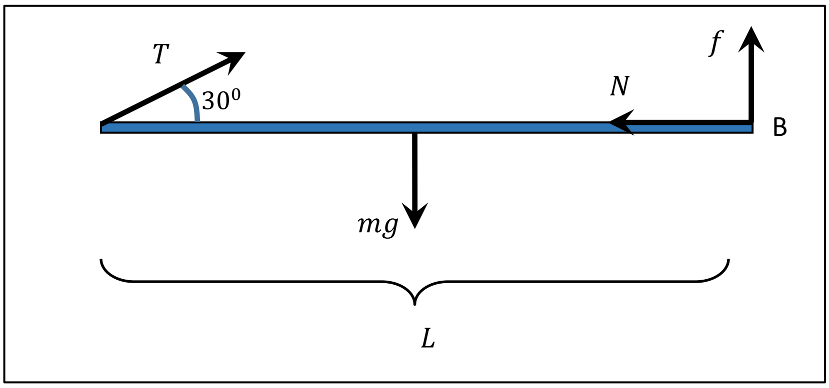
8.4 Οριζόντια δοκός ΑΒ μήκους 20 m και ορθογώνιας διατομής 0.2 m^2, στηρίζεται πάνω σε κατακόρυφο τοίχο στην μια της άκρη Β (απλή επαφή), και αναρτάται από ατσάλινο καλώδιο από την άλλη της άκρη Α όπως στο ακόλουθο Σχήμα. (α) Αναπαριστάνοντας την δοκό ως μια ευθεία, σχεδιάστε όλες τις δυνάμεις που δρουν σε αυτήν. (β) Υπολογίστε την τάση του καλωδίου εάν η πυκνότητα του υλικού της δοκού είναι ίση με 2 g/cm^3. (γ) Υπολογίστε τον συντελεστή στατικής τριβής στο Β θεωρώντας ότι η τριβή είναι η μέγιστη δυνατή ώστε να μην εμφανίζεται ολίσθηση. Πάρτε $g \approx 10\ m/s^2$ για ευκολία.



Απάντηση: $8 \times 10^4\ N$, 0.577

<u>Λύση</u>:

(α) Στη δοκό ασκούνται οι εξής δυνάμεις: Το βάρος της mg στο μέσο της, η τάση του καλωδίου T υπό γωνία 30^0 στο αριστερό της άκρο, η δύναμη τριβής f στο Β (αλλιώς το δεξιό κομμάτι της δοκού θα έπεφτε προς τα κάτω) και η κάθετη δύναμη αντίδρασης N στο Β από τον τοίχο (αλλιώς στο Β η δοκός θα μετατοπιζότανε προς τα δεξιά).



(β) Ως προς το σημείο Β, η τάση T ασκεί μια ροπή σύμφωνα με την Εξ. 8.10 ίση με

$$-TLsin30^0 = -\frac{TL}{2}$$

λαμβάνοντας την φορά της περιστροφής των δεικτών του ρολογιού ως αρνητική. Εφόσον το σώμα ισορροπεί πρέπει αυτή η ροπή να εξουδετερώνεται από μια ίση και αντίθετη ροπή. Η μόνη άλλη δύναμη που παράγει ροπή ως προς το Β είναι το βάρος mg (οι άλλες δυο δυνάμεις δρούνε επάνω στο Β). Η ροπή του βάρους είναι ίση με $mgL/2$ Παίρνοντας το σύνολο των ροπών ίσο με μηδέν έχουμε:

$$\frac{mgL}{2} - \frac{TL}{2} = 0 => T = mg$$

Η δοκός έχει όγκο $V = 20 \times 0.2 = 4\,m^3$ και από την πυκνότητά της $\rho = 2\,g/cm^3 = 2000\,kg/m^3$ μπορούμε να υπολογίσουμε την μάζα της $m = \rho V = 8000\,kg$. Επομένως

$$T = mg = 8000 \times 10 = 8 \times 10^4\,N$$

(γ) Εφόσον το σώμα ισορροπεί πρέπει το σύνολο των δυνάμεων προς οποιαδήποτε κατεύθυνση να είναι ίσο με το μηδέν:

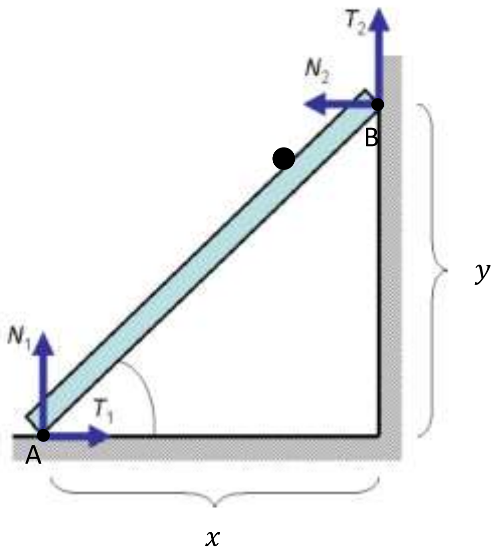
$$Tcos30^0 - N = 0 => N = \frac{\sqrt{3}T}{2} = 6.93 \times 10^4\,N$$

$$Tsin30^0 + f - mg = 0 => f = \frac{T}{2} = 4.00 \times 10^4\,N$$

Επομένως ο συντελεστής στατικής τριβής είναι ίσος με

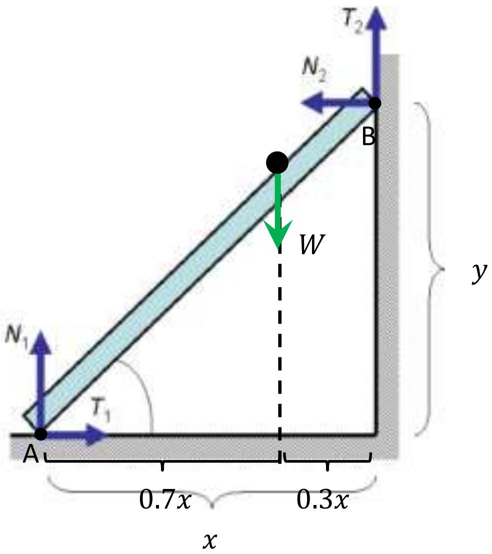
$$\mu_S = \frac{f}{N} = \frac{2T}{2\sqrt{3}T} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577$$

8.5 Στο παρακάτω σχήμα, μια σημειακή μάζα βάρους $200\ N$ έχει τοποθετηθεί στο 70% του μήκους μιας ομοιογενούς αβαρής δοκού (από τη βάση στήριξης Α) και το όλο σύστημα ισορροπεί. Εάν $x = 1.2\ m$ και $y = 6\ m$, να βρεθούν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό στα σημεία στήριξής της Α και Β.



<u>Απάντηση</u>: $7.69, 98.5, 101.5, 7.69\ N$

<u>Λύση</u>: Στη σημειακή μάζα δρα το βάρος της W (δείτε το παρακάτω σχήμα). Αφού η μάζα βρίσκεται σε απόσταση $0.7\ L$ από τη βάση της δοκού, όπου L το μήκος της, τότε από απλή αναλογία τριγώνων θα χωρίζει και το μήκος x σε ποσοστό 0.7 και 0.3.



Από τις συνθήκες ισορροπίας Εξ. 8.13 έχουμε:

Άξονας-x

$$\Sigma F_x = 0 => T_1 - N_2 = 0 => T_1 = N_2$$

Άξονας-y

$$\Sigma F_y = 0 => N_1 + T_2 - W = 0 => N_1 + T_2 = W$$

Ροπή ως προς το σημείο A: Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της ροπής Εξ. 8.12

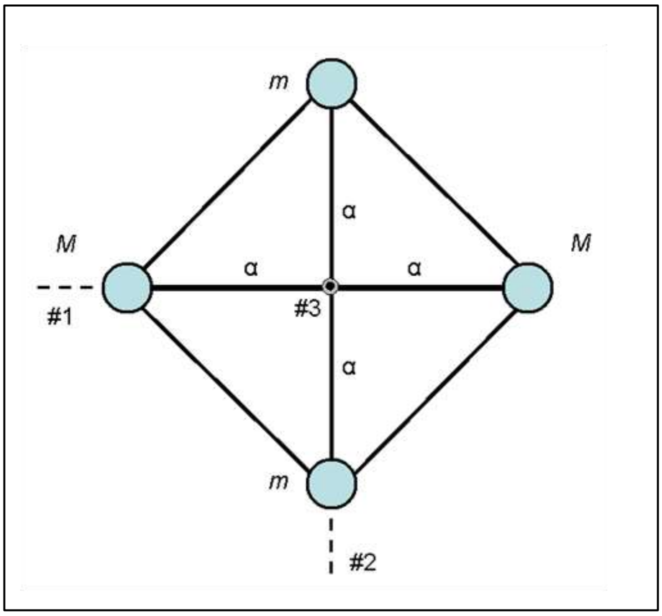
$$-0.7Wx + T_2x + N_2y = 0 => 1.2T_2 + 6N_2 = 168$$

Ροπή ως προς το σημείο B: Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της ροπής Εξ. 8.12

$$0.3Wx - N_1x + T_1y = 0 => 6T_1 - 1.2N_1 = -72$$

Οι παραπάνω τέσσερις εξισώσεις σχηματίζουν ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα με τέσσερις μεταβλητές τις άγνωστες δυνάμεις. Η λύση γίνεται με τη βοήθεια πινάκων και οριζουσών. Η τελική λύση είναι η $(T_1, N_1, T_2, N_2) = (7.69, 98.5, 101.5, 7.69)$ (όλες σε *Newtons*).

8.6 Στο παρακάτω σχήμα οι τέσσερις σημειακές μάζες, δυο $m = 2\ kg$ και δυο $M = 5\ kg$, είναι τοποθετημένες επάνω σε αβαρές πλαίσιο σχήματος τετραγώνου πλευράς $a = 1.2\ m$. Εάν I_1 , I_2 και I_3 είναι οι ροπές αδράνειας του παραπάνω συστήματος μαζών ως προς τους άξονες περιστροφής #1, #2 και #3 (ο τρίτος κάθετος στη σελίδα), να υπολογισθεί το γινόμενο $I_1I_2I_3$ σε μονάδες $S.I.$



Απάντηση: $4180\ kg \cdot m^2$

Λύση:

Η ροπή αδράνειας μιας σημειακής μάζας m είναι ίση με mr^2 όπου r είναι η απόσταση από τον άξονα περιστροφής. Έτσι για τους τρεις άξονες:

$$I_1 = 2 \times ma^2$$

$$I_2 = 2 \times Ma^2$$

$$I_3 = 2 \times (ma^2 + Ma^2)$$

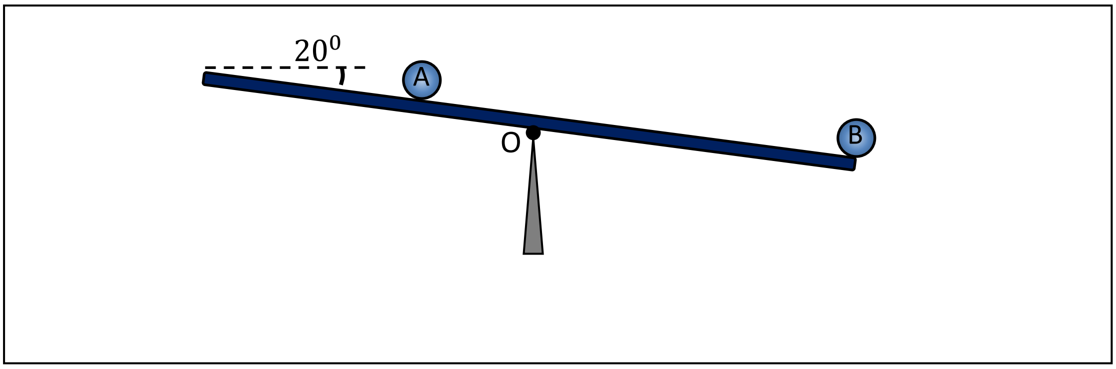
και

$$I_1 I_2 I_3 = 2^3 \alpha^6 mM(m + M)$$

Αντικαθιστώντας

$$I_1 I_2 I_3 = 8 \times 1.2^3 \times 2 \times 5 \times (2 + 5) = 4180\ kg \cdot m^2$$

8.7 Στο παρακάτω σχήμα οι δυο σημειακές $m_A = 35\ kg$ και $m_B = 25\ kg$ είναι στερεωμένες επάνω στη αβαρή δοκό και το όλο σύστημα δεν ισορροπεί περιστροφικά γύρω από το Ο. Εάν η δοκός αφήνεται αρχικά από την γωνία που φαίνεται στο σχήμα, να βρεθούν οι εξής αρχικές ποσότητες: (α) η γωνιακή επιτάχυνση του όλου συστήματος και (β) οι γραμμικές επιταχύνσεις των σημειακών μαζών. Πάρτε $g = 10\ m/s^2$ για ευκολία. Οι αποστάσεις των μαζών από το σημείο Ο κατά μήκος της ράβδου είναι $OA = 1.0\ m$ και $OB = 1.5\ m$

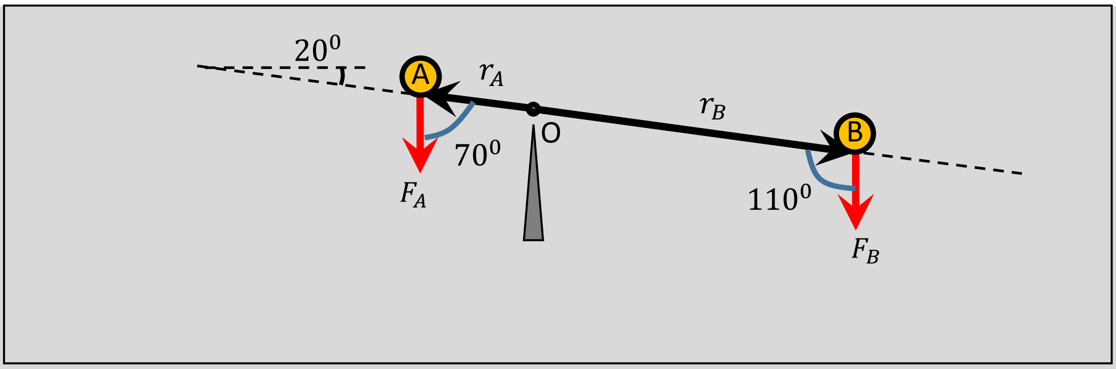


<u>Λύση</u>:

(α) Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, οι ροπές που ασκούνται στο σύστημα των δυο μαζών στην αρχική θέση είναι

$$\tau_A = F_A r_A sin70^0 = m_A g r_A sin70^0 = 35 \times 10 \times 1.0 \times sin70^0 = 329\ Nm$$

$$\tau_B = -F_B r_B sin110^0 = -m_B g r_B sin110^0 = -25 \times 10 \times 1.5 \times sin110^0 = -352\ Nm$$



Η δεύτερη ροπή είναι αρνητική επειδή τείνει να περιστρέψει την δοκό σύμφωνα με την φορά των δεικτών του ρολογιού. Η συνολική ροπή ισούται με

$$\Sigma\tau = \tau_A + \tau_B = 329 - 352 = -23.5\ Nm$$

Η ροπή αδράνειας ισούται με

$$I = m_A {r_A}^2 + m_B {r_B}^2 = 35 \times 1.0^2 + 25 \times 1.5^2 = 91.25\ kg \cdot m^2$$

Επομένως η αρχική γωνιακή επιτάχυνση ισούται με

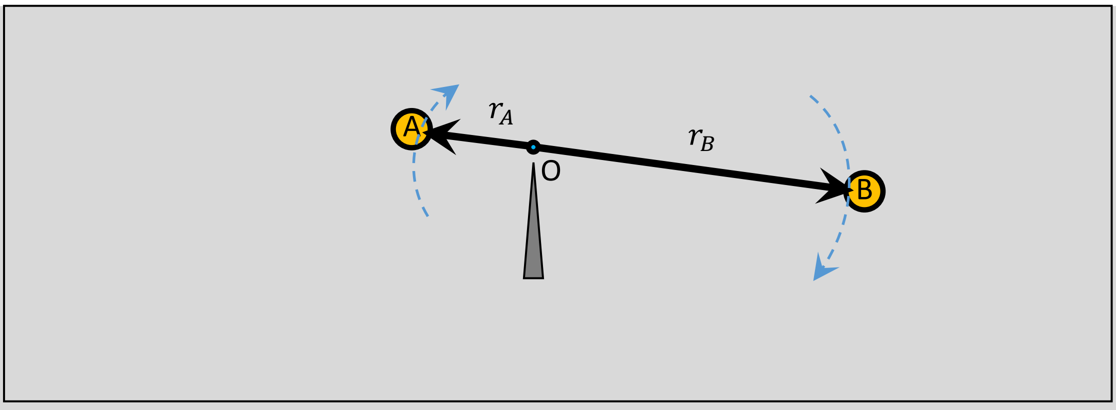
$$\alpha = \frac{\Sigma\tau}{I} = -\frac{23.5}{91.25} = -0.257\ rad/s^2$$

(β) Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, οι δυο μάζες εκτελούν κυκλική κίνηση με διαφορετικές ακτίνες r_A και r_B αλλά με κοινή γωνιακή ταχύτητα α. Οι επιταχύνσεις των δυο μαζών ισούνται με

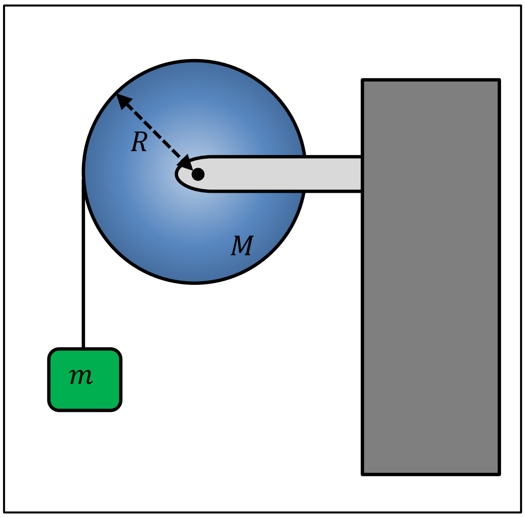
$$a_A = \alpha r_A = -0.257 \times 1.0 = -0.257\ m/s^2$$

$$a_B = \alpha r_B = -0.257 \times 1.5 = -0.386\ m/s^2$$

Προσέξτε ότι το αρνητικό πρόσημο δεν σημαίνει ότι οι δυο μάζες επιταχύνονται προς τα κάτω αλλά ότι επιταχύνονται σύμφωνα με την φορά των δεικτών του ρολογιού. Οι γραμμικές ποσότητες στην κυκλική κίνηση, ορίζονται και αυτές κατά μήκος της τροχιάς όπως και οι γωνιακές. Η μόνη τους διαφορά σε σχέση με τις αντίστοιχες γωνιακές είναι ότι οι μονάδες τους περιέχουν m αντί για rad.



8.8 Σώμα μάζας m προσδένεται στο άκρο νήματος, το άλλο άκρο του οποίου είναι τυλιγμένο σε τροχαλία μάζας M και ακτίνας R της οποίας το κέντρο είναι αναρτημένο από ακλόνητο σημείο. Η περιστροφή της τροχαλίας είναι ελεύθερη τριβών. Εάν το σώμα αφεθεί ελεύθερο να βρεθεί με τι επιτάχυνση πέφτει προς το έδαφος.

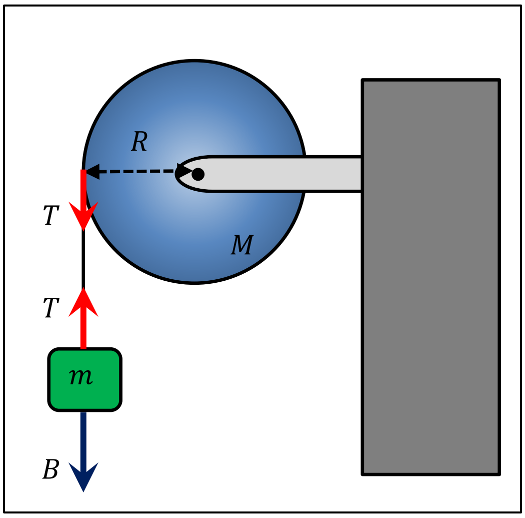


Απάντηση: $mg/(m + M/2)$

Λύση: Στο σώμα ασκείται το βάρος του $B = mg$ και η τάση του νήματος. Από τον 2^o νόμο του Νεύτωνα

$$mg - T = ma_y$$

όπου a_y είναι η κατακόρυφη επιτάχυνσή του.



Εκτός από την κατακόρυφη ευθύγραμμη κίνηση της m, έχουμε και την περιστροφική κίνηση της τροχαλίας. Στην τροχαλία ασκείται η τάση του νήματος T και κάποιες άγνωστες δυνάμεις στήριξης στο κέντρο της από τον τοίχο στήριξης. Σύμφωνα με την Εξ. 8.9, αυτές οι δυνάμεις δεν ασκούν ροπή στην τροχαλία αφού ο βραχίονάς τους r είναι ίσος με μηδέν. Επομένως μόνο η T ασκεί ροπή. Η ακτίνα R παίζει το ρόλο του βραχίονα και έτσι σύμφωνα με την Εξ. 8.9, η ροπή αυτή είναι ίση με

$$\tau = TR$$

Σύμφωνα με τον 2^{o} νόμο του Νεύτωνα για τις περιστροφές, αυτή η ροπή προκαλεί γωνιακή επιτάχυνση α στην τροχαλία

$$\tau = I\alpha$$

όπου I είναι η ροπή αδράνειας της τροχαλίας που από τον Πίνακα 8.1 ισούται με $I = MR^2/2$ (ροπή αδράνειας κυλίνδρου). Βάζοντάς τα όλα μαζί, μπορούμε να υπολογίσουμε το α:

$$TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha => \alpha = \frac{2T}{MR}$$

Όταν η τροχαλία περιστρέφεται μέσα σε χρόνο dt κατά μια στοιχειώδη γωνία $d\varphi$, τότε ένα σημείο στην περιφέρειά της μετακινείται γραμμικά σύμφωνα με την Εξ. 7.3 κατά ένα μήκος $ds = Rd\theta$. Επειδή όμως το νήμα της τροχαλίας εφάπτεται στην τροχαλία, τότε αυτό κατέρχεται κατά μήκος dy ίδιο ακριβώς με το ds και άρα η κατακόρυφη ταχύτητά του είναι ίση με

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{Rd\theta}{dt} = R\omega$$

όπου $\omega = d\theta/dt$ είναι σύμφωνα με την Εξ. 8.1 η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας. Παραγωγίζοντας την παραπάνω ακόμα μια φορά και κάνοντας χρήση της Εξ. 8.2 $\alpha = d\omega/dt$, οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$v_y' = R\omega' => a_y = R\alpha$$

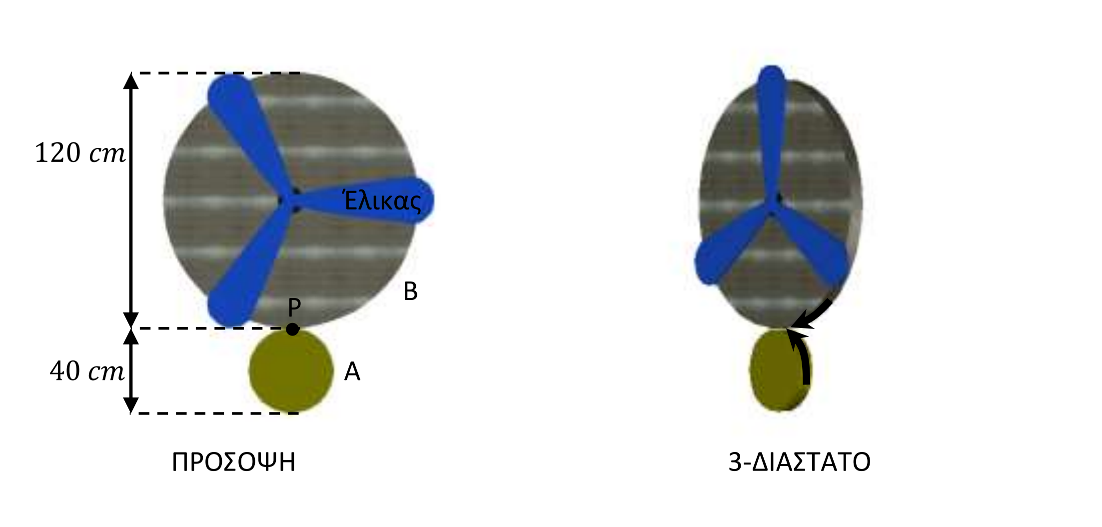
Αντικαθιστώντας το α που βρήκαμε παραπάνω οδηγεί στο

$$a_y = R\frac{2T}{MR} = \frac{2T}{M}$$

Απαλείφοντας το T μεταξύ αυτής της εξίσωσης και του 2ου νόμου του Νεύτωνα για την μάζα m, οδηγεί στο επιθυμητό αποτέλεσμα:

$$a_y = \frac{mg}{m + \frac{M}{2}}$$

8.9 Το παρακάτω σχήμα αποτελείται από δυο αβαρείς λεπτούς δίσκους A και B που μπορούν και περιστρέφονται ελεύθερα γύρω από τα κέντρα τους και που εφάπτονται μεταξύ τους στο σημείο P, ώστε όταν περιστρέφεται ο ένας, να παρασύρει τον άλλο χωρίς ολίσθηση. Στον πάνω δίσκο είναι στερεωμένος ένας βαρύς έλικας με ροπή αδρανείας $I = 75\,kg\,m^2$ ως προς το κέντρο της. Στο $t = 0$ εφαρμόζεται μια μεταβλητή ροπή $\tau = ct^2$ στον κάτω δίσκο όπου $c = 50\,Nm/s^2$ και ο χρόνος t σε sec. Εάν ο έλικας βρίσκεται σε ηρεμία την χρονική στιγμή $t = 0$, να βρεθεί η γωνιακή του ταχύτητα κατά την χρονική στιγμή $t = 3\,s$.

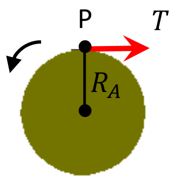


Απάντηση: $18\,rad/s$

Λύση: Ας εστιάσουμε πρώτα στον κάτω δίσκο και έστω η φορά περιστροφής του είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (θετική σύμφωνα με τη σύμβαση που συζητήσαμε στο βιβλίο) εξαιτίας της δεδομένης εξωτερικής ροπής τ. Λόγω της επαφής στο P, εμφανίζεται ένα ζεύγος δράσης αντίδρασης στους δυο δίσκους με δυνάμεις τριβής. Έτσι στον δίσκο A εμφανίζεται η τριβή T προς τα δεξιά ώστε να αντιτίθεται στην κίνηση του δίσκου. Εάν R_A είναι η ακτίνα του δίσκου, τότε η T ως εφαπτόμενη δύναμη είναι κάθετη σε αυτή και έτσι σύμφωνα με την Εξ. 8.10 δημιουργεί μια επιπλέον ροπή ίση με

$$\tau_A = -R_A T sin 90^0 = -R_A T$$

(αρνητική σύμφωνα με τη σύμβαση που συζητήσαμε στο βιβλίο).



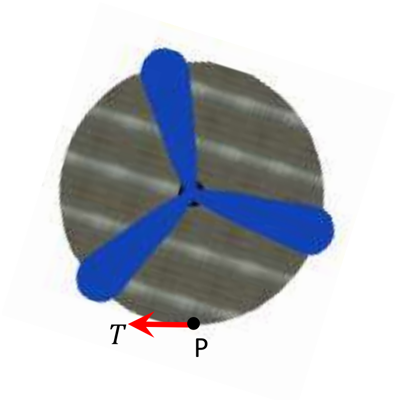
Η ροπή αδράνειας I_A του δίσκου είναι μηδέν αφού είναι αβαρής και έτσι ο $2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα για τις περιστροφές Εξ. 8.18 δίνει

$$\tau + \tau_A = I\alpha = 0 => -\tau_A = \tau => R_A T = \tau$$

δηλαδή

$$T = \frac{\tau}{R_A}$$

Λόγω δράσης – αντίδρασης, η ίδια τριβή T εφαρμόζεται και στον δίσκο Α, αλλά βέβαια με αντίθετη φορά.



Εάν R_B είναι η ακτίνα του δίσκου Β, τότε όπως και με τον δίσκο Α, η T δημιουργεί ροπή ίση με

$$\tau_B = R_B T sin 90^0 = R_B T = \tau \frac{R_B}{R_A}$$

(θετική σύμφωνα με τη σύμβαση που συζητήσαμε στο βιβλίο). Η ροπή αδράνειας I_B του δίσκου είναι μηδέν αφού είναι αβαρής αλλά υπάρχει η ροπή αδράνειας του έλικα που πρέπει να λάβουμε υπόψη. Έτσι ο $2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα για τις περιστροφές Εξ. 8.18, όταν εφαρμοστεί στο σύστημα δίσκος Β - έλικας δίνει

$$\tau = (I + 0)\alpha$$

όπου α η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος. Αντικαθιστώντας

$$\tau \frac{R_B}{R_A} = I\alpha => 50t^2 \frac{60}{20} = 75\alpha => \alpha = 2t^2$$

Σύμφωνα με την Εξ. 8.2 $\alpha = d\omega/dt$ ολοκληρώνουμε το α για να βρούμε το ω:

$$\omega = \frac{2}{3}t^3 + \omega_0$$

όπου η σταθερά ολοκλήρωσης ω_0 είναι η αρχική γωνιακή ταχύτητα η οποία από την εκφώνηση είναι ίση με μηδέν. Έτσι $\omega = 2t^3/3$ και κατά την χρονική στιγμή $t = 3\ s$

$$\omega = 18\ rad/s$$

8.10 Πως θα άλλαζε η απάντησή σας στο προηγούμενο πρόβλημα εάν ο κάτω δίσκος δεν ήταν αβαρής αλλά είχε μάζα $M_A = 50\ kg$ (η μάζα του πάνω δίσκου μπορεί να θεωρηθεί ότι συμπεριλαμβάνεται στην δεδομένη ροπή αδράνειας του έλικα);

<u>Απάντηση</u>: $16\ rad/s$

<u>Λύση</u>: Εφόσον ο δίσκος Α έχει μάζα, τότε θα έχει και ροπή αδράνειας

$$I_A = \frac{1}{2}M_A {R_A}^2 = \frac{1}{2}50(0.2)^2 = 1\ kg \cdot m^2$$

και έτσι ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα για τις περιστροφές Εξ. 8.18 δίνει

$$\tau + \tau_A = I_A \alpha_A => -\tau_A = \tau - I_A \alpha_A$$

όπου α_A είναι η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου Α. Λόγω της επαφής τους, οι δυο δίσκοι έχουν κατά μέτρο την ίδια γραμμική ταχύτητα $v_A = v_B$ στο σημείο P. Από την Εξ. 8.3, αυτό σημαίνει για τις γωνιακές τους ταχύτητες ω_A και ω_B ότι

$$\omega_A R_A = R_B \omega_B => \omega_A = \frac{R_B}{R_A}\omega_B$$

Με παραγώγιση και την Εξ. 8.2 παίρνουμε

$$\alpha_A = \frac{R_B}{R_A}\alpha_B$$

όπου α_A και α_B οι αντίστοιχες γωνιακές επιταχύνσεις. Επομένως ο παραπάνω νόμος του Νεύτωνα γίνεται

$$-\tau_A = \tau - I_A \frac{R_B}{R_A}\alpha_B$$

η οποία με την $\tau_A = -R_A T$ οδηγεί στο

$$R_A T = \tau - I_A \frac{R_B}{R_A}\alpha_B => T = \frac{\tau}{R_A} - I_A \frac{R_B}{{R_A}^2}\alpha_B$$

Όπως είδαμε στο προηγούμενο πρόβλημα, η T δημιουργεί ροπή στον πάνω σύστημα έλικα-δίσκου Β ίση με

$$\tau_B = TR_B = \tau \frac{R_B}{R_A} - I_A \frac{{R_B}^2}{{R_A}^2} \alpha_B$$

και έτσι ο 2ος νόμος του Νεύτωνα για τις περιστροφές για αυτό το σύστημα δίνει

$$\tau_B = I\alpha_B$$

όπου α_B η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος. Αντικαθιστώντας όλα τα παραπάνω

$$\tau \frac{R_B}{R_A} - I_A \frac{{R_B}^2}{{R_A}^2} \alpha_B = I\alpha_B => 50t^2 \frac{60}{20} - 1\left(\frac{60}{20}\right)^2 \alpha_B = 75\alpha_B$$

Λύνοντας

$$\alpha_B = 1.785t^2$$

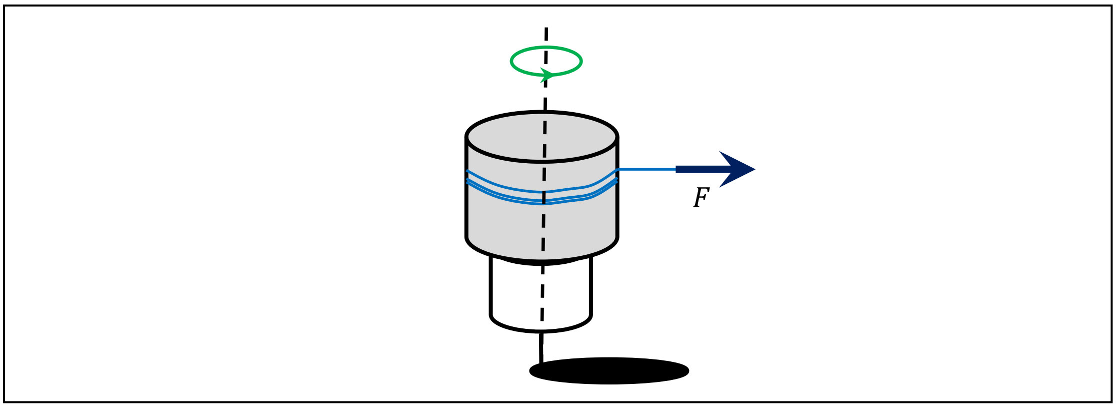
Σύμφωνα με την Εξ. 8.2 ολοκληρώνουμε το α_B για να βρούμε το ω_B:

$$\omega_B = \ 0.595t^3 + \omega_0$$

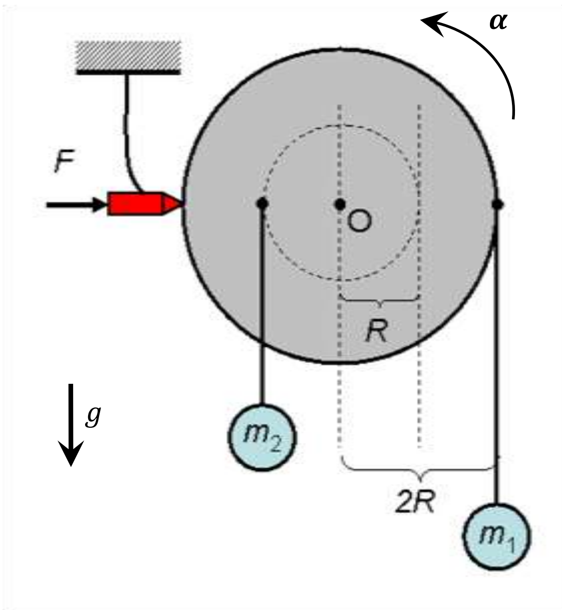
όπου η σταθερά ολοκλήρωσης ω_0 είναι η αρχική γωνιακή ταχύτητα η οποία από την εκφώνηση είναι ίση με μηδέν. Έτσι $\omega_B = \ 0.595t^3$ και κατά την χρονική στιγμή $t \ = \ 3 \ s$

$$\omega_B = 16 \, rad/s$$

8.11 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια αυτοσχέδια σβούρα που κατασκεύασε ένας φοιτητής κολλώντας δυο συμπαγείς κυλίνδρους, τον πάνω μάζας 400 γραμμαρίων και διαμέτρου 2.8 εκατοστών και τον κάτω μάζας 150 γραμμαρίων και διαμέτρου 2.2 εκατοστών επάνω σε λεπτό καρφί. Και οι δυο κύλινδροι έχουν το ίδιο ύψος $1 \ cm$. Με την βοήθεια ενός νήματος που είναι τυλιγμένο γύρο από τον πάνω κύλινδρο, ο φοιτητής εφαρμόζει μια δύναμη $3.2 \ N$ για περίπου 2.5 δευτερόλεπτα. Να βρεθούν:
(α) Η τελική γωνιακή ταχύτητα της σβούρας εάν ξεκινάει από την ηρεμία και
(β) ο συνολικός αριθμός των περιστροφών που εκτελεί η σβούρα μέσα σε αυτό το διάστημα των 2.5 δευτερολέπτων.



8.12 Στο παρακάτω σχήμα εφαρμόζεται μια σταθερή δύναμη $F = 20\ N$ επάνω στη σφήνα και οι δυο μάζες $m_1 = 2\ kg$ και $m_2 = 0.5\ kg$ αναρτιούνται μέσω ιδανικού νήματος από τον δίσκο ο οποίος έχει ακτίνα $R = 1.2\ m$ (ο δίσκος είναι μονός, απλά η μια μάζα αναρτάται σε σημείο με μικρότερη ακτίνα από την άλλη μάζα). Το όλο σύστημα περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από το σημείο Ο με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha = 1.5\ rad/s^2$ με τη φορά που σημειώνεται στο σχήμα (όχι αναγκαστικά σταθερή) και υπάρχει βαρύτητα $g = 10\ m/s^2$ προς τα κάτω. Εάν ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ σφήνας και τροχού είναι $\mu = 0.4$, να βρεθεί η συνιστάμενη ροπή που ασκείται στον τροχό.



Απάντηση: $-80.64\ N \cdot m$

Λύση:

Στον τροχό ασκούνται τρεις ροπές, μια από τη σφήνα και δυο από τις τάσεις του νήματος, έστω T_1 και T_2 (για τις μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα) τις οποίες πρέπει να υπολογίζουμε. Εστιάζουμε κατ' αρχάς στην m_1 στην οποία ασκούνται το βάρος της $B_1 = m_1 g$ και η τάση του νήματος T_1. Λόγω της γωνιακής επιτάχυνσης του τροχού, η μάζα αυτή έχει γραμμική επιτάχυνση που ίση με $a_1 = 2R\alpha = 3.6\ m/s^2$ προς τα πάνω. Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα τότε οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$T_1 - m_1 g = m_1 a_1 => T_1 = m_1(g + a_1) = 2(10 + 3.6) = 27.2\ N$$

Παρομοίως η μάζα m_2 έχει γραμμική επιτάχυνση ίση με $a_2 = R\alpha = 1.8\ m/s^2$ (προσοχή στην ακτίνα) προς τα κάτω και δρουν σε αυτήν το βάρος της $m_2 g$ και η τάση του νήματος T_2. Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα τότε οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$-T_2 + m_2 g = m_2 a_1 => T_2 = m_2(g - a_2) = 0.5(10 - 3.6) = 3.2\ N$$

Η δύναμη της τριβής ολίσθησης από τη σφήνα στον τροχό είναι ίση με

$$T = \mu F = 0.4 \times 20 = 8\ N$$

Και οι τρεις δυνάμεις είναι κάθετες στην ακτίνα του δίσκου και άρα στον τύπο της ροπής δεν υπάρχει εξάρτηση από την γωνία αφού $sin90^0 = 1$. Οι T_1 και T δρούνε με βραχίονα $2R$ ενώ η T_2 με βραχίονα R. Λαμβάνοντας υπόψη τη συμβατική φορά περιστροφής (αρνητική η φορά των δεικτών του ρολογιού) βλέπουμε ότι οι T_1 και T δημιουργούν αρνητική ροπή ενώ η T_2 δημιουργεί θετική ροπή. Έτσι οι τρεις ροπές που δρουν στον τροχό είναι οι εξής:

$$\tau_1 = -T_1 2R = -27.2 \times 2 \times 1.2 = -65.28\ N \cdot m$$

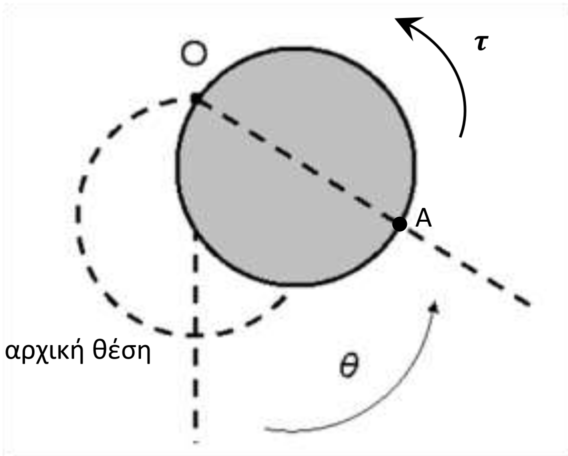
$$\tau_2 = T_2 R = 3.2 \times 1.2 = \ 3.84\ N \cdot m$$

$$\tau_3 = -2TR = -8 \times 2 \times 1.2 = -\ 19.2\ N \cdot m$$

Επομένως η συνιστάμενη ροπή είναι ίση με

$$\tau = -65.28 + 3.84 - 19.2 = \ -80.64\ N \cdot m$$

8.13 Στο παρακάτω σχήμα ο λεπτός δίσκος μάζας $M = 2\ kg$ και ακτίνας $R = 1.2\ m$ βρίσκεται επάνω σε δάπεδο και μπορεί και περιστρέφεται ελεύθερα χωρίς τριβές γύρω από σταθερό σημείο Ο που βρίσκεται στην περιφέρειά του. Στο $t = 0$ και ενώ ο δίσκος ηρεμεί στην αρχική του θέση που φαίνεται στο σχήμα, εφαρμόζεται μια σταθερή ροπή $\tau = 1.5\ N \cdot m$ επάνω στο δίσκο γύρω από το Ο. (α) Να βρεθεί η γωνία θ κατά τη χρονική στιγμή $t = 5\ s$. (β) Να γίνει το ίδιο εάν στο σημείο Α εφαρμόζεται επιπλέον και μια δύναμη τριβής από το δάπεδο ίση με $0.025\ N$.



Απάντηση: (α) $4.34\ rad$, (β) $2.60\ rad$

Λύση:

Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς το κέντρο μάζας του είναι ίση με

$$I_{KM} = \frac{1}{2}MR^2 = 1.44\ kg \cdot m^2$$

Επειδή όμως ο άξονας περιστροφής είναι μετατοπισμένος κατά R από το κέντρο μάζας του δίσκου, πρέπει να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Steiner για να βρούμε την ροπή αδράνειας ως προς το Ο:

$$I = I_{KM} + MR^2 = 4.32\ kg \cdot m^2$$

Από το νόμο του Νεύτωνα στην περιστροφική κίνηση, λύνουμε ως προς τη γωνιακή επιτάχυνση

$$\tau = I\alpha => \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{1.5}{4.32} = 0.3472\ rad/s^2$$

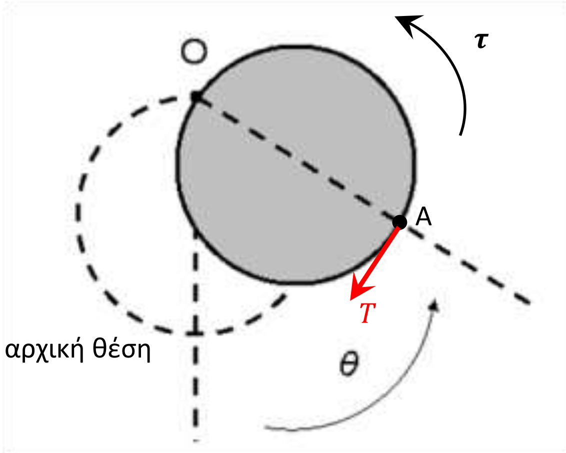
Αφού το α είναι σταθερό, μπορούμε να εφαρμόσουμε τις εξισώσεις της ομαλά επιταχυνόμενης περιστροφικής κίνησης:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Ο δίσκος εκκινεί από ηρεμία και άρα $\omega_0 = 0$. Επίσης η γωνία μετράει από την αρχική θέση του δίσκου και έτσι $\theta_0 = 0$. Επομένως

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 = 4.34\ rad$$

(β) Όπως και παραπάνω αλλά τώρα πρέπει να αφαιρέσουμε και το έργο της τριβής T η οποία δρα κάθετα στον άξονα ΟΑ όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



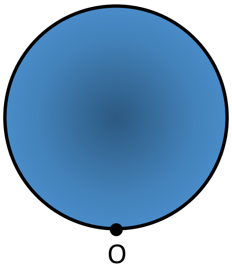
Η αντίστοιχη ροπή είναι ίση με $\tau_T = -T(2R) = -0.25 \times 2.4 = -0.6\ N \cdot m$. Ο νόμος του Νεύτωνα γίνεται

$$\Sigma\tau = I\alpha => \tau - \tau_T = I\alpha => \alpha = \frac{\tau - \tau_T}{I} = \frac{1.5 - 0.6}{4.32} = 0.208\ rad/s^2$$

Όπως και προηγουμένως

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 = 2.60\ rad$$

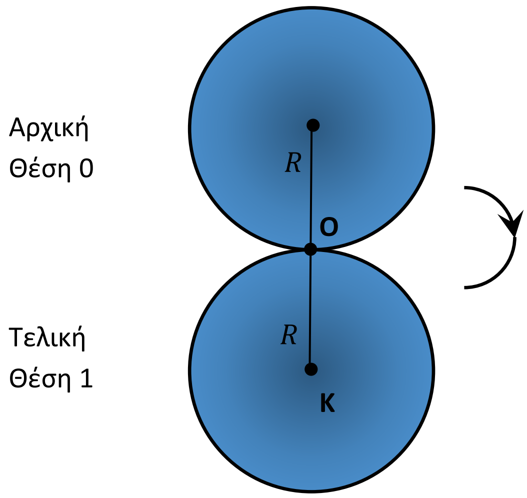
8.14 Ομογενής λεπτός δίσκος ακτίνας $R = 1/3\ m$ και μάζας $M = 5\ kg$ τοποθετείται κατακόρυφα (με το επίπεδό του να τέμνει κάθετα τη γη) και μπορεί και περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από οριζόντιο άξονα που περνάει από το χαμηλότερο σημείο του Ο και κάθετα προς το επίπεδό του. Ο δίσκος ωθείται κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού με (αρχική) γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = 10\ rad/s$. (α) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου όταν διέρχεται από το χαμηλότερο σημείο της τροχιάς του. (β) Να γίνει το ίδιο όταν υφίσταται στον άξονα αιώρησης επιβραδύνουσα ροπή ίση με $15\ Nm$ (Δίδεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονά του $I = 1/2MR^2$). Πάρτε $g \approx 10\ m/s^2$ για ευκολία.



Απάντηση: (α) $13.4\, rad/s$ (β) $8.4\, rad/s$

Λύση:

(α) Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας έχουμε $K_0 + U_0 = K_1 + U_1$ όπου $K = 1/2 I\omega^2$ η κινητική ενέργεια και $U = Mgh$ η δυναμική ενέργεια σε ύψος h από κάποιο σημείο αναφοράς. Διαλέγω αυτό το σημείο να είναι το Κ, το κέντρο μάζας του δίσκου στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς του. Έτσι $h_1 = 0$ και $h_0 = 2R$.



Η ροπή αδράνειας του δίσκου πρέπει να υπολογισθεί σε σχέση με το σημείο Ο. Από το θεώρημα των παράλληλων αξόνων (Steiner) έχουμε

$$I = I_{KM} + md^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

όπου I_{KM} η ροπή αδράν

ειας ως προς το κέντρο μάζας του δίσκου και $d = R$ η απόσταση ΚΟ του κέντρου μάζας από το σημείο περιστροφής. Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας έχουμε

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2\right){\omega_0}^2 + 2MgR = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2\right){\omega_1}^2 + 0 => 3R{\omega_0}^2 + 8g = 3R{\omega_1}^2$$

Λύνοντας ως προς ω_1

$$\omega_1 = \sqrt{{\omega_0}^2 + \frac{8g}{3R}} = 13.4\, rad/s$$

(β) Τώρα ασκείται μια επιβραδύνουσα ροπή $\tau = -15\ Nm$ στο σημείο Ο και πρέπει να την συμπεριλάβουμε στην αρχή διατήρησης της ενέργειας. Θεωρούμε ως θετική τη φορά της κίνησης (των δεικτών του ρολογιού, αντίθετα με τη συνήθη σύμβαση) και έτσι η ροπή αφού αντιτίθεται είναι αρνητική. Αφού γενικά οι τριβές δεν είναι συντηρητικές δυνάμεις δεν προέρχονται από κάποιο δυναμικό και έτσι πρέπει να καταφύγουμε στον ορισμό του έργου ο οποίος στην περιστροφική κίνηση δίνεται από την Εξ. 8.20 ως

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta$$

Αφού η ροπή είναι σταθερή μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος. Η συνολική γωνία περιστροφής είναι 180^0 και έτσι

$$W = \tau \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \tau(\theta_2 - \theta_1) = \pi\tau = -15 \times 3.14 = 47.1\, Joules$$

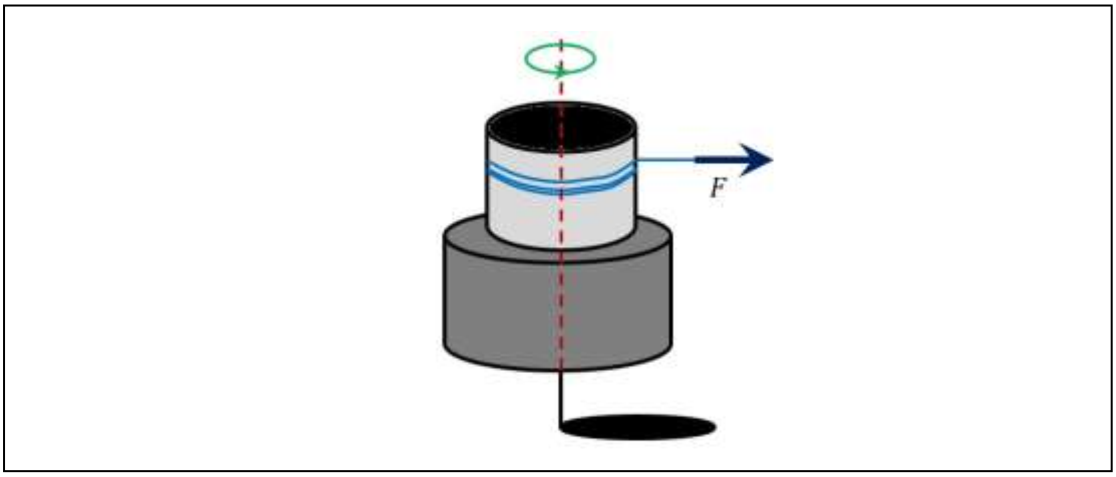
Από την Α.Δ.Μ.Ε. με συντηρητικές και μη συντηρητικές δυνάμεις Εξ. 6.16 έχουμε $K_0 + U_0 + W = K_1 + U_1$. Αντικαθιστώντας

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2\right){\omega_0}^2 + \pi\tau + 2MgR += \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2\right){\omega_1}^2 + 0 => 3R{\omega_0}^2 + 8g = 3R{\omega_1}^2$$

και τελικώς

$$\omega_1 = \sqrt{{\omega_0}^2 + \frac{8g}{3R} + \frac{4\pi\tau}{3MR^2}} = 8.4\, rad/s$$

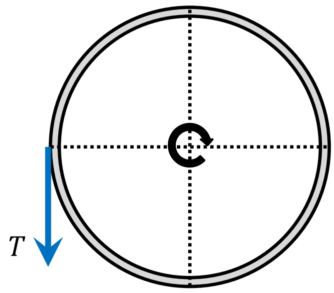
8.15 Έστω ότι στο Πρόβλημα 8.11 ο πάνω κύλινδρος έχει το σχήμα λεπτότοιχου σωλήνα με μάζα 500 γραμμαρίων και διαμέτρου 2 εκατοστών ενώ ο κάτω παραμένει συμπαγής με μάζα 4 κιλών και διαμέτρου 4 εκατοστών (μεγαλύτερη από ότι του πάνω κυλίνδρου, δείτε παρακάτω σχήμα). Έστω επίσης ότι οι δυο κύλινδροι δεν είναι κολλημένοι μεταξύ τους αλλά ότι αλληλεπιδρούν με τριβή ολίσθησης με συντελεστή $\mu = 0.4$. Όπως και στο Πρόβλημα 8.11, ο κάτω κύλινδρος έχει ενσωματωμένο λεπτό καρφί κατά μήκος του άξονά του το οποίο προεξέχει από κάτω ώστε να αγγίζει κάθετα το λείο έδαφος και να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από αυτό. Και οι δυο κύλινδροι έχουν το ίδιο ύψος 1 cm. Με την βοήθεια ενός νήματος που είναι τυλιγμένο γύρο από τον πάνω κύλινδρο, ο φοιτητής εφαρμόζει μια δύναμη 5 N για περίπου 2.5 δευτερόλεπτα. Να βρεθεί η τελική γωνιακή ταχύτητα και των δυο κυλίνδρων εάν ξεκινούν και οι δυο από την ηρεμία. Πάρτε $g \approx 10\ m/s^2$ για ευκολία.



Λύση:

Στον πάνω κύλινδρο ασκούνται δυο ροπές, η $\tau_F = FR = 5 \times 0.01 = 0.05\ N$ λόγω της εξωτερικής δύναμης F όπου R είναι η ακτίνα του κυλίνδρου και η ροπή έστω τ_T λόγω τριβής μεταξύ των δυο σωμάτων. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια κάτοψη του πάνω κυλίνδρου (του σωλήνα) στην επιφάνεια επαφής. Εάν η φορά περιστροφής είναι αυτή που δείχνεται με κυκλικό βέλος, τότε η τριβή θα αντιτίθεται και θα βρίσκεται παντού κατά μήκος της περιφέρειας. Η τριβή είναι ίση με $T = \mu B$ όπου $B = mg = 0.5 \times 10 = 5\ N$ το βάρος του σωλήνα και έτσι $T = 2\ N$. Η τριβή δρα κάθετα στην ακτίνα R του σωλήνα και έτσι η ροπή της είναι ίση με

$$\tau_T = TR = 2 \times 0.01 = 0.02\ N \cdot m$$



Βέβαια η τριβή είναι κατανεμημένη ολόγυρα επάνω στην περιφέρεια του σωλήνα που εφάπτεται στον κάτω κύλινδρο αλλά το αποτέλεσμα δεν αλλάζει. Εάν π.χ. "τεμαχίζαμε" την περιφέρεια σε 360 ίσα τόξα, με το καθένα να αντιστοιχεί σε γωνία μιας μοίρας, τότε και το βάρος B του σωλήνα θα ήταν κατανεμημένο και σε κάθε τόξο θα του αναλογούσε βάρος ίσο με $B/360$ και άρα αντιστοίχως και η τριβή T θα ήταν μοιρασμένη με τμήματα $T/360$ σε κάθε τόξο αλλά και η ροπή. Αθροίζοντας σε όλα τα 360 τόξα, θα ήταν σαν να είχαμε μια τριβή ίση με T με ροπή τ_T που δίνεται από το παραπάνω αποτέλεσμα. Ο δεύτερος νόμος για την περιστροφή για τον σωλήνα, οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\tau_F - \tau_T = I\alpha$$

όπου $I = mR^2$ η ροπή αδράνειας σωλήνα που είναι ίση με $I = 0.5 \times (0.01)^2 = 5 \times 10^{-5}$ S.I. Λύνοντας, παίρνουμε για την γωνιακή επιτάχυνση

$$\alpha = \frac{(5-2) \times 10^{-2}}{5 \times 10^{-5}} = 600\, rad/s^2$$

Αντίστοιχα, στο κάτω κύλινδρο δρα μόνο η ροπή της τριβής (οι δυνάμεις δράσης-αντίδρασης της τριβής, δημιουργούν ίσες και αντίθετες ροπές) και έτσι ο δεύτερος νόμος για την περιστροφή οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\tau_T = I'\alpha'$$

όπου $I' = 1/2m'R'^2$ η ροπή αδράνειας σωλήνα που είναι ίση με

$$I = \frac{1}{2} 4 \times (0.02)^2 = 8 \times 10^{-4}\, S.I.$$

Λύνοντας, παίρνουμε για την γωνιακή επιτάχυνση

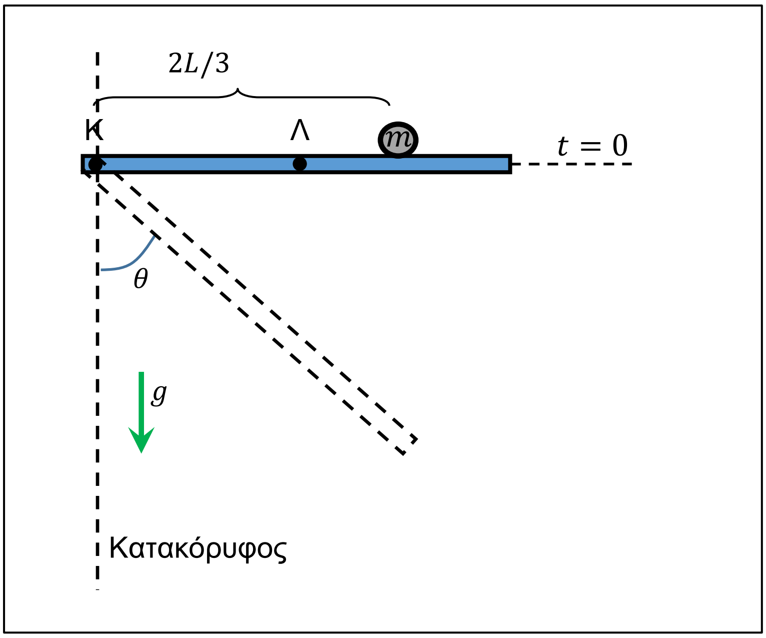
$$\alpha' = \frac{2 \times 10^{-2}}{8 \times 10^{-4}} = 25\, rad/s^2$$

Αφού και τα δυο σώματα ξεκινούν από την ηρεμία και έχουν σταθερές γωνιακές επιταχύνσεις, τότε οι τελικές τους γωνιακές ταχύτητες θα δίνονται από τις

$$\omega = \alpha t = 600 \times 2.5 = 1500\, rad/s$$

$$\omega' = \alpha' t = 25 \times 2.5 = 62.5\, rad/s$$

8.16 Επάνω σε οριζόντια <u>αβαρή</u> λεπτή δοκό μήκους L, έχει στερεωθεί ακλόνητα σημειακή μάζα στα $2/3$ του μήκους της. Η δοκός μπορεί και περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από το ένα της άκρο με τη βοήθεια καρφιού Κ που είναι στερεωμένο σε κατακόρυφο τοίχο. Στο μέσο της ράβδου υπάρχει και δεύτερο καρφί Λ στερεωμένο σε αυτή, το οποίο εφάπτεται στον τοίχο και προκαλεί τριβή, το μέτρο της οποίας δίνεται από την έκφραση $T = T_0 cos\theta$, όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την κατακόρυφο και T_0 μια σταθερά σε N. Η ράβδος κρατιέται αρχικά οριζόντια σε γωνία $\theta = \pi/2$ και στο $t = 0$ αφήνεται ελεύθερη να εκτελέσει περιστροφή υπό την επίδραση της βαρύτητας και σε κάποιο χρόνο t_1 φτάνει στην κατακόρυφη θέση $\theta = 0$ (συνεχίζεται η κίνηση εκεί). Να βρεθούν (α) Η ροπή του βάρους σε τυχαία γωνία θ, (β) το έργο της τριβής του καρφιού Λ για την μετακίνηση $\theta = \pi/2 \rightarrow 0$, (γ) η γραμμική ταχύτητα του σημείου Λ της ράβδου στην τελική θέση $\theta = 0$.

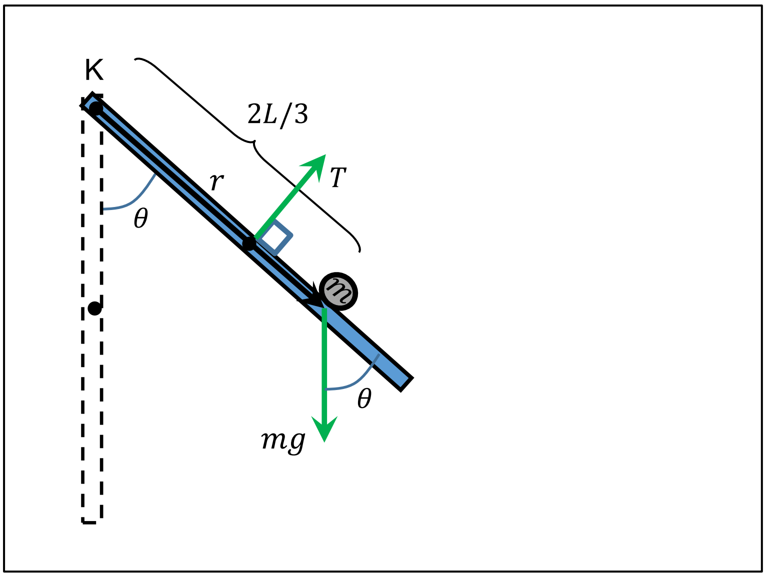


Λύση:

(α) Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, η δύναμη του βάρος $F = mg$ δρα κατακόρυφα στη σημειακή μάζα m. Ο βραχίονας r είναι από το καρφί Κ ως τη μάζα m, απόσταση δηλαδή ίση με $2L/3$. Επομένως η ροπή σε τυχαία γωνία θ ισούται με

$$\tau_B = -Frsin\theta = -mg\frac{2L}{3}sin\theta$$

Το αρνητικό πρόσημο έχει να κάνει με την φορά περιστροφής της ράβδου (σύμφωνη με τη φορά των δεικτών του ρολογιού).



(β) Όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα, η δύναμη της τριβής $T = T_0 cos\theta$ δρα κάθετα στη ράβδο. Ο βραχίονάς της r είναι από το καρφί Κ έως το μέσο της ράβδου, απόσταση δηλαδή ίση με $L/2$. Επομένως η αντίστοιχη ροπή της σε τυχαία γωνία θ ισούται με

$$\tau_T = Trsin90^0 = T_0 \frac{L}{2} cos\theta$$

Το θετικό πρόσημο έχει να κάνει με την φορά περιστροφής της ράβδου (αντίθετη με τη φορά των δεικτών του ρολογιού). Το έργο στην περιστροφική κίνηση δίνεται από την έκφραση

$$W_T = \int_{\theta=\pi/2}^{0} \tau_T d\theta = T_0 \frac{L}{2} \int_{\theta=\pi/2}^{0} cos\theta d\theta = -\frac{T_0 L}{2}$$

Το αρνητικό πρόσημο είναι αναμενόμενο καθώς πρόκειται για δύναμη τριβής.

(γ) Από το θεώρημα έργου-ενέργειας έχουμε για την διαφορά της κινητικής ενέργειας $K - K_0$ (τελική στο $\theta = 0$ μείον την αρχική K_0 στο $\theta = \pi/2$) το εξής

$$K - K_0 = W_B + W_T$$

όπου W_B είναι το έργο του βάρους και $K_0 = 0$ αφού η ράβδος εκκινεί από την ηρεμία. Το βάρος είναι συντηρητική δύναμη και έτσι ισούται με μείον την διαφορά της δυναμικής ενέργειας. Αφού η m κινήθηκε κατακόρυφα κατά απόσταση $2L/3$, τότε

$$W_B = \frac{2mgL}{3}$$

Η κίνηση της μάζας μπορεί να θεωρηθεί μεταφορική καθότι είναι κυκλική και έτσι η τελική κινητική της ενέργεια ισούται με

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

Συλλέγοντας όλα τα παραπάνω, οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\frac{1}{2} m v^2 - 0 = \frac{2mgL}{3} - \frac{T_0 L}{2}$$

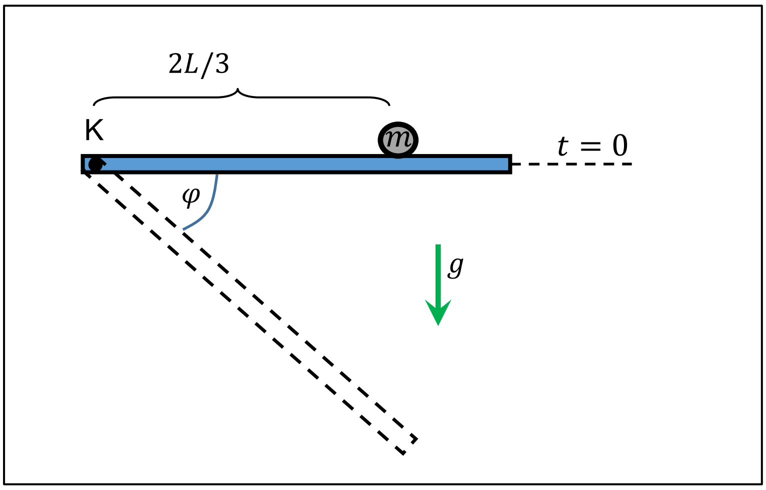
από όπου προκύπτει ότι

$$v = \sqrt{\left(\frac{4g}{3} - \frac{T_0}{m}\right) L}$$

Αφού το Λ και η m έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα, τότε η αντίστοιχη γραμμική ταχύτητα του Λ θα ισούται με

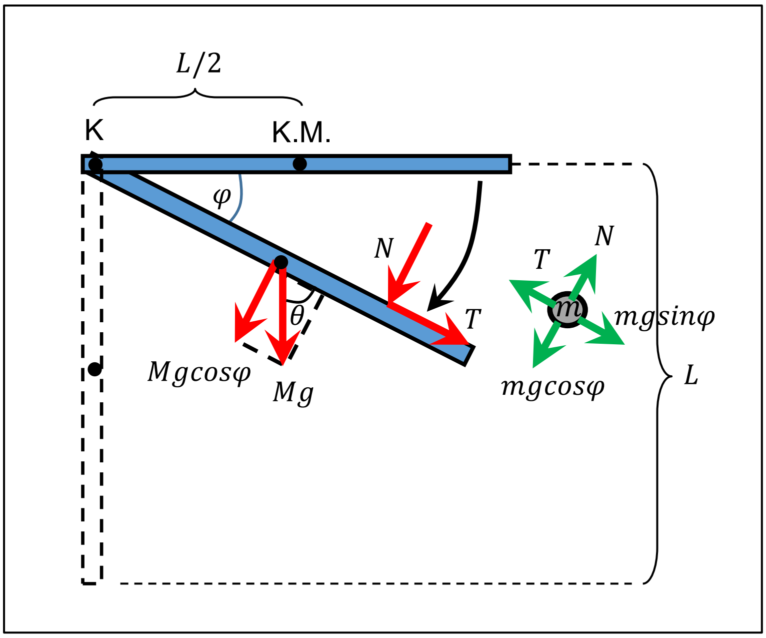
$$v_\Lambda = \omega r_\Lambda = \frac{v}{r_m} r_\Lambda = v \frac{L/2}{2L/3} = \frac{3}{4} v = \frac{3}{4} \sqrt{\left(\frac{4g}{3} - \frac{T_0}{m}\right) L}$$

8.17. Επάνω σε οριζόντια λεπτή δοκό μήκους L και μάζας M, έχει τοποθετηθεί σημειακή μάζα m στα $2/3$ του μήκους της. Η δοκός μπορεί και περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από το ένα της άκρο με τη βοήθεια καρφιού Κ που είναι αναρτημένο σε κατακόρυφο τοίχο. Η ράβδος κρατιέται αρχικά οριζόντια και στο χρόνο $t = 0$ αφήνεται ελεύθερη να εκτελέσει περιστροφή υπό την επίδραση της βαρύτητας. Λόγω της στατικής τριβής μεταξύ των δυο μαζών, η μάζα m παραμένει προσκολλημένη στη ράβδο ακόμα και για μεγάλες γωνίες και ολισθαίνει οριακά μόνο για $\varphi > 60^0$. Απαντήστε για $\varphi \leq 60^0$ τα εξής: (α) Σχεδιάστε όλες τις δυνάμεις που δρουν στην μάζα m καθώς και στην δοκό σε τυχαία γωνία φ. (β) Γράψτε ξεχωριστά τον 2ο νόμο του Νεύτωνα τόσο για τη σημειακή μάζα όσο και για τη ράβδο. (γ) Εάν $M = m/3$, να βρεθεί η τριβή όταν η γωνία φ είναι ίση με 30^0(μονάδες 2, 3, 5)



Λύση:

(α) Οι δυνάμεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα



(β) Σε ότι ακολουθεί, ορίζουμε ως $R_1 = L/2$ την ακτίνα του Κ.Μ. της ράβδου και ως $R_2 = 2L/3$ την ακτίνα της μάζας m. Από τον 2[ος] νόμο του Νεύτωνα, παίρνουμε για την μάζα m

Οριζόντιες: τριβή μείον συνιστώσα του βάρους, ίση με κεντρομόλο

$$T - mgsin\varphi = \frac{mv^2}{R_1} = mR_1\omega^2$$

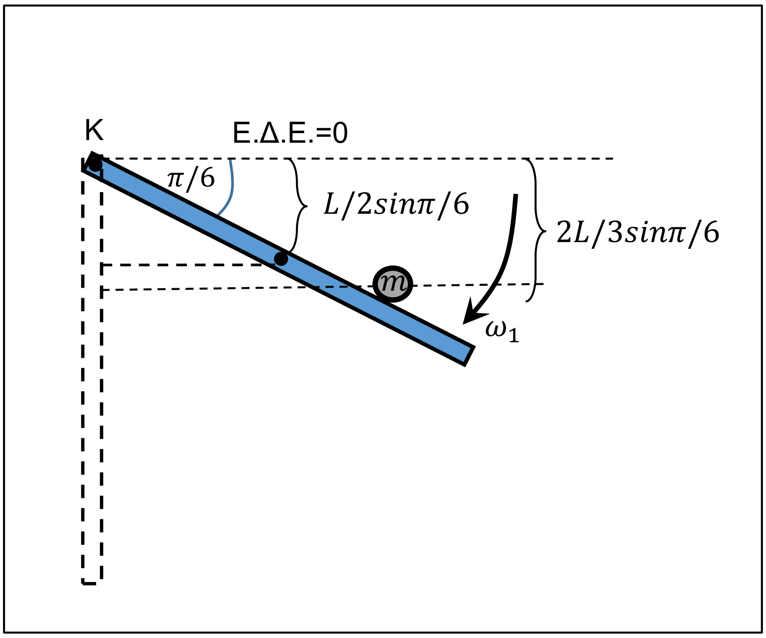
Κάθετες: η κάθετος από τη ράβδο συν συνιστώσα βάρους

$$mgcos\varphi - N = ma => N = mgcos\varphi - mR_1\alpha$$

(ορίζουμε την προς τα κάτω ως θετική φορά για ευκολία). Ροπή στη ράβδο (βάρος στη μέση και κάθετη αντίδραση από την m):

$$Mgcos\varphi R_2 + NR_1 = I\alpha$$

(γ) Από το παραπάνω ερώτημα, φαίνεται πως η τριβή εξαρτάται από την ταχύτητα v και ο ευκολώτερος τρόπος για να τη βρούμε, είναι το Θεώρημα της Διατήρησης της Ενέργειας. Διαλέγουμε ως επίπεδο δυναμικής ενέργειας (Ε.Δ.Ε.) την αρχική οριζόντια θέση της ράβδου



Στο σύστημα ράβδου-σημειακής μάζας, δρα μόνο το βάρος το οποίο είναι συντηρητική δύναμη και έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή της διατήρησης της ενέργειας με την βοήθεια της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας: Στην αρχική θέση έχουμε τόσο μηδενική κινητική ενέργεια, όσο και μηδενική δυναμική (σύμφωνα με τον τρόπο που επιλέξαμε το Ε.Δ.Ε.). Στην τελική θέση, εκτός από την δυναμική ενέργεια που είναι αρνητική και για τα δυο σώματα (αφού το σύστημα είναι κάτω από το Ε.Δ.Ε.), έχουμε δυο ειδών κινητικές ενέργειες, μεταφορική για την m και περιστροφική για την ράβδο. Η αρχή της διατήρησης της ενέργειας οδηγεί τότε στο αποτέλεσμα:

$$0+0=-\frac{MgL}{2}sin(\pi/6)-\frac{mg2L}{3}sin(\pi/6)+\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}mv^2$$

Η γραμμική ταχύτητα της μάζας ισούται με $v=\omega R_1$ και έτσι

$$\frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\omega^2+\frac{1}{2}m{R_1}^2\omega^2=\frac{MgL}{2}\frac{1}{2}+\frac{mg2L}{3}\frac{1}{2}$$

Αντικαθιστώντας το δεδομένο $M=m/3$ οδηγεί στο

$$\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{m}{3}L^2\omega^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{2}{3}\right)^2L^2\omega^2=\frac{mgL}{4\times 3}+\frac{mg2L}{2\times 3}$$

$$\frac{1}{2}L\omega^2+2L\omega^2=15\frac{g}{4}$$

$$\frac{5}{2}L\omega^2=15\frac{g}{4}$$

$$\omega^2=\frac{3g}{2L}$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις του προηγούμενου υποερωτήματος, η ζητούμενη τριβή όταν η γωνία φ είναι ίση με 30^0, ισούται με

$$T - mgsin(\pi/6) = mR_1\omega^2$$

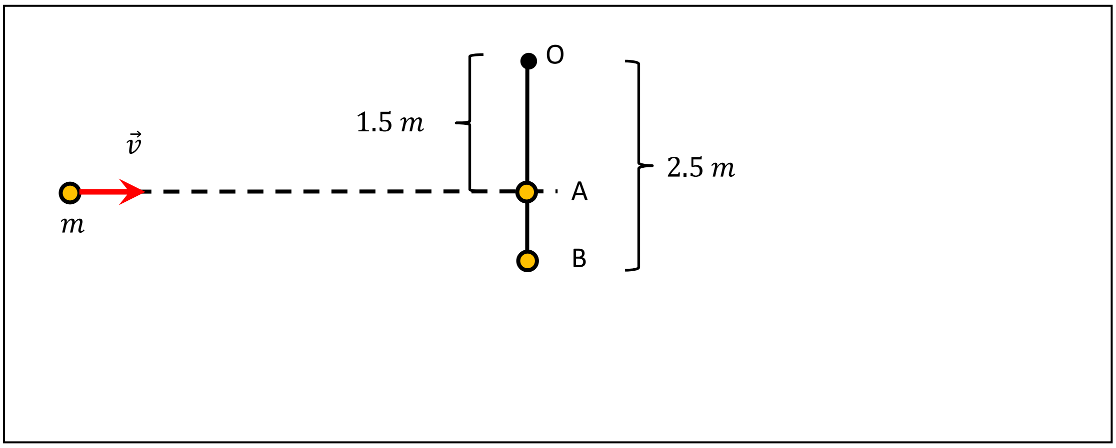
$$T - \frac{mg}{2} = mR_1\frac{3g}{2L}$$

$$T - \frac{mg}{2} = mg\frac{2}{3}\frac{3}{2}$$

$$T = \frac{3}{2}mg$$

9. ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

9.1 Δυο σημειακές μάζες $m_A = 1\,kg$ και $m_B = 2\,kg$ είναι προσδεμένες επάνω σε κατακόρυφη αβαρή ράβδο η οποία μπορεί και αιωρείται ελεύθερα γύρω από το σημείο Ο. Μια άλλη σημειακή μάζα $m = 2\,kg$ κινείται οριζόντια όπως στο παρακάτω σχήμα με ταχύτητα $v = 1.2\,m/s$ και προσκολλάται στην m_A. (α) Να σχεδιασθούν οι δυνάμεις που δρουν στο σύστημα των τριών μαζών κατά την διάρκεια της κρούσης, (β) Να βρεθεί η ολική ροπή που δρα σε αυτό το σύστημα και (γ) Να βρεθεί η στροφορμή της ράβδου, αμέσως μετά την προσκόλληση. Πάρτε $g = 10\,m/s^2$ για ευκολία.



Απάντηση:

Λύση: $3.6\,kg \cdot m^2/s^2$

(α) Στο σημείο Α υπάρχει ένα ζεύγος δράσης – αντίδρασης κατά την κρούση.

(β) Αφού όλες οι δυνάμεις είναι εσωτερικές, η συνολική ροπή που ασκείται στο σύστημα ράβδου-μαζών είναι μηδέν

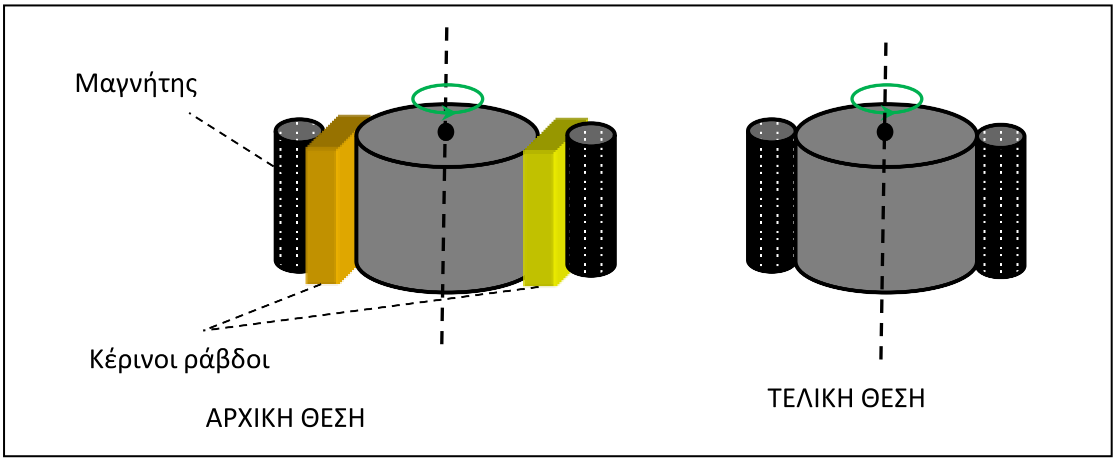
(γ) Αφού η συνολική ροπή που ασκείται στο σύστημα είναι μηδέν, τότε η ολική στροφορμή διατηρείται. Επομένως η στροφορμή μετά την προσκόλληση ισούται με την στροφορμή πριν που δίνεται από την εξίσωση:

$$L = mursin\theta$$

όπου r είναι η απόσταση της μάζας m από την αρχή Ο, δηλαδή το μέτρο του διανύσματος θέσης, και θ είναι η γωνία μεταξύ του $\vec{r}$ και του $\vec{v}$. Από απλή γεωμετρία μπορούμε να δούμε ότι το $rsin\theta$ είναι ίσο με την απόσταση ΟΑ που είναι η συντεταγμένη y της μάζας m. Επομένως

$$L = mvy = 3.6\,kg \cdot m^2/s^2$$

9.2 Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, δυο μαγνήτες σε σχήμα λεπτού κυλίνδρου ακτίνας $r = 0.1\, m$ και μάζας $m = 1\, kg$ ο καθένας είναι προσκολλημένοι μαγνητικά επάνω σε ένα σιδερένιο συμπαγή κύλινδρο μεγαλύτερης μάζας $M = 2.5\, kg$ και ακτίνας $R = 0.4\, m$ και ίδιου μήκους, αντιδιαμετρικά μεταξύ τους με τη βοήθεια δυο κέρινων ράβδων πάχους $d = 0.1\, m$ η καθεμία ώστε να μην έρχονται σε πλήρη επαφή με τον μεγάλο κύλινδρο. Το όλο σύστημα περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από τον άξονα του μεγάλου κυλίνδρου με γωνιακή ταχύτητα $4\, rad/s$. Ξαφνικά κατά τη διάρκεια της ελεύθερης περιστροφής, εφαρμόζεται θέρμανση στο σύστημα και οι δυο κέρινοι ράβδοι λιώνουν αργά αλλά οι δυο μαγνήτες λόγω της έλξης τους στον σιδερένιο κύλινδρο, δεν χάνουν τις σχετικές τους θέσεις αλλά απλά πλησιάζουν και τελικά έρχονται σε πλήρη επαφή με αυτόν και πάλι αντιδιαμετρικά μεταξύ τους. Να βρεθεί η νέα γωνιακή ταχύτητα του όλου συστήματος εάν η μάζα των κέρινων ράβδων μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα.



<u>Λύση</u>:

Εφόσον δεν υπάρχουν ροπές στο όλο σύστημα, η στροφορμή της διατηρείται

$$I_0\omega_0 = I_1\omega_1$$

όπου $\omega_0 = 4\, rad/s$ η αρχική γωνιακή ταχύτητα και ω_1 η τελική. Η αρχική ροπή αδράνειας I_0 εμπεριέχει τρεις όρους, τους μαγνήτες, τις κέρινες ράβδους και τον σιδερένιο κύλινδρο. Επειδή η μάζα των κέρινων ράβδων είναι αμελητέα, στην ουσία υπάρχουν μόνο δυο όροι. Από αυτούς, μόνο ο κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από το Κ.Μ. του και άρα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Steiner για τους μαγνήτες:

$$I_0 = \frac{1}{2}MR^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}mr^2 + mx^2\right)$$

όπου $x = R + d + r = 0.40 + 0.1 + 0.1 = 0.6\, m$ η απόσταση από τον άξονα περιστροφής. Έτσι

$$I_0 = \frac{1}{2}2.5 \times 0.4^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}1 \times 0.1^2 + 1 \times 0.6^2\right) = 0.93\, kg\, m^2$$

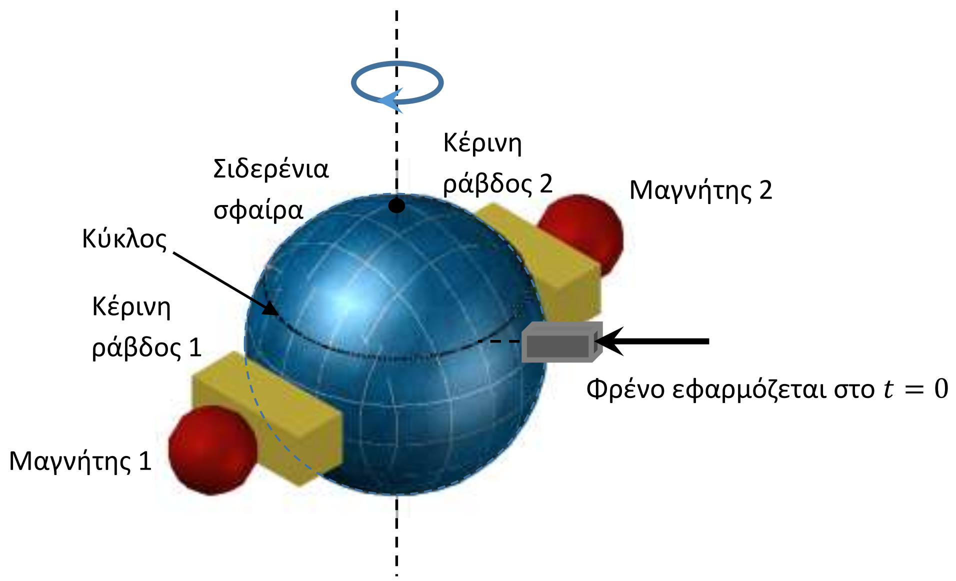
Όταν λιώσουν οι κέρινοι ράβδοι, οι δυο μαγνήτες έρχονται σε μικρότερη απόσταση από τον άξονα περιστροφής $x = R + d + r = 0.40 + 0 + 0.1 = 0.5\, m$ και έτσι

$$I_1 = \frac{1}{2} 2.5 \times 0.4^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2} 1 \times 0.1^2 + 1 \times 0.5^2 \right) = 0.71 \; kg \; m^2$$

Επομένως

$$\omega_1 = \frac{I_0}{I_1} \omega_0 = \frac{0.93}{0.71} 4 = 5.24 \; rad/s$$

9.3 Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, δυο όμοιοι μαγνήτες σε σχήμα μικρής συμπαγούς σφαίρας ακτίνας r και μάζας m είναι προσκολλημένοι μαγνητικά επάνω σε μια σιδερένια κοίλη σφαίρα μεγαλύτερης ακτίνας $R = 3r$ και μάζας m, αντιδιαμετρικά μεταξύ τους με τη βοήθεια δυο κέρινων ράβδων πάχους $\delta = 2r$ και αμελητέας μάζας η καθεμία, ώστε να μην έρχονται σε πλήρη επαφή με τη μεγάλη σφαίρα. Το όλο σύστημα περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από μια διάμετρο της μεγάλης σφαίρας με γωνιακή ταχύτητα ω_1. Η διάμετρος είναι κάθετη στην ευθεία που ενώνει τις δυο σφαίρες. Ξαφνικά κατά τη διάρκεια της ελεύθερης περιστροφής, εφαρμόζεται θέρμανση στο σύστημα και οι δυο κέρινοι ράβδοι λιώνουν αργά αλλά οι δυο μαγνήτες λόγω της έλξης τους στην σιδερένια σφαίρα, δεν χάνουν τις σχετικές τους θέσεις αλλά απλά πλησιάζουν και τελικά έρχονται σε πλήρη επαφή με αυτήν και πάλι αντιδιαμετρικά μεταξύ τους. Την στιγμή ακριβώς που έρχονται σε επαφή, την οποία την λαμβάνουμε ως την αρχή του χρόνου $t = 0$, ένα φρένο εφαρμόζεται σε ένα κύκλο της σφαίρας που είναι κάθετος στον άξονα περιστροφής με ακτίνα $10r/14$ έτσι ώστε να εφαρμόζεται μια σταθερή δύναμη τριβής T στη σφαίρα. Να βρεθεί ο χρόνος που χρειάζεται να έρθει το σύστημα σε πλήρη ηρεμία μετά το $t = 0$.



<u>Απάντηση</u>: $53^2 mr\omega_1/560T$

<u>Λύση</u>:

Εφόσον οι δυνάμεις που συγκρατούν τις σφαίρες είναι κεντρικές, η στροφορμή διατηρείται οπότε μπορούμε να γράψουμε για την γωνιακή ταχύτητα ω_0 στο $t = 0$

$$I_1\omega_1 = I_0\omega_0$$

όπου I_1 και I_0 είναι η ροπή αδράνειας πριν τη θέρμανση και κατά την επαφή αντίστοιχα οι οποίες υπολογίζονται με τη βοήθεια του θεωρήματος του Steiner. Η ροπή αδράνειας της μεγάλης κοίλης σφαίρας δεν αλλάζει, είναι η ίδια

$$I_\Sigma = \frac{2}{3}(m)(3r)^2 = 6mr^2$$

Αντιθέτως, λόγω του θεωρήματος του Steiner η ροπή αδράνειας των μικρών σφαιρών αλλάζει. Η ροπή αδράνειας μιας συμπαγούς σφαίρας είναι ίση με $2/5mr^2$ και η αρχική απόσταση των μαγνητών (του κέντρου τους) από τον άξονα περιστροφής, πριν τη θέρμανση) είναι ίση με

$$d_1 = r + 2r + 3r = 6r$$

Επομένως η αρχική ροπή αδράνειάς τους είναι (για το καθένα)

$$I_{M1} = \frac{2}{5}mr^2 + m(6r)^2 = \frac{182}{5}mr^2$$

Στο χρόνο $t = 0$ απουσιάζουν οι δυο ράβδοι οπότε η απόσταση των μαγνητών από τον άξονα περιστροφής ελαττώνεται σε

$$d_1 = r + 3r = 4r$$

Επομένως η ροπή αδράνειάς τους στο $t = 0$ είναι (για το καθένα)

$$I_{M0} = \frac{2}{5}mr^2 + m(4r)^2 = \frac{82}{5}mr^2$$

Προσθέτοντας και την ροπή αδράνειας της μεγάλης σφαίρας, η ροπή αδράνειας του όλου συστήματος (μεγάλη σφαίρα + 2 μαγνήτες) πριν τη θέρμανση I_1 και κατά την επαφή I_0 αντίστοιχα, είναι ίσες με

$$I_1 = 6mr^2 + \frac{182}{5}mr^2 = \frac{212}{5}mr^2$$

$$I_0 = 6mr^2 + \frac{82}{5}mr^2 = \frac{112}{5}mr^2$$

Από τη διατήρηση της στροφορμής

$$\omega_0 = \frac{I_1}{I_0}\omega_1 = \frac{\frac{212}{5}mr^2}{\frac{112}{5}}\omega_1 = \frac{53}{28}\omega_1$$

Η τριβή ασκεί μια ροπή επιβράδυνσης ίση με $\tau = 10Tr/14$ στη σφαίρα και κατ' επέκταση στο όλο σύστημα. Η αντίστοιχη γωνιακή επιβράδυνση ισούται με

$$\alpha = \frac{\tau}{I_0} = \frac{\frac{10}{14}Tr}{\frac{53}{28}mr^2} = \frac{20T}{53mr}$$

Αφού το α είναι σταθερό, η γωνιακή ταχύτητα σε κάθε χρονική στιγμή θα δίνεται από την

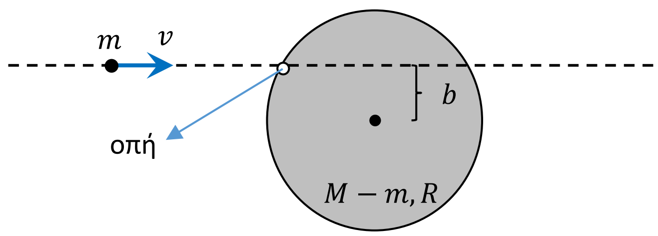
$$\omega = \omega_0 - \alpha t$$

και μηδενίζεται σε χρόνο

$$t = \frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{\frac{53}{28}\omega_1}{\frac{20T}{53mr}} = \frac{53^2}{560T}mr\omega_1$$

9.4 Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, μικρή σημειακή μάζα $m = 2\ g$ αποκολλάται από την περιφέρεια κυκλικού δίσκου αμελητέου πάχους, αρχικής μάζας $M = 2.0\ kg$ και ακτίνας

$R = 1.4\ m$, ο οποίος βρίσκεται στο επίπεδο της σελίδας, με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί μικρή οπή. Ακολούθως, η σημειακή μάζα εκτοξεύεται με σταθερή ταχύτητα $v = 16\ m/s$ με ευθύγραμμη τροχιά η οποία βρίσκεται στο επίπεδο της σελίδας με κατεύθυνση προς την οπή, με την προέκταση της τροχιάς της να απέχει απόσταση $b = 0.75\ m$ από το κέντρο του δίσκου. Ο δίσκος είναι αρχικά ακίνητος αλλά μπορεί και περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από σταθερό άξονα ο οποίος περνάει από το κέντρο του και είναι κάθετος στη σελίδα. Η σημειακή μάζα σφηνώνεται στην οπή του δίσκου έτσι ώστε να συμπληρώνει πλήρως το αρχικό σχήμα με ομοιόμορφη κατανομή μάζας και τον αναγκάζει να περιστραφεί. Αμέσως μετά την προσκόλληση, εφαρμόζεται μια εφαπτομενική δύναμη πέδησης με μέτρο $F = aV$ στην περιφέρεια του δίσκου, όπου $a = 2\ Ns/m$ και V είναι η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας. Να βρεθεί ο συνολικός αριθμός των περιστροφών που θα εκτελέσει ο δίσκος. <u>Σημείωση</u>: Στο πρόβλημα δεν υπάρχει βαρύτητα και οι ροπές της πλαστικής κρούσης είναι εσωτερικές για το σύστημα δίσκου – σημειακής μάζας.



<u>Απάντηση</u>: 0.49×10^{-3} περιστροφές

<u>Λύση</u>:

Αρχική στροφορμή

$$L_1 = mvb$$

Τελική στροφορμή

$$L_2 = I\omega_0 = \frac{1}{2}MR^2\omega_0$$

Διατήρηση στροφορμής

$$\frac{1}{2}MR^2\omega_0 = mvb => \omega_0 = \frac{2mvb}{MR^2}$$

Ροπή

$$\tau = FR = -aRV = -aR^2\omega$$

Το μείον είναι επειδή είναι ροπή επιβράδυνσης. Από το 2° νόμο του Νεύτωνα

$$I\frac{d\omega}{dt} = -aR^2\omega => \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{aR^2}{I}dt$$

Ολοκλήρωση

$$ln\omega - ln\omega_0 = -\frac{aR^2}{I}t => ln\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -\frac{2aR^2}{MR^2}t$$

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{2a}{M}t}$$

Ολοκλήρωση

$$\theta = c - \frac{M}{2a}\frac{2mvb}{MR^2}e^{-\frac{2a}{M}t} = c - \frac{mvb}{aR^2}e^{-\frac{2a}{M}t}$$

Αρχική γωνία $\theta = 0$ οπότε

$$0 = c - \frac{mvb}{aR^2} => c = \frac{mvb}{aR^2}$$

Επομένως

$$\theta = \frac{mvb}{aR^2}\left(1 - e^{-\frac{2aR}{M}t}\right)$$

Οριακή γωνία για $t \to \infty$ είναι η

$$\theta_\infty = \frac{mvb}{aR^2}$$

Άρα περιστροφές

$$n_\infty = \frac{\theta_\infty}{2\pi} = \frac{mvb}{2\pi aR^2}$$

Από τα δεδομένα

$$n_\infty = \frac{2 \times 10^{-3} \times 16 \times 0.75}{4 \times 2\pi \times 1.4^2} = 0.49 \times 10^{-3}$$

9.5 Ομοιογενής λεπτή ράβδος ΟΑ, μήκους $L = 2\ m$ και μάζας $M = 3\ kg$ είναι προσαρμοσμένη σε άρθρωση Ο, γύρω από την οποία μπορεί και περιστρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο. Στο άλλο άκρο της ράβδου Α έχει στερεωθεί μικρό σφαιρίδιο μάζας $m = 1\ kg$. Η ράβδος αρχικά κρατιέται ακίνητη στην οριζόντια θέση και την χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνεται ελεύθερη. Να υπολογίσετε τα εξής:

(α) Την ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου - σφαιριδίου ως προς κάθετο άξονα στη ράβδο που διέρχεται από το σημείο Ο.

(β) Την συνολική ροπή που ασκείται στο σύστημα ράβδου – σφαιριδίου στην αρχική θέση.

(γ) Την γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος στην αρχική θέση.

(δ) Την δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ του σφαιριδίου και της ράβδου εξετάζοντάς τα ξεχωριστά σαν δυο διαφορετικά σώματα .

(ε) Την χρονική στιγμή t_1 η ράβδος γίνεται για πρώτη φορά κατακόρυφη και το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σφαιριδίου είναι $5\sqrt{2}\,m/s$. Για την χρονική στιγμή t_1 να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής αλλά και τη στροφορμή του συστήματος ράβδος - σφαιρίδιο κατά τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από την άρθρωση Ο. Θεωρήστε δεδομένη την επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\,m/s^2$.

<u>Λύση</u>:

(α) Η ροπή αδράνειας του σφαιριδίου εάν το θεωρήσουμε ως σημειακό σώμα ισούται με $I_1 = mL^2$. Από τον Πίνακα 8.1, η ροπή αδράνειας ράβδου ως προς το ένα άκρο της είναι ίση με $I_2 = 1/3ML^2$ οπότε η συνολική ροπή ισούται με

$$I_{OA} = I_1 + I_2 = \frac{1}{3}ML^2 + mL^2 = \frac{1}{3}L^2(M + 3m) = \frac{1}{3}2^2(3+3) = 8\,kgm^2$$

(β)

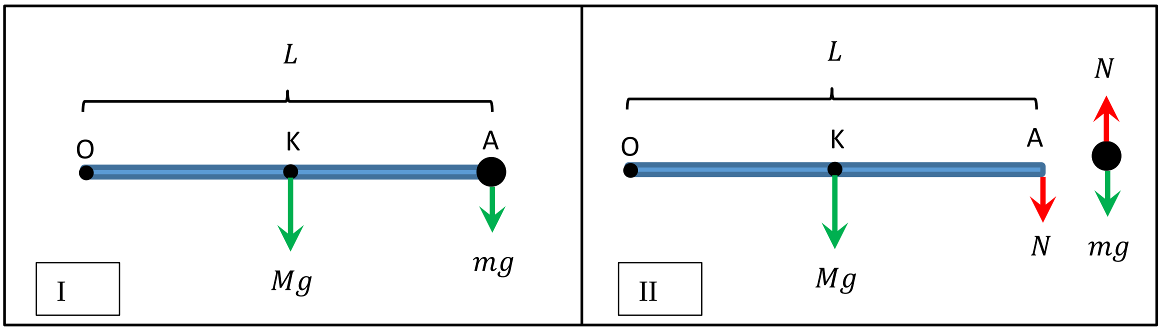
Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα I (στα αριστερά), επειδή ο άξονας περιστροφής διέρχεται από το άκρο Ο της ράβδου, το βάρος της που δρα στο κέντρο μάζας της, δηλαδή στο κέντρο της, ασκεί μια ροπή δύναμης $MgL/2$. Επίσης το βάρος του σφαιριδίου που βρίσκεται στο άλλο άκρο Α, ασκεί μια ροπή δύναμης mgL. Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδου-σφαιριδίου ισούται με

$$\tau = \frac{MgL}{2} + mgL = \frac{gL}{2}(M + 2m) = \frac{10 \times 2}{2}(3 + 2) = 50\,Nm$$

(γ) Από τον 2° νόμο του Νεύτωνα στην περιστροφή έχουμε

$$\tau = I\alpha => \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{50}{8} = 6.25\,rad/s$$

(δ) Στο παρακάτω σχήμα II (στα δεξιά), έχουμε ξεχωρίσει τα δυο σώματα και δείχνουμε και επιπλέον το ζεύγος δυνάμενων $N - N$ δρουν σε αυτά λόγω της μεταξύ τους αλληλεπίδρασης. Επιλέγουμε μια τυχαία φορά για αυτές τις δυο δυνάμεις, π.χ. στο σφαιρίδιο έχουμε σχεδιάσει την N προς τα πάνω. Εάν μετά τους υπολογισμούς η N προκύψει αρνητική, θα σημαίνει ότι η πραγματική της φορά είναι αντίθετη από αυτή που υποθέσαμε.



Εξετάζοντας μόνο το σφαιρίδιο, η συνολική δύναμη που του ασκείται είναι ίση με $mg - N$ προς τα κάτω και αυτή δημιουργεί ροπή ίση με $\tau_1 = (mg - N)L$. Η ροπή Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα στην περιστροφή έχουμε

$$\tau_1 = I_1\alpha => (mg - N)L = mL^2\alpha => N = m(g - L\alpha)$$

Αντικαθιστώντας

$$N = 10 - 2 \times 6.5 = -2.5\ N$$

Επομένως η δύναμη N που δρα στο σφαιρίδιο είναι στην πραγματικότητα προς τα κάτω και άρα ως αντίδραση θα δρα στην ράβδο προς τα πάνω. Για επαλήθευση, θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την τιμή της N για να υπολογίσουμε την γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου ξεχωριστά η οποία φυσικά πρέπει να συμπίπτει με αυτή του συστήματος. Αφού η N δρα προς τα πάνω στην ράβδο, η συνολική ροπή προς τα κάτω που ασκείται σε αυτήν είναι ίση με

$$\tau_2 = \frac{MgL}{2} - NL = 25\ Nm$$

Η αντίστοιχη γωνιακή επιτάχυνση είναι ίση με

$$\frac{\tau_2}{I_2} = \frac{\tau_2}{1/3ML^2} = \frac{25}{4} = 6.25\ rad/s$$

ακριβώς όπως βρήκαμε παραπάνω.

(ε) Από την Εξ. 9.5 γνωρίζουμε ότι η χρονική μεταβολή της στροφορμής ισούται με την ροπή. Στην κατακόρυφη θέση τα βάρη δεν ασκούν ροπή στο σύστημα και έτσι

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

Η στροφορμή για το σφαιρίδιο είναι από την Εξ. 9.1 ίση με

$$L_1 = mvrsin\theta$$

όπου θ η γωνία μεταξύ της ταχύτητά και του βραχίονα r που εδώ είναι $\theta = \pi/2$ και έτσι

$$L_1 = mvr = mvL$$

Αντίθετα για την ράβδο πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 9.4 για τα στερεά

$$L_2 = I\omega$$

Από το άκρο Ο μπορούμε να υπολογίσουμε το ω

$$\omega = v/L$$

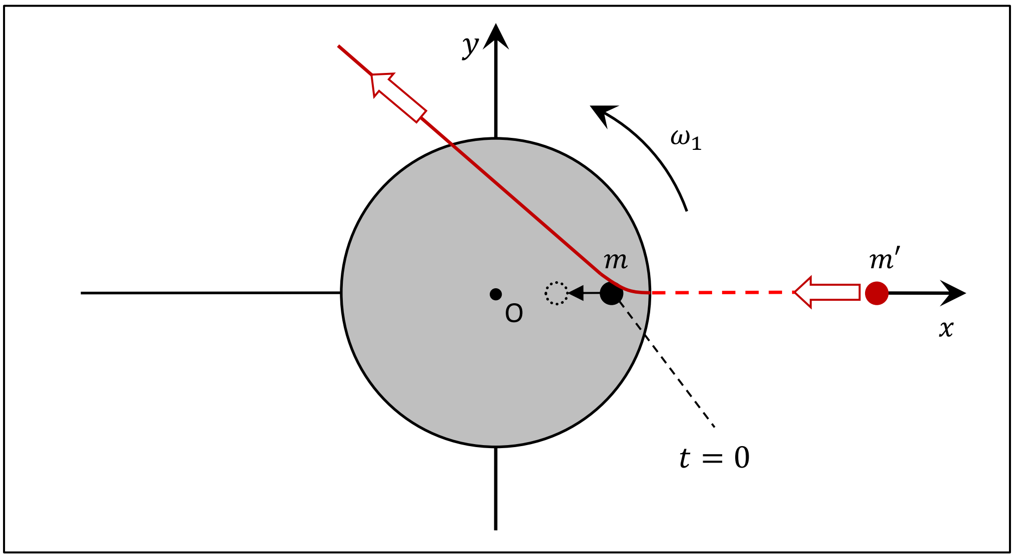
Έτσι

$$L_2 = \frac{1}{3}ML^2\frac{v}{L} = \frac{1}{3}MLv$$

Οπότε

$$L = L_1 + L_2 = mvL + \frac{1}{3}MLv = \frac{1}{3}Lv(M + 3m) = \frac{1}{3}2 \times 5\sqrt{2}(3 + 3) = 20\sqrt{2}\,kg\,m^2/s$$

9.6 <u>Εφαρμογή κεντρικής δύναμης</u>: Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, λεπτός σιδερένιος δίσκος ακτίνας $R = 1\,m$ και μάζας $M = 2\,kg$ περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από την αρχή Ο. Επάνω του βρίσκεται προσκολλημένος μικρός σημειακός μαγνήτης μάζας $m = 1\,kg$ σε απόσταση R/κ από το Ο και το όλο σύστημα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 1.6\,rad/s$. Η κατάσταση στο $t = 0$ είναι όπως στο σχήμα με την m επάνω στον άξονα $+x$. Παράλληλα, δεύτερη σημειακή μάζα m' που βρίσκεται ελαφρά πάνω από τη σελίδα και κινείται κατά μήκος του αρνητικού άξονα x, προσπίπτει ελαστικά επάνω στην m αφού ο δίσκος έχει εκτελέσει μια πλήρη περιστροφή, αναγκάζοντάς την να προσκολληθεί σε νέα θέση επάνω στον δίσκο η οποία απέχει απόσταση $R/(\kappa + 1)$ από το Ο ενώ η m' φεύγει προς τυχαία κατεύθυνση (δεν υπάρχει βαρύτητα στο πρόβλημα). Εάν η δύναμη της κρούσης θεωρηθεί κεντρική και $\kappa = 2$, να βρεθεί η νέα γωνιακή ταχύτητα του συστήματος M και m.



<u>Λύση</u>:

Παρόλο που η δύναμη κρούσης είναι εξωτερική, εντούτοις είναι κεντρική δύναμη και άρα η στροφορμή $I\omega$ του συστήματος <u>M & m</u> διατηρείται. Επομένως μπορούμε να γράψουμε για την κατάσταση πριν-μετά:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Η αρχική απόσταση της m από τον άξονα περιστροφής είναι $r_1 = R/\kappa$ ενώ η τελική $r_2 = R/(\kappa + 1)$. Οι αντίστοιχες ροπές (δίσκος + σημειακή μάζα) πριν και μετά την κρούση, είναι ίσες με:

$$I_1 = \frac{1}{2}MR^2 + mr_1^2 = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}M\frac{R^2}{\kappa^2} = \frac{1}{2}MR^2(1 + \frac{1}{\kappa^2})$$

$$I_2 = \frac{1}{2}MR^2 + mr_2^2 = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}M\frac{R^2}{(\kappa+1)^2} = \frac{1}{2}MR^2(1 + \frac{1}{(\kappa+1)^2})$$

Αντικαθιστώντας

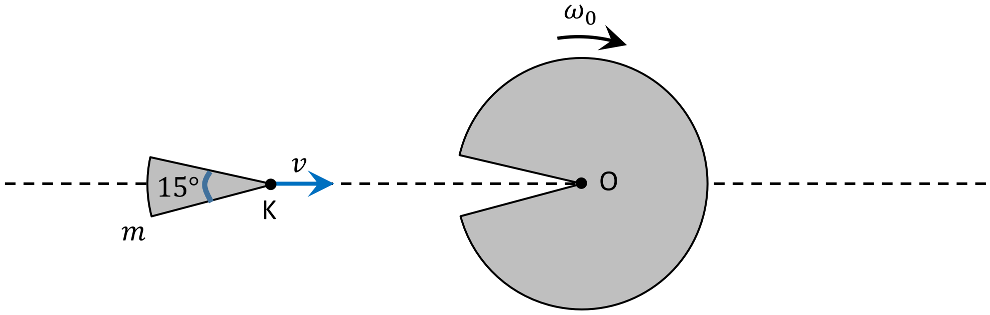
$$I_1 = \frac{1}{2}2 \times 1^2(1 + 1/2^2) = \ 1.25\ kgm^2$$

$$I_2 = \frac{1}{2}2 \times 1^2(1 + 1/3^2) = 1.11\ kgm^2$$

Επομένως

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 => \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{1.25}{1.11} \times 1.6 = \ 1.8\ rad/s$$

9.7 Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, μια μικρή μάζα m σχήματος κυκλικού τομέα γωνίας $15°$ και ακτίνας R, αποκολλάται από έναν δίσκο αμελητέου πάχους. Στη συνέχεια, ο δίσκος (με το άνοιγμα) τίθεται σε περιστροφική κίνηση με αρχική γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = 7.2\ \mathrm{rad/s}$ γύρω από σταθερό άξονα ο οποίος περνάει από το κέντρο του Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου. Ακολούθως, ο κυκλικός τομέας εκτοξεύεται ευθύγραμμα προς τον περιστρεφόμενο δίσκο, έτσι ώστε η κορυφή του Κ να κατευθύνεται προς το κέντρο Ο του δίσκου και ο τομέας να βρίσκεται συμμετρικά ως προς την ευθεία ΚΟ. Εντελώς συμπτωματικά, ο τομέας σφηνώνεται στο άνοιγμα του δίσκου έτσι ώστε να συμπληρώνει πλήρως το αρχικό σχήμα με ομοιόμορφη κατανομή μάζας. (α) Σχολιάστε εάν η στροφορμή του όλου συστήματος ως προς το σημείο Ο διατηρείται ή όχι (αιτιολογημένη απάντηση). (β) Βρείτε την ροπή αδράνειας του κυκλικού τομέα εάν γνωρίζετε ότι αυτό το μέγεθος είναι γραμμική ποσότητα, δηλαδή η ροπή αδράνειας ενός συστήματος μαζών, είναι ίση με το άθροισμα των επιμέρους ροπών αδράνειας της κάθε μάζας ξεχωριστά. (γ) Βρείτε την τελική γωνιακή ταχύτητα ω του συσσωματώματος. Σημείωση: Στο πρόβλημα δεν υπάρχει βαρύτητα.



Λύση:

(α) Η δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ του κυκλικού τομέα και του δίσκου είναι κεντρική δύναμη δηλαδή ο φορέας της που είναι η ευθεία ΚΟ, διέρχεται από τον άξονα περιστροφής. Επομένως η ροπή της τ είναι μηδέν και από το θεώρημα ροπής-μεταβολής της στροφορμής

$$\tau = \frac{dL}{dt}$$

προκύπτει ότι η στροφορμή L διατηρείται.

(β) Αφού η γωνία του τομέα είναι $15°$, τότε υπάρχουν συνολικά $360/15 = 24$ τέτοιοι τομείς σε όλον το δίσκο. Επομένως, εάν i είναι η ροπή αδράνειας του καθενός από αυτούς, τότε σύμφωνα με την εκφώνηση, η συνολική ροπή αδράνειας I του δίσκου (συμπληρωμένος) θα πρέπει να ισούται με

$$I = 24i$$

Ως γνωστόν, η ροπή αδράνειας ενός δίσκου είναι ίση με

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

όπου για την μάζα του δίσκου ισχύει $M = 24m$, (m είναι η μάζα του τομέα), και άρα

$$I = 12mR^2$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, μπορούμε να βρούμε την ροπή αδράνειας του τομέα:

$$i = \frac{I}{24} = \frac{1}{2}mR^2$$

Με την ίδια λογική, η ροπή αδράνειας I' του δίσκου με το άνοιγμα ισούται με

$$I' = 23i = \frac{23}{2}mR^2$$

αφού αυτός μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από 23 τομείς.

(γ) Αφού η στροφορμή διατηρείται, μπορούμε να την υπολογίσουμε πριν και μετά την συσσωμάτωση για να βρούμε την τελική γωνιακή ταχύτητα. Πριν τη συσσωμάτωση, ο τομέας δεν έχει γωνιακή ταχύτητα αφού δεν περιστρέφεται ενώ η στροφορμή του δίσκου με το άνοιγμα είναι ίση με

$$L' = I'\omega_0 = \frac{23}{2}mR^2\omega_0$$

Μετά την συσσωμάτωση, η ροπή αδράνειας του συσσωματώματος ισούται με

$$L = I\omega = 12mR^2\omega$$

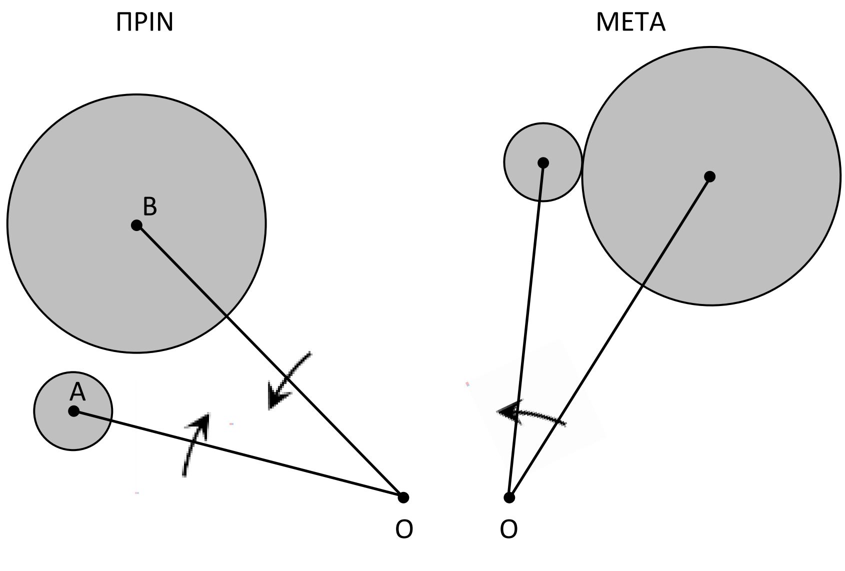
Εξισώνοντας $L' = L$ οδηγεί στο εξής αποτέλεσμα:

$$12mR^2\omega = \frac{23}{2}mR^2\omega_0$$

ή

$$\omega = \frac{23}{24}\omega_0 = \frac{23}{24}7.2 = 6.9 \text{ rad/s}$$

9.8 Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, μια μικρή συμπαγής σφαίρα μάζας m και ακτίνας R, με κέντρο το σημείο Α, περιστρέφεται με τη βοήθεια αβαρούς δοκού ΑΟ μήκους $10R$ η οποία είναι στερεωμένη στο Α, με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από σταθερό άξονα ο οποίος τέμνει κάθετα το επίπεδο της σελίδας σε τυχαίο σημείο Ο. Ταυτόχρονα, ένας κυκλικός δίσκος μάζας $5m$ και ακτίνας $4R$, με κέντρο το σημείο Β, αμελητέου πάχους, περιστρέφεται με τη βοήθεια αβαρούς δοκού ΒΟ μήκους $12R$ η οποία είναι στερεωμένη στο Β, με γωνιακή ταχύτητα $\omega/5$ αντίθετης φοράς, γύρω από τον ίδιο σταθερό άξονα, έτσι ώστε τα Α, Β και Ο να ανήκουν όλα στο επίπεδο της σελίδας. Λόγω αντίθετης περιστροφής, κάποια στιγμή τα δυο σώματα συγκρούονται αλλά λόγω συνδετικού υλικού που έχει εσκεμμένα τοποθετηθεί στην περιφέρεια του δίσκου αλλά και στην επιφάνεια της σφαίρας, αυτά σχηματίζουν συσσωμάτωμα και περιστρέφονται ως ένα σώμα γύρω από το Ο. Να βρεθεί η τελική γωνιακή ταχύτητα του συσσωματώματος. Σημείωση: Στο πρόβλημα δεν υπάρχει βαρύτητα.



Λύση:

Θεωρώντας τα δυο σώματα ως ένα σύστημα, η δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ τους κατά την διάρκεια της συσσωμάτωσης είναι μια εσωτερική δύναμη και άρα δεν δημιουργεί εξωτερική ροπή τ. Έτσι, από το θεώρημα ροπής-μεταβολής της στροφορμής

$$\tau = \frac{dL}{dt}$$

προκύπτει ότι η στροφορμή του συστήματος L διατηρείται. Επομένως, μπορούμε να την υπολογίσουμε πριν και μετά και να βρούμε την τελική γωνιακή ταχύτητα εξισώνοντας τις δυο τιμές. Η ολική στροφορμή του συστήματος L πριν τη συσσωμάτωση ισούται με

$$L = I_2\omega_2 - I_1\omega_1$$

όπου οι δείκτες 1 και 2 αναφέρονται στην σφαίρα και δίσκο αντίστοιχα και θεωρήσαμε την φορά περιστροφής του δίσκου θετική. Ως γνωστόν, η ροπή αδράνειας ενός δίσκου είναι ίση με

$$I_2 = \frac{1}{2}m_2{R_2}^2$$

ενώ της συμπαγούς σφαίρας είναι

$$I_1 = \frac{2}{5}m_1{R_1}^2$$

Οι παραπάνω εκφράσεις είναι για περιστροφή ως προς το κέντρο μάζας των σωμάτων που εδώ δεν ισχύει οπότε πρέπει να προσθέσουμε σε αυτές την ποσότητα md^2 σύμφωνα με το Θεώρημα Steiner, όπου d είναι το μήκος της δοκού. Έτσι έχουμε:

$$I_1 = \frac{2}{5}mR^2 + m(10R)^2 = 100.2mR^2$$

Αντίστοιχα για τον δίσκο

$$I_1 = \frac{1}{2}(5m)(4R)^2 + (5m)(12R)^2 = 760mR^2$$

Επομένως η ολική στροφορμή του συστήματος L πριν τη συσσωμάτωση ισούται με

$$L = 760mR^2\frac{\omega}{5} - 100.2mR^2\omega = 51.8mR^2\omega$$

Αντιθέτως, η ολική στροφορμή του συστήματος L' μετά τη συσσωμάτωση ισούται με

$$L' = I\omega'$$

όπου $I = I_1 + I_2$. Επειδή οι σχετικές θέσεις των δυο σωμάτων ως προς το Ο δεν έχουν αλλάξει, οι ροπές αδράνειες παραμένουν οι ίδιες που σημαίνει ότι:

$$I = 760mR^2 + 100.2mR^2 = 860.2mR^2$$

Εξισώνοντας τα L και L', οδηγεί στο αποτέλεσμα

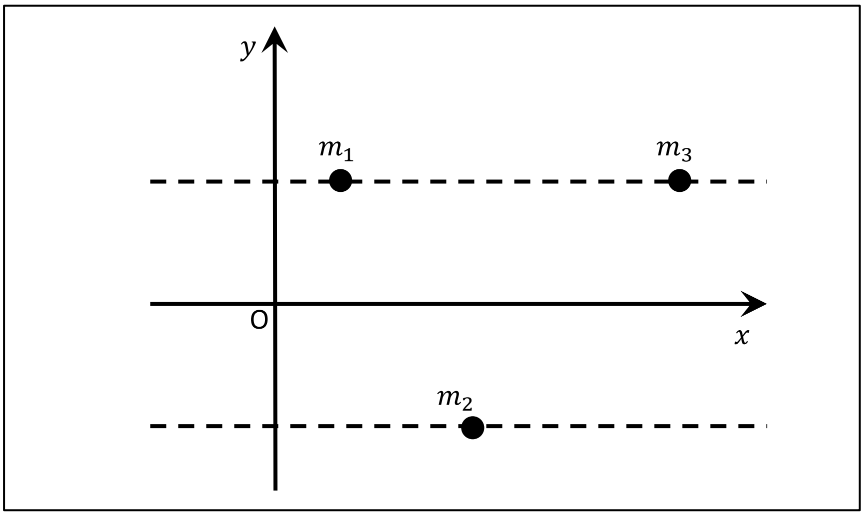
$$860.2mR^2\omega' = 51.8mR^2\omega$$

από το οποίο προκύπτει ότι $\omega' = 0.06\omega$. Η φορά περιστροφής είναι αυτή του δίσκου.

10. ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗ

Κέντρο Μάζας

10.1 Μια ακολουθία N σημειακών μαζών (ζυγός αριθμός) όπου η πρώτη είναι ίση με m και οι υπόλοιπες διαδοχικά είναι ένα πολλαπλάσιο $a > 1$ της προηγούμενης (δηλαδή $m_i = am_{i-1}$) τοποθετούνται όπως στο παρακάτω σχήμα, με εναλλάξ y-συντεταγμένες ± 1 με την πρώτη να είναι ίση με $+1$ και με x-συντεταγμένες που η καθεμία είναι ένα πολλαπλάσιο a (το ίδιο με τις μάζες) της προηγούμενης (δηλαδή $x_i = ax_{i-1}$), με την πρώτη να είναι ίση με h. Να βρεθούν οι x και y συνιστώσες του κέντρου μάζας του συστήματος όλων αυτών των N μαζών. Σημείωση: Πρώτα να αναπτύξετε το παρακάτω γινόμενο γιατί καταλήγει σε ένα εξαιρετικά απλό αποτέλεσμα που μπορεί να σας φανεί πολύ χρήσιμο στον υπολογισμό της γεωμετρικής σειράς: $(1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\cdots\lambda^{N-1})$



Απάντηση: $(1-a)/(1+a)$

Λύση:

Το ανάπτυγμα δίνει $(1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\cdots\lambda^{N-1}) = 1-\lambda^N$ και άρα μπορούμε να γράψουμε ταυτοτικά για τη γεωμετρική σειρά ότι

$$1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\cdots\lambda^{N-1} = \frac{1-\lambda^N}{1-\lambda}$$

Εάν ονομάσουμε m_0 την πρώτη μάζα, τότε $m_0 = m$ και επαγωγικά $m_i = a^i m$. Ομοίως για τις οριζόντιες συντεταγμένες $x_i = a^i h$. Επομένως η x-συνιστώσα του Κ.Μ. είναι ίση με

$$x_{KM} = \frac{m_0x_0 + m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_{N-1}x_{N-1}}{m_0 + m_1 + m_2 + \cdots + m_{N-1}}$$

(προσέξτε ότι επειδή ξεκινάμε με δείκτη "0", ο τελευταίος όρος είναι ο "$N-1$" και όχι ο "N"). Αντικαθιστώντας τις επαγωγικές σχέσεις:

ή

$$x_{KM}=\frac{mh+amah+a^2ma^2h+\cdots+a^{N-1}ma^{N-1}h}{m+am+a^2m+\cdots+a^{N-1}m}$$

$$x_{KM}=\frac{mh}{m}\frac{1+a^2+a^4+\cdots+a^{2(N-1)}}{1+a+a^2+\cdots+a^{N-1}}$$

Ο αριθμητής περιέχει τη γεωμετρική σειρά με $\lambda=a^2$ ενώ ο παρανομαστής με $\lambda=a$ και έτσι

$$x_{KM}=h\frac{\frac{1-a^{2N}}{1-a^2}}{\frac{1-a^N}{1-a}}=h\frac{(1-a^{2N})(1-a)}{(1-a^N)(1-a^2)}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα για την διαφορά τετραγώνου

$$x_{KM}=h\frac{\frac{1-a^{2N}}{1-a^2}}{\frac{1-a^N}{1-a}}=h\frac{(1+a^N)(1-a^N)(1-a)}{(1-a^N)(1+a)(1-a)}$$

έχουμε

$$x_{KM}=h\frac{1+a^N}{1+a}$$

Για την y-συνιστώσα του ΚΜ γνωρίζουμε ότι οι y συντεταγμένες εναλλάσσονται σε ± 1 επομένως

$$y_{KM}=\frac{m(+1)+am(-1)+a^2m(+1)+\cdots+a^{N-1}m(-1)}{m+am+a^2m+\cdots+a^{N-1}m}$$

$$y_{KM}=\frac{1+(-a)+(-a)^2+\cdots+(-a)^{N-1}}{1+a+a^2+\cdots+a^{N-1}}$$

Δηλαδή ο αριθμητής περιέχει τη γεωμετρική σειρά με $\lambda=(-a)$ ενώ ο παρανομαστής με $\lambda=a$ και έτσι

$$y_{KM}=\frac{\frac{1-(-a)^N}{1-(-a)}}{\frac{1-a^N}{1-a}}$$

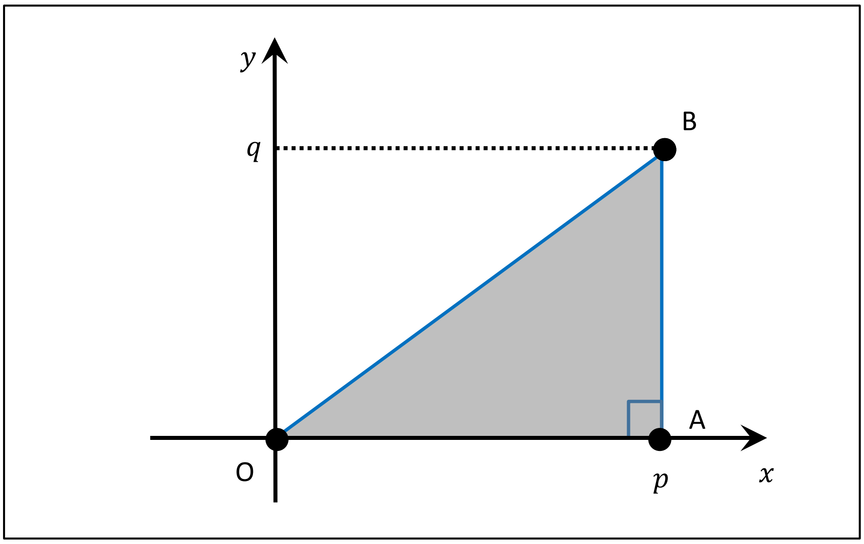
Όμως ο N είναι ζυγός και έτσι $(-a)^N=a^N$ που οδηγεί στο

$$y_{KM}=\frac{\frac{1-a^N}{1+a}}{\frac{1-a^N}{1-a}}$$

ή

$$y_{KM}=\frac{1-a}{1+a}$$

10.2 Κάνοντας χρήση του ορισμού του κέντρου μάζας για συνεχές σώμα, να βρεθούν οι συντεταγμένες του x και y για το παρακάτω λεπτό και ομοιογενές τρίγωνο OAB μάζας m, δεδομένων των αποστάσεων OA = p και AB = q:



Λύση:

Χωρίζουμε το τρίγωνο σε κατακόρυφες λωρίδες πάχους dx. Η x συνιστώσα του ΚΜ δίνεται από την

$$mx_{KM} = \int xdm$$

Αφού η μάζα είναι ομοιογενής τότε

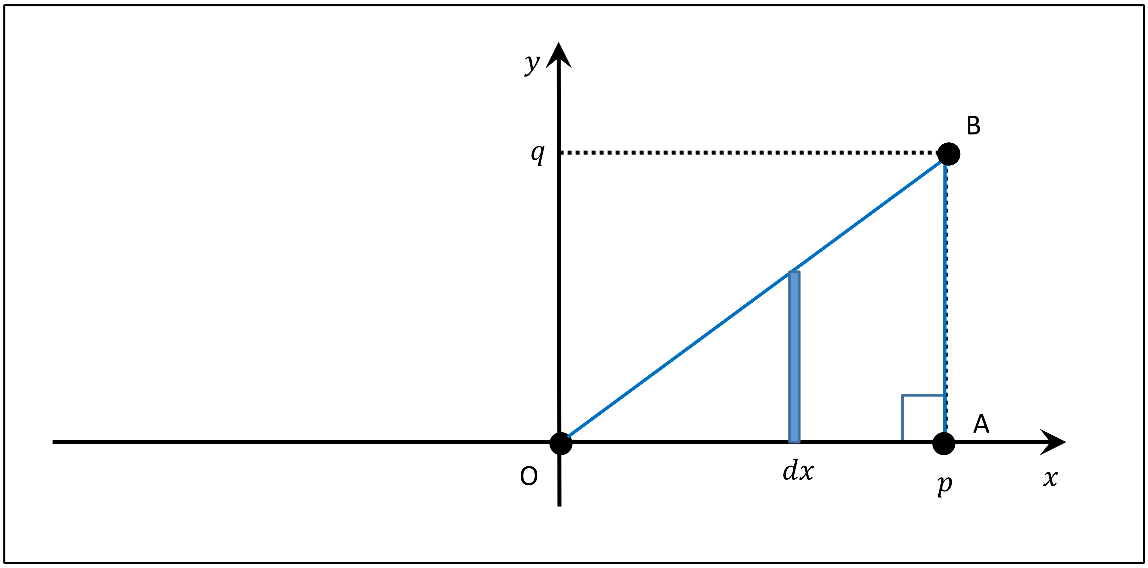
$$dm = \frac{m}{A}dA = \frac{2m}{pq}ydx$$

όπου y το ύψος της λωρίδας που δίνεται από την

$$y = \frac{q}{p}x$$

Επομένως

$$mx_{KM} = \int_{x=0}^{p} xdm = \frac{2m}{pq}\frac{q}{p}\int_{x=0}^{p} x^2 dx = \frac{2m}{pq}\frac{q}{p}\frac{p^3}{3} => x_{KM} = \frac{2p}{3}$$



Ομοίως χωρίζω σε κάθετες λωρίδες πάχους dy. Η y συνιστώσα του ΚΜ δίνεται από την

$$my_{KM} = \int ydm$$

Αφού η μάζα είναι ομοιογενής τότε

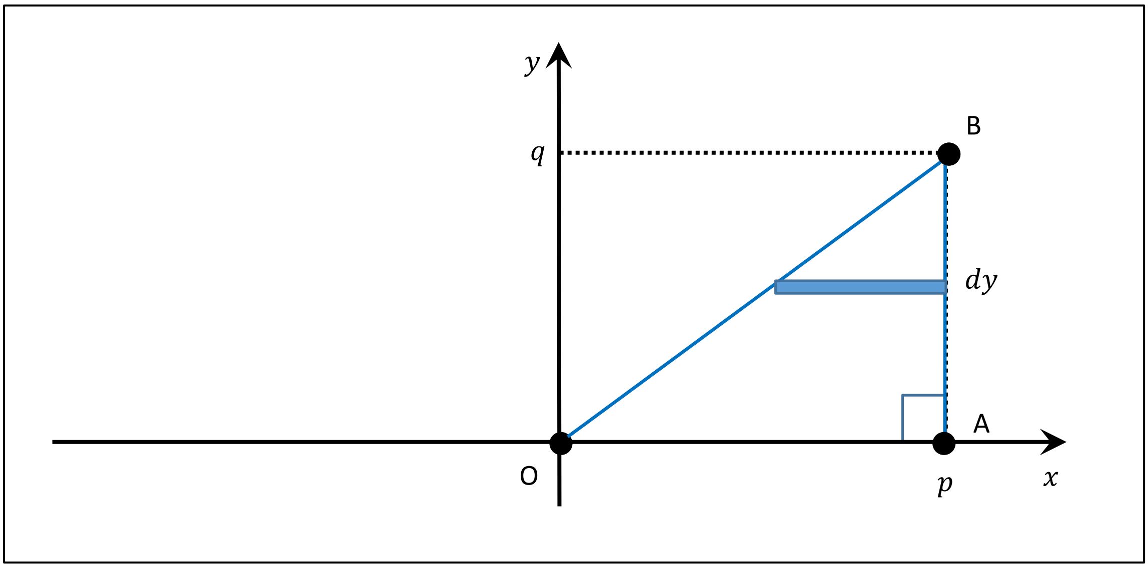
$$dm = \frac{m}{A}dA = \frac{2m}{pq}xdy$$

όπου x το μήκος της λωρίδας που δίνεται από την

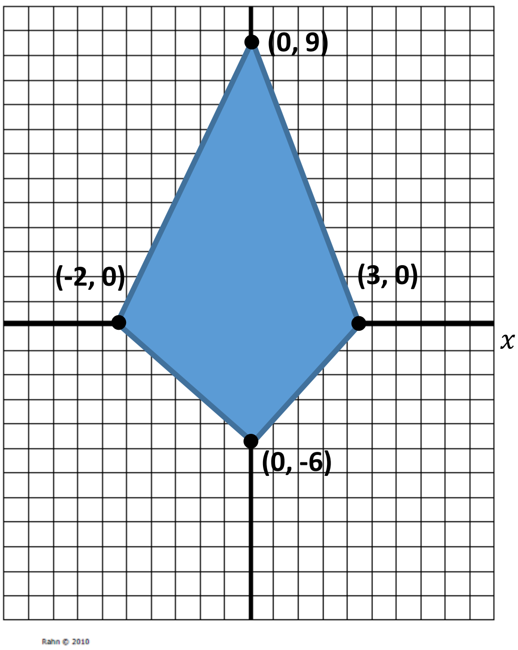
$$x = p - \frac{p}{q}y$$

Επομένως

$$my_{KM} = \int_{y=0}^{q} ydm = \frac{2m}{pq}\int_{y=0}^{q} y\left(p - \frac{p}{q}y\right)dy = \frac{2m}{pq}\frac{p}{q}\frac{q^3}{3} => y_{KM} = \frac{q}{3}$$



10.3 Το παρακάτω στερεό έχει τη μορφή λεπτής πλάκας αμελητέου πάχους με ακανόνιστο σχήμα στο επίπεδο $x-y$ που ορίζεται από τέσσερις ευθείες που περνάνε από τα εξής τέσσερα σημεία: (3, 0) , (0, -6) , (-2, 0) και (0, 9). Να βρεθεί το κέντρο μάζας του στερεού. (Το σχήμα δεν είναι σε κλίμακα)



<u>Απάντηση</u>: $(1/3, 1)$

<u>Λύση</u>:

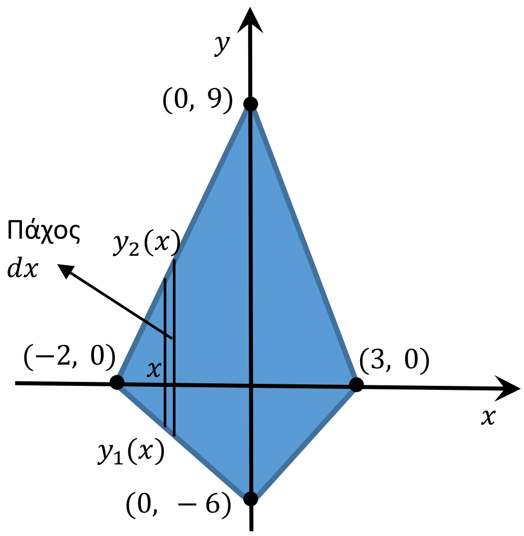
Θα βρούμε πρώτα τη x-συντεταγμένητου Κ.Μ του στερεού Σ. Εξ' ορισμού η x-συντεταγμένη του κέντρου μάζας ισούται με

$$x_{KM} = \frac{1}{m}\int_{\Sigma} x dm$$

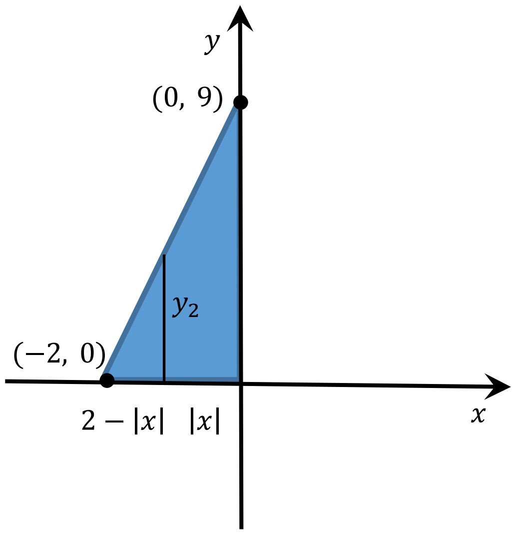
όπου m η μάζα του στερεού. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, τεμαχίζουμε το στερεό σε ένα πλήθος άπειρων κατακόρυφων λωρίδων πάχους dx και μάζας dm η καθεμία, όπως αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα στη συντεταγμένη x. Όπως και στα παραδείγματα του κεφαλαίου, θα χρησιμοποιήσουμε το γνωστό τέχνασμα της αναλογίας των μαζών με τα εμβαδά, δηλαδή γράφουμε

$$\frac{dm}{m} = \frac{dE}{E}$$

όπου dE είναι το στοιχειώδες εμβαδό της λωρίδας και E το εμβαδό του όλου σχήματος. Η λωρίδα αυτή επεκτείνεται κατακόρυφα από την $y_1(x)$ έως και την $y_2(x)$ και επομένως έχει ύψος $\Delta y = y_2(x) - y_1(x)$ όπου οι $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι οι εξισώσεις ευθείας στα σύνορα του στερεού τις οποίες πρέπει να βρούμε.



Πολύ ευκολότερα όμως μπορούμε να βρούμε τα y_1 και y_2 από την απλή ομοιότητα τριγώνων, π.χ. στο πάνω αριστερά τεταρτημόριο έχουμε την εξής κατάσταση:



Παίρνοντας τους λόγους των κάθετων πλευρών των δυο όμοιων ορθογώνιων τριγώνων, οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$$\frac{y_2}{9}=\frac{2-|x|}{2}$$

Η απόλυτη τιμή είναι απαραίτητη επειδή το x είναι αρνητικό και θεωρήσαμε μόνο θετικές αποστάσεις αφού έχουμε να κάνουμε με ένα απλό γεωμετρικό πρόβλημα. Ομοίως στο κάτω αριστερά τεταρτημόριο μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ισχύει

$$\frac{|y_1|}{6}=\frac{2-|x|}{2}$$

(στην ουσία μόνο το 9 άλλαξε σε 6 και το y_1 εμφανίζεται με απόλυτο τιμή αφού είναι αρνητικό). Επομένως το ύψος της λωρίδας είναι ίσο με

$$\Delta y=y_2+|y_1|=\frac{15}{2}(2-|x|)$$

και αφού το x είναι αρνητικό

$$\Delta y=\frac{15}{2}(2+x)$$

Η στοιχειώδης λωρίδα έχει εμβαδό ίσο με $dE=dx\Delta y$ και έτσι από την αναλογία μαζών-εμβαδών παίρνουμε

$$dm=\frac{m}{E}dE=\frac{15m}{2E}(2+x)dx$$

Το ολικό E θα το υπολογίσουμε στο τέλος. Η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο για το αριστερό τμήμα του στερεού (για αρνητικά x). Δουλεύοντας παρομοίως και στο δεξί τμήμα από την ομοιότητα τριγώνων παίρνουμε

$$\frac{y_2}{9} = \frac{3-x}{3}$$

και

$$\frac{|y_1|}{6} = \frac{3-x}{3}$$

Επομένως το ύψος της λωρίδας είναι ίσο με

$$\Delta y = y_2 + |y_1| = 5(3-x)$$

ενώ η στοιχειώδης μάζα ισούται με

$$dm = \frac{m}{E}dE = \frac{5m}{E}(3-x)dx$$

Μαζεύοντάς τα όλα μαζί, η x-συντεταγμένη του κέντρου μάζας ισούται με

$$x_{KM} = \frac{1}{m}\int_{x=-2}^{3} xdm = \frac{1}{E}\int_{x=-2}^{0} x\frac{15}{2}(2+x)dx + \frac{1}{E}\int_{x=0}^{3} 5x(3-x)dx$$

όπου την ολοκλήρωση επάνω σε όλο το στερεό Σ, η οποία είναι από το $x=-2$ έως $x=3$, την χωρίσαμε σε δυο μέρη, ένα για τα αρνητικά και ένα για τα θετικά x. Τα δυο ολοκληρώματα υπολογίζονται εύκολα με αντίστοιχες τιμές -10 και 22.5. Το εμβαδό E υπολογίζεται επίσης εύκολα ως το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων ορθογωνίων τριγώνων:

$$E = \frac{1}{2}(2\times 9 + 2\times 6 + 3\times 9 + 3\times 6) = 37.5$$

Τελικά

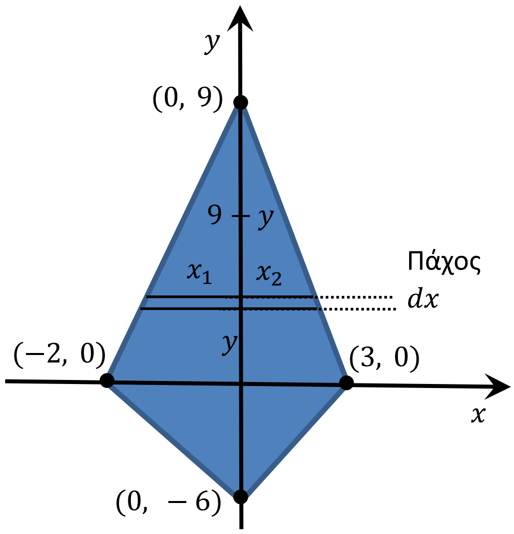
$$x_{KM} = \frac{-10+22.5}{37.5} = \frac{1}{3}$$

Για να βρούμε την αντίστοιχη y-συντεταγμένη του Κ.Μ., χωρίζουμε τώρα το στερεό σε οριζόντιες λωρίδες. Μια τέτοια λωρίδα με θετικό y φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και με τη βοήθεια της ομοιότητας των τριγώνων έχει μήκος

$$\Delta x = x_1 + x_2 = 2\frac{9-y}{9} + 3\frac{9-y}{9} = \frac{5}{9}(9-y)$$

Ομοίως για μια λωρίδα σε αρνητικό y θα ισχύει

$$\Delta x = x_1 + x_2 = 2\frac{6-|y|}{6} + 3\frac{6-|y|}{6} = \frac{5}{6}(6-|y|) = \frac{5}{6}(6+y)$$



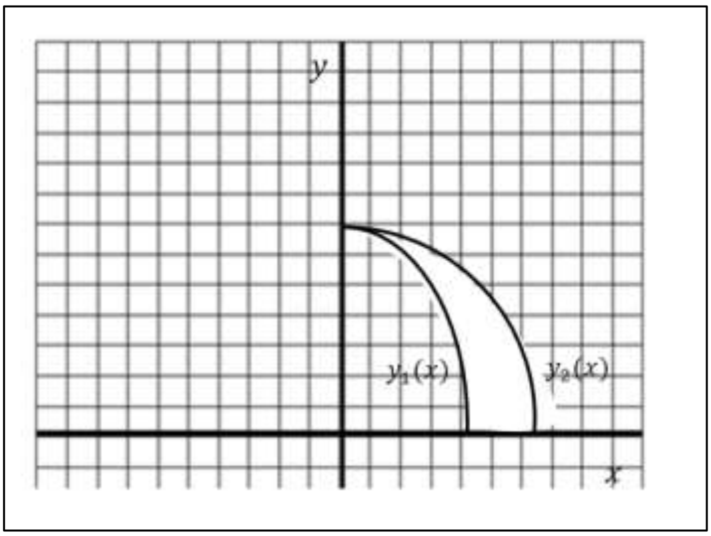
Λαμβάνοντας υπόψη ότι το εμβαδό της λωρίδας είναι ίσο με $dE = \Delta y dx$ και η στοιχειώδης μάζα $dm = mdE/E$ (όπως παραπάνω), το y_{KM} ισούται με

$$y_{KM} = \frac{1}{m}\int_{y=-6}^{9} ydm = \frac{1}{E}\int_{y=-6}^{0} y\frac{5}{6}(6+y)dy + \frac{1}{E}\int_{y=0}^{9} y\frac{5}{9}(9-y)dy = \frac{-30+67.5}{37.5} = 1$$

Επομένως το κέντρο μάζας έχει συντεταγμένες

$$(x_{KM}, y_{KM}) = (1/3, 1)$$

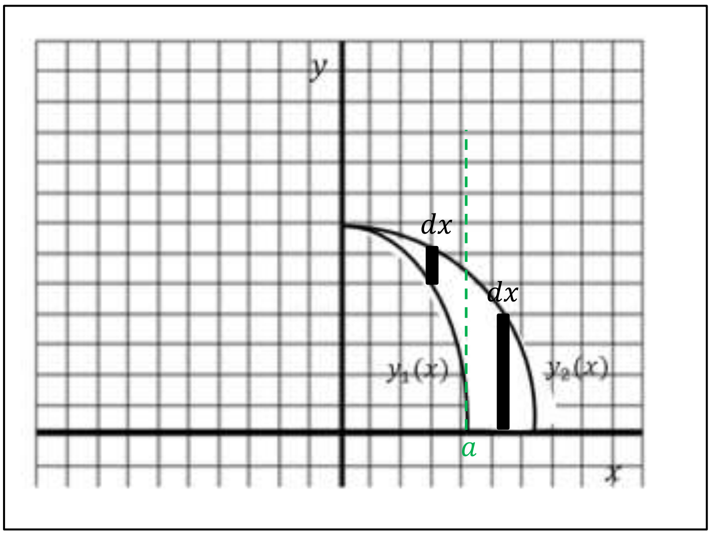
10.4 Το παρακάτω στερεό έχει τη μορφή λεπτού πτερυγίου αμελητέου πάχους που περιορίζεται στο επίπεδο $x-y$ από τις δυο καμπύλες $y_1(x) = 4[1-(x/a)^2]$, $y_2(x) = 4[1-(x/b)^2]$ και τον άξονα x. Η κατανομή της μάζας είναι ομοιογενής. Να βρεθεί <u>η x-συντεταγμένη</u> του κέντρου μάζας του στερεού εάν δίνονται οι σταθερές $a = 1\ m$, $b = 5\ m$ και το εμβαδό κάτω από την καμπύλη $y_1(x)$ από $x=0$ έως $x=a$ ίσο με $8a/3$ (και ομοίως $8b/3$ για την καμπύλη $y_2(x)$). <u>Σημείωση</u>: Το σχήμα δεν είναι σε κλίμακα.



Απάντηση: $9/4\,m$

Λύση:

Οι δυο καμπύλες τέμνουν τον άξονα x στα σημεία $(a,0)$ και $(b,0)$ αντίστοιχα. Για τη x συντεταγμένη του Κ.Μ. χωρίζω σε λωρίδες με εύρος dx (δείτε παρακάτω σχήμα). Υπάρχουν δυο περιοχές ολοκλήρωσης. Από $x=0$ έως $x=a$ η λωρίδα περιορίζεται από τις καμπύλες y_2 και y_1 και έτσι το ύψος της στη θέση x είναι ίσο με $h=y_2(x)-y_1(x)$. Αντιθέτως στην περιοχή από $x=a$ έως $x=b$ το ύψος της στη θέση x είναι $h=y_2(x)$.



Από την ομοιογενή κατανομή της μάζας

$$\frac{dm}{dA}=\frac{m}{A}=>dm=\frac{m}{A}hdx$$

$$mx_{KM}=\int_0^b xdm=\frac{m}{A}\int_0^b xhdx=\frac{m}{A}\left[\int_0^a (y_2-y_1)xdx+\int_a^b y_2xdx\right]$$

$$x_{KM}=\frac{4}{A}\left[\int_0^a \{(x/a)^2-(x/b)^2\}xdx+\int_a^b [1-(x/b)^2]xdx\right]$$

$$x_{KM}=\frac{4}{A}\left[a^2\frac{1}{4}(x/a)^4-b^2\frac{1}{4}(x/b)^4\right]_0^a+\frac{4}{A}\left[\frac{x^2}{2}-b^2\frac{1}{4}(x/b)^4\right]_a^b$$

Εμφανίζεται ο όρος

$$-b^2\frac{1}{4}\left(\frac{x}{b}\right)^4$$

στο $x=a$ δυο φορές (μια σε κάθε παρένθεση) με αντίθετο πρόσημο οπότε δίνει συνολικά μηδέν. Επίσης στην πρώτη παρένθεση τα όρια $x=0$ δίνουν μηδενικό αποτέλεσμα. Οι άλλες τιμές δίνουν:

$$x_{KM} = \frac{4}{A}a^2\frac{1}{4}(a/a)^4 + \frac{4}{A}\left[\frac{(b^2-a^2)}{2} - b^2\frac{1}{4}(b/b)^4\right]$$

$$x_{KM} = \frac{4}{A}\left[\frac{a^2-b^2}{4} + \frac{(b^2-a^2)}{2}\right] = \frac{(b^2-a^2)}{A} = \frac{(b-a)(b+a)}{A}$$

Το εμβαδό A είναι η διαφορά των δυο εμβαδών μεταξύ των δυο καμπυλών

$$A = \frac{8b}{3} - \frac{8a}{3} = \frac{8(b-a)}{3}$$

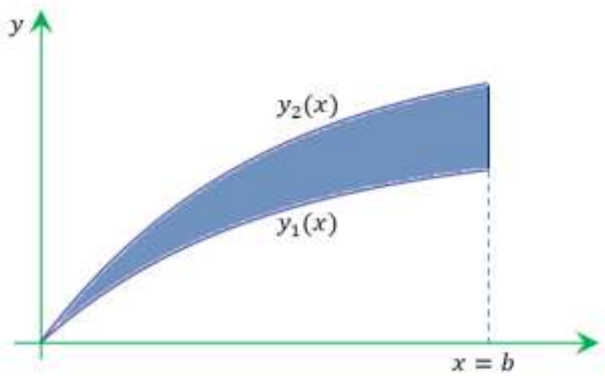
Οπότε

$$x_{KM} = \frac{3(b-a)(b+a)}{8(b-a)} = \frac{3}{8}(b+a)$$

Από τα δεδομένα

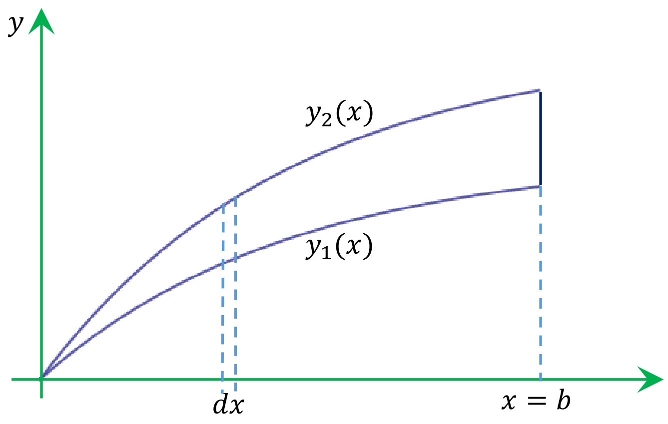
$$x_{KM} = \frac{3}{8}(5+1) = \frac{9}{4}\ m$$

10.5 Το παρακάτω στερεό έχει τη μορφή λεπτού πτερυγίου αμελητέου πάχους που περιορίζεται στο επίπεδο $x-y$ από τις δυο καμπύλες $y_1(x) = a_1[1-e^{-x}]$, $y_2(x) = a_2[1-e^{-x}]$, την κατακόρυφο $x = b$ και τον άξονα x. Η κατανομή της μάζας είναι ομοιογενής. Να βρεθεί η x-συντεταγμένη του κέντρου μάζας του στερεού εάν δίνονται οι σταθερές a_1, a_2, b και το εμβαδό κάτω από την καμπύλη $y_1(x)$ από $x = 0$ έως $x = b$ ίσο με $a_1(b + e^{-b} - 1)$ (και ομοίως και για την καμπύλη $y_2(x)$). Σημείωση: Δίνονται τα ολοκληρώματα $\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1)$ και $\int xe^{-x}dx = -(x+1)e^{-x}$.



Απάντηση: $(b + e^{-b} - 1)/(b^2/2 + be^{-b} + e^{-b} - 1)$

Λύση: Όπως φαίνεται παρακάτω, για τη x συντεταγμένη χωρίζω σε λωρίδες με εύρος dx και ολοκληρώνω από $x = 0$ έως $x = b$. Το ύψος της λωρίδας μέσα στο πτερύγιο είναι $h = y_2 - y_1$.



Από την ομοιογενή κατανομή της μάζας

$$\frac{dm}{dA} = \frac{m}{A} => dm = \frac{m}{A} h dx$$

Έτσι

$$m x_{KM} = \int_0^b x dm = \frac{m}{A} \int_0^b x h dx = \frac{m}{A} \left[\int_0^b (y_2 - y_1) x dx \right]$$

$$x_{KM} = \frac{1}{A} \left[\int_0^b (a_2 - a_1)(1 - e^{-x}) x dx \right]$$

$$x_{KM} = \frac{a_2 - a_1}{A} \left[\frac{x^2}{2} + x e^{-x} + e^{-x} \right]_0^b$$

$$x_{KM} = \frac{a_2 - a_1}{A} \left(\frac{b^2}{2} + b e^{-b} + e^{-b} - 1 \right)$$

Το εμβαδό A είναι η διαφορά των δυο εμβαδών μεταξύ των δυο καμπυλών

$$A = a_2 \left(b + e^{-b} - 1 \right) - a_1 \left(b + e^{-b} - 1 \right) = (a_2 - a_1)(b + e^{-b} - 1)$$

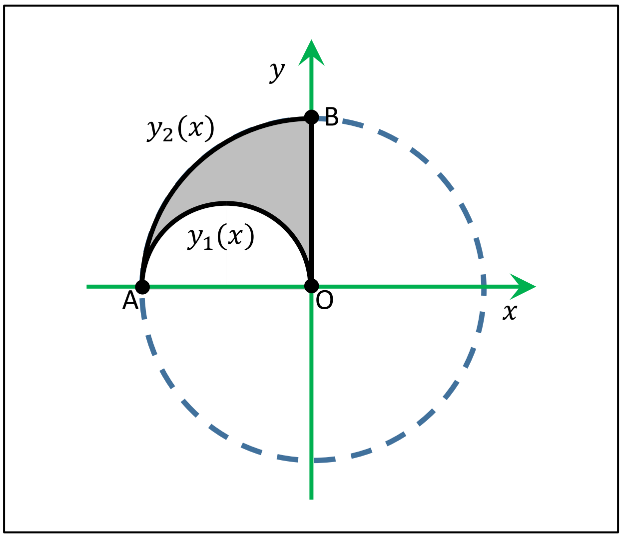
Έτσι

$$x_{KM} = \frac{1}{(b + e^{-b} - 1)} \left(\frac{b^2}{2} + b e^{-b} + e^{-b} - 1 \right)$$

10.6 Το παρακάτω στερεό ΟΑΒ έχει τη μορφή λεπτού πτερυγίου (με γκρίζο χρώμα) αμελητέου πάχους που περιορίζεται στο επίπεδο $x-y$ από τις δυο καμπύλες $y_2(x)$ η οποία είναι το ένα τέταρτο ενός κύκλου ακτίνας $2a$ και της $y_1(x)$ η οποία είναι ένα ημικύκλιο με ακτίνα a. Οι δυο κύκλοι εφάπτονται στο σημείο Α$(-2\alpha, 0)$ ενώ το Ο είναι η αρχή των αξόνων. Η κατανομή της μάζας είναι ομοιογενής. Εάν $a = 1\,m$, να βρεθεί η x-συντεταγμένη του κέντρου μάζας του στερεού. Χρήσιμα ολοκληρώματα:

$$\int_{-2}^{0} \sqrt{1-(x+1)^2}\,x dx = -\pi/2$$

$$\int_{-2}^{0} \sqrt{4-x^2}\,x dx = -\frac{8}{3}$$



Απάντηση: $-0.38\,m$

Λύση:

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, για να υπολογίσω τη x συντεταγμένη του Κ.Μ., χωρίζω το στερεό σε κατακόρυφες λωρίδες με εύρος dx. Οι λωρίδες αυτές είναι περιορισμένες μεταξύ $y_1(x)$ και $y_2(x)$ οπότε έχουν κατακόρυφο ύψος $h = y_2 - y_1$ και άρα εμβαδό ίσο με $dA = hdx$. Αφού η μάζα είναι ομοιογενής, μπορούμε να πούμε ότι η αναλογία των μαζών είναι ίση με την αναλογία των εμβαδών. Έτσι μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\frac{dm}{m} = \frac{dA}{A}$$

όπου m είναι η μάζα του πτερυγίου και A το εμβαδό του. Έτσι

$$dm = \frac{m}{A} hdx$$

Για να βρούμε τη x συντεταγμένη του Κ.Μ., ολοκληρώνουμε από $x = -2a$ έως και $x = 0$. Από τον ορισμό του Κ.Μ. έχουμε

$$mx_{KM} = \int_{-2a}^{0} xdm = \frac{m}{A}\int_{-2a}^{0} xhdx = \frac{m}{A}\int_{-2a}^{0} (y_2 - y_1)xdx$$

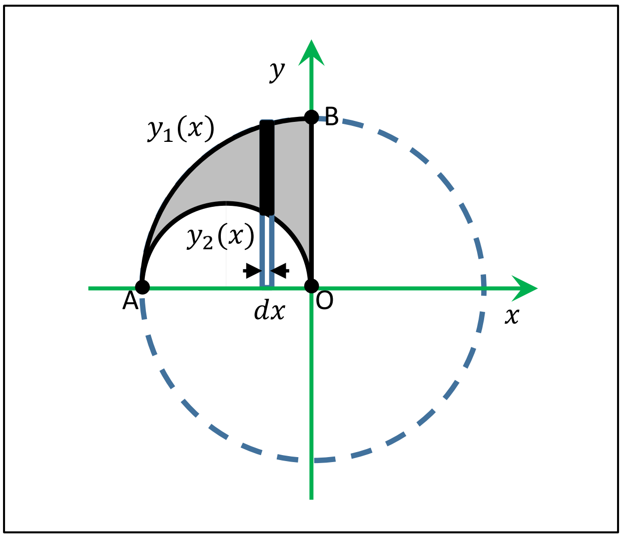
Η εξίσωση του μεγάλου κύκλου με ακτίνα $R = 2a$ και κέντρο στο $\mathrm{O}(0,0)$ είναι η εξής:

$$x^2 + y^2 = (2a)^2$$

Λύνοντας ως προς y καταλήγουμε στην

$$y_2(x) = \sqrt{4a^2 - x^2}$$

(η αρνητική ρίζα απορρίπτεται αφού το τμήμα του κύκλου που εξετάζουμε έχει μόνο θετικά y).



Ο μικρός κύκλος έχει ακτίνα $R = a$ και κέντρο στο $(-\alpha, 0)$ και επομένως η εξίσωσή του είναι η εξής

$$(x + \alpha)^2 + y^2 = a^2$$

Λύνοντας ως προς y καταλήγουμε στην

$$y_1(x) = \sqrt{a^2 - (x + \alpha)^2}$$

(όπως και παραπάνω, κρατάμε μόνο τη θετική ρίζα). Επιστρέφοντας στο Κ.Μ.:

$$mx_{KM} = \frac{m}{A}\int_{-2a}^{0} \left(\sqrt{a^2 - (x + \alpha)^2} - \sqrt{4a^2 - x^2}\right) xdx$$

Αντικαθιστώντας το $a = 1\, m$ οδηγεί στο

$$x_{KM} = \frac{1}{2A}\left[\int_{-2}^{0} \sqrt{1 - (x + 1)^2} xdx - \int_{-2}^{0} \sqrt{4 - x^2} xdx\right]$$

$$x_{KM} = \frac{1}{2A}\left[-\frac{\pi}{2} + \frac{3}{8}\right]$$

Το εμβαδό A προκύπτει εύκολα από το σχήμα ως αφαίρεση δυο εμβαδών

$$A = \frac{1}{4}\pi(2a)^2 - \frac{1}{2}\pi a^2 = \frac{1}{2}\pi a^2 = \frac{1}{2}\pi$$

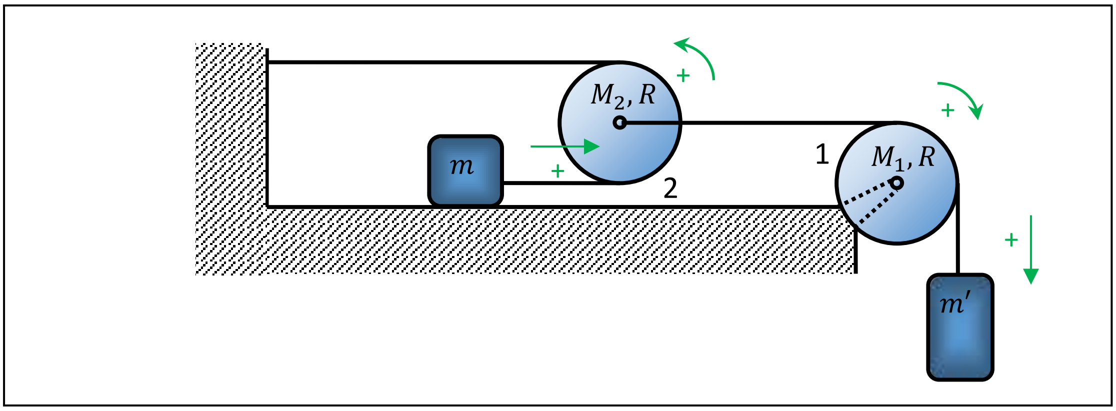
Έτσι

$$x_{KM} = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2} + \frac{3}{8}\right] = -0.38\ m$$

Το αρνητικό πρόσημο είναι αναμενόμενο αφού όλο το πτερύγιο βρίσκεται σε αρνητικά x.

Ο Νόμος του Νεύτωνα στην Σύνθετη Κίνηση

10.7 Στο παρακάτω σχήμα δεν υπάρχουν τριβές στο δάπεδο, τα νήματα είναι ιδανικά και οι δίσκοι των τροχαλιών έχουν μάζες M_1 και M_2, την ίδια ακτίνα R και μπορούν και περιστρέφονται ελεύθερα γύρω από τα κέντρα τους. Να βρεθούν όλες οι τάσεις των νημάτων, δηλαδή η τάση T_1 που ασκείται στην μάζα m', η τάση T_2 μεταξύ των δυο τροχαλιών, η τάση T_3 που ασκείται στην μάζα m και η τάση T_4 που ασκεί η τροχαλία 2 στον τοίχο, οι οποίες είναι εν γένει διαφορετικές μεταξύ τους. Δίνονται οι μάζες $m = 1\ kg$, $m' = 6\ kg$, $M_1 = 2\ kg$, $M_2 = 1\ kg$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ m/s^2$. Σημείωση1: Χρησιμοποιήστε για θετικές φορές αυτές που δείχνονται με βέλη στο σχήμα παρόλο που δεν είναι απαραίτητα οι συμβατικές φορές. Σημείωση2: Εάν χρειαστεί να λύσετε ένα σύστημα εξισώσεων, με απλή πρόσθεση μεταξύ τους απαλείφονται πολλές φορές διάφορες μεταβλητές.



Απάντηση: 31.2 N - 26.4 N - 9.6 N - 12 N

Λύση:

Στην m' δρουν η τάση του νήματος T_1 και το βάρος της $m'g$ και άρα η επιτάχυνσή της a θα δίνεται από την

$$m'g - T_1 = m'a$$

Στην τροχαλία 1

$$T_1R - T_2R = \frac{1}{2}M_1R^2\frac{a}{R} => T_1 - T_2 = \frac{1}{2}M_1a$$

Στην τροχαλία 2 – μεταφορική:

$$T_2 - T_3 - T_4 = M_2a$$

Στην τροχαλία 2 – περιστροφική:

$$T_4R - T_3R = \frac{1}{2}M_2R^2\frac{a}{R} => T_4 - T_3 = \frac{1}{2}M_2a$$

(Σημείωση: Στην ουσία αυτή η τροχαλία εκτελεί κύλιση με επιτάχυνση Κ.Μ. ίση με την επιτάχυνση της m' αφού τις επιταχύνει το ίδιο νήμα. Στην κύλιση $\alpha = a_{KM}/R$).

Στην m δρα μόνο η τάση του νήματος T_3 και επίσης η επιτάχυνσή της είναι διπλάσια από αυτή του Κ.Μ. της τροχαλίας (κύλιση) επομένως

$$T_3 = m2a$$

Συνδυάζοντας

$$-T_1 = m'a - m'g$$

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2}M_1a$$

$$T_2 - T_3 - T_4 = M_2a$$

$$T_4 - T_3 = \frac{1}{2}M_2a$$

$$T_3 = 2ma$$

Προσθέτοντας κατά μέλη

$$-T_3 = \frac{3}{2}M_2a + \frac{1}{2}M_1a + m'a - m'g + 2ma$$

Από την τελευταία

$$-2ma = \frac{3}{2}M_2a + \frac{1}{2}M_1a + m'a - m'g + 2ma =>$$

$$m'g = \frac{3}{2}M_2a + \frac{1}{2}M_1a + m'a + 4ma =>$$

$$a = \frac{m'}{\frac{3}{2}M_2 + \frac{1}{2}M_1 + m' + 4m}g$$

$$a = \frac{2m'}{3M_2 + M_1 + 2m' + 8m}g$$

Από τα δεδομένα $m'/m = 6$, $M_1/m = 2$, $M_2/m = 1$:

$$a = \frac{12}{3+2+12+8} 10 = 4.8\ m/s^2$$

Οι αντίστοιχες τάσεις υπολογίζονται από τους παραπάνω τύπους:

$$T_1 = m'g - m'a = m'(g-a) = 6 \times 5.2 = 31.2\ N$$

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2} M_1 a => T_2 = T_1 - \frac{1}{2} M_1 a = 31.2 - 4.8 = 26.4\ N$$

$$T_3 = 2ma = 9.6\ N$$

$$T_4 - T_3 = \frac{1}{2} M_2 a => T_4 = T_3 + \frac{1}{2} M_2 a = 9.6\ + 0.5\ \times 4.8 = 12\ N$$

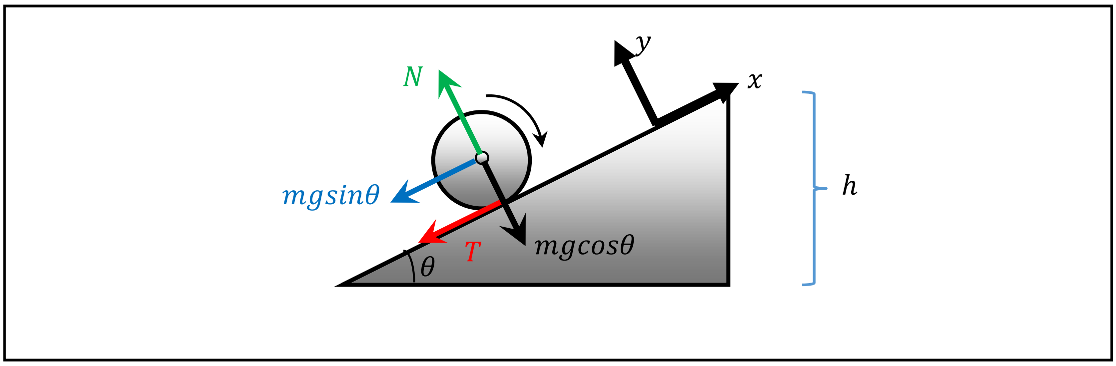
Κύλιση

10.8 Συμπαγής κύλινδρος μάζας m και ακτίνας R ο οποίος αρχικά ηρεμεί στη βάση κεκλιμένου επιπέδου γωνίας θ, δέχεται μια μεγάλη αλλά σύντομη ώθηση προς τα πάνω (κατά μήκος του επιπέδου) και στη συνέχεια αφήνεται ελεύθερος. Η ώθηση είναι τέτοια ώστε κατά την παύση της, ο κύλινδρος να έχει αποκτήσει μόνο μεταφορική ταχύτητα v_0 κατά μήκος του επιπέδου και καθόλου γωνιακή ταχύτητα. Αμέσως μετά εμφανίζονται δυο διαφορετικές κινήσεις, μια σύντομη ολίσθηση κατά την οποία ο κύλινδρος αποκτάει μια μικρή γωνιακή ταχύτητα αλλά περισσότερο ολισθαίνει παρά περιστρέφεται, και μια κύλιση χωρίς ολίσθηση οπότε και παραμένει σε αυτή. (α) Να σχεδιασθούν οι δυνάμεις που δρουν στον κύλινδρο κατά την φάση της ολίσθησης. (β) Να γίνει μια γραφική παράσταση της ποσότητας ωR (κατά απόλυτο τιμή) συναρτήσει του χρόνου και της v_{KM} συναρτήσει του χρόνου (μαζί στην ίδια γραφική παράσταση) κατά την φάση της ολίσθησης (μέχρι να εκκινήσει η κύλιση) όπου ω είναι η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου και v_{KM} η ταχύτητα του κέντρου μάζας του.

Απάντηση: (β) Φθίνουσα γραμμική και αύξουσα γραμμική συνάρτηση που συναντιούνται στη συνθήκη κύλισης

Λύση:

α) Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, επειδή ο κύλινδρος ολισθαίνει προς τα πάνω, τότε το σημείο επαφής του κυλίνδρου με το κεκλιμένο επίπεδο κινείται προς τα πάνω σχετικά με το επίπεδο και έτσι η τριβή ολίσθησης T είναι προς τα κάτω. Η δύναμη του βάρους mg έχει αναλυθεί κατά τα γνωστά σε δυο συνιστώσες, μια παράλληλη και μια κάθετη ως προς το επίπεδο και επίσης είναι παρούσα και η κάθετη αντίδραση N.



β) Από τον νόμο του Νεύτωνα για την μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας έχουμε:

$$-T - mgsin\theta = ma_{KM}$$

Επομένως το κέντρο μάζας αποκτάει αρνητική επιτάχυνση σταθερού μέτρου

$$a_{KM} = -\frac{T + mgsin\theta}{m}$$

και έτσι εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με ταχύτητα v_{KM} που δίνεται από την

$$v_{KM} = v_0 + at = v_0 - \frac{T + mgsin\theta}{m}t$$

(ο χρόνος t μετράει από την στιγμή της παύσης της ώθησης). Από τον νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου γύρω από το κέντρο μάζας έχουμε:

$$TR = I\alpha$$

όπου θεωρούμε θετική φορά τη φορά περιστροφής του σώματος όπως δείχνει το σχήμα (επειδή μας ενδιαφέρει η απόλυτος τιμή του ω). Από όλες τις δυνάμεις, μόνο η τριβή προκαλεί ροπή ίση με TR αφού οι υπόλοιπες δυνάμεις δρουν στο κέντρο μάζας. Η ροπή αδράνειας ενός κυλίνδρου είναι ίση με

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

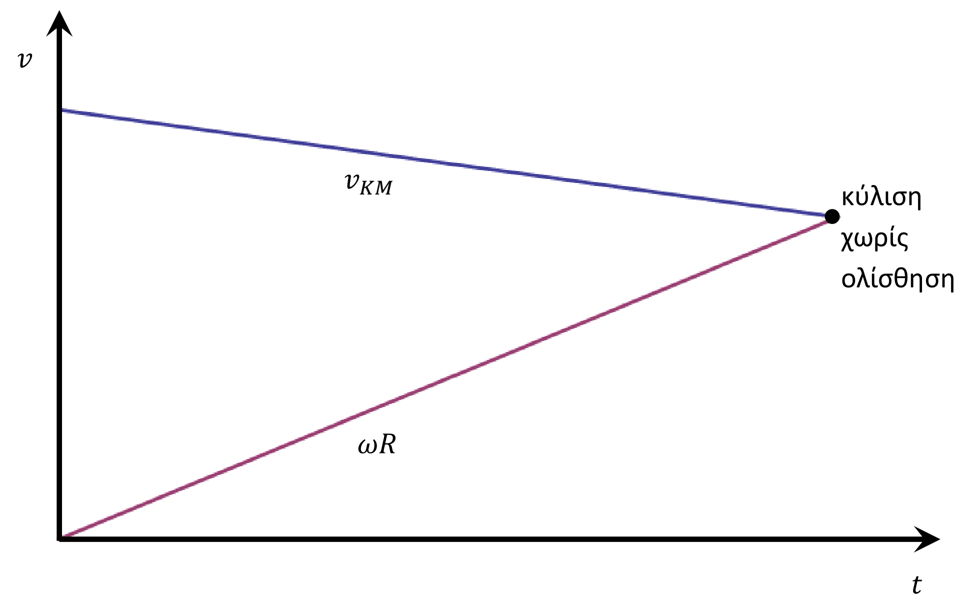
Επομένως ο κύλινδρος αποκτάει γωνιακή επιτάχυνση ίση με

$$\alpha = \frac{2T}{mR}$$

και έτσι εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση γύρω από το Κ.Μ. με γωνιακή ταχύτητα ω που δίνεται από την

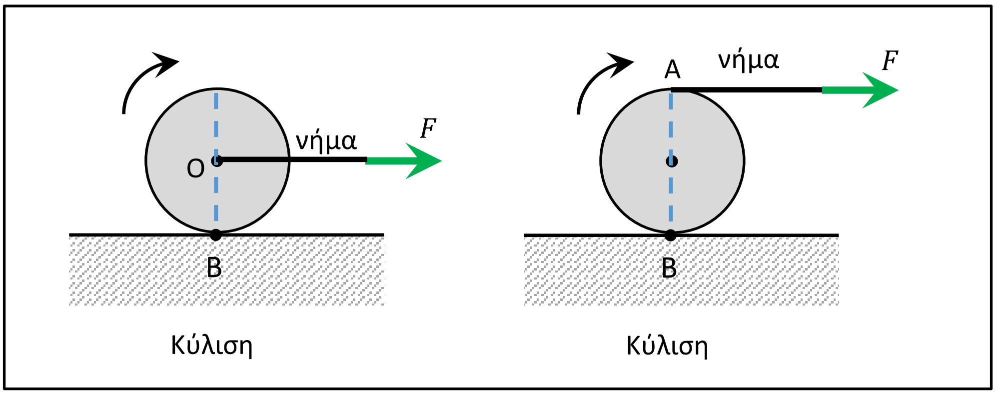
$$\omega = 0 + \alpha t = \frac{2T}{mR}t$$

(η αρχική γωνιακή ταχύτητα είναι 0 σύμφωνα με τα δεδομένα). Οι γραφικές παραστάσεις των v_{KM} και ωR συναρτήσει του t φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Ενώ η πρώτη είναι μια φθίνουσα γραμμική συνάρτηση, η δεύτερη είναι μια αύξουσα γραμμική συνάρτηση. Δηλαδή όσο περνάει ο χρόνος, το Κ.Μ. επιβραδύνεται γραμμικά αλλά ταυτόχρονα επιταχύνεται η περιστροφική κίνηση γύρω από αυτό. Όταν οι δυο ευθείς; συναντηθούν, τότε ισχύει η συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση $v_{KM} = \omega R$ και από κει και πέρα το σώμα παραμένει σε κύλιση. Ο αναγνώστης μπορεί να δει ως άσκηση ότι σε αυτή την περίπτωση η τριβή αλλάζει φορά και έτσι και οι δυο κινήσεις γίνονται επιβραδυνόμενες μέχρι να σταματήσει ο κύλινδρος.

10.9 Σε πολλά προβλήματα κύλισης, είναι κάπως δύσκολο να μαντέψουμε την φορά της δύναμης της τριβής. Π.χ. θεωρήστε το παρακάτω σχήμα όπου μια οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 0.8\ N$ έλκει ένα λεπτό δίσκο μάζας $M = 0.2\ kg$ και ακτίνας $R = 0.1\ m$ οποίος εκτελεί κύλιση επάνω σε οριζόντιο δάπεδο, με τη δύναμη να εφαρμόζεται μέσω ιδανικού νήματος σε δυο διαφορετικά σημεία: Μια στον άξονα του δίσκου O και μια στο υψηλότερο σημείο του A, με το νήμα τυλιγμένο γύρω από το τροχό. Στην πρώτη περίπτωση, η δύναμη τείνει να μεταφέρει όλο το δίσκο προς τα δεξιά, και άρα και το χαμηλότερο σημείο του B, και επομένως η τριβή είναι προς τα αριστερά. Αντιθέτως στην δεύτερη περίπτωση, η δύναμη τείνει να μεταφέρει αλλά και να περιστρέψει το δίσκο και η μεν μεταφορά τείνει να μετακινήσει το B προς τα δεξιά, η δε περιστροφή όμως, τείνει να μετακινήσει το B προς τα αριστερά. Ανάλογα με το ποια κίνηση θα υπερισχύσει, καθορίζει και την φορά της τριβής η οποία πάντοτε αντιτίθεται στην κίνηση. Για να βρούμε τη φορά της τριβής στην περίπτωση που η δύναμη εφαρμόζεται στο A, θεωρούμε αρχικά ότι για ένα δευτερόλεπτο ο δίσκος δεν αγγίζει το δάπεδο. (α) Με την εφαρμογή μόνο της F βρείτε την ταχύτητα του σημείου B στο τέλος του ενός δευτερολέπτου. (β) Θεωρήστε τώρα ότι ο τροχός είναι σε επαφή με το δάπεδο και από την απάντησή σας στο ερώτημα α, αποφανθείτε για την φορά της τριβής και βρείτε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του τροχού.



Απάντηση: (α) $8\ m/s$, (β) $10.7\ m/s^2$

Λύση:

(α) Θα εργαστούμε όπως στο προηγούμενο πρόβλημα. Από τον νόμο του Νεύτωνα για την μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας έχουμε:

$$F = ma_{KM}$$

Επομένως το κέντρο μάζας αποκτάει επιτάχυνση σταθερού μέτρου $a_{KM} = F/m$ και έτσι το Κ.Μ. εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με ταχύτητα v_{KM} που δίνεται από την

$$v_{KM} = 0 + at = \frac{F}{m}t = \frac{0.8}{0.2} \times 1 = 4\ m/s$$

Από τον νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου γύρω από το κέντρο μάζας έχουμε:

$$FR = I\alpha$$

όπου θεωρούμε θετική φορά τη φορά περιστροφής του σώματος όπως δείχνει το σχήμα (θα βρούμε την απόλυτος τιμή του ω). Η ροπή αδράνειας του δίσκου είναι ίση με

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

Επομένως ο δίσκος αποκτάει γωνιακή επιτάχυνση ίση με

$$\alpha = \frac{2F}{mR}$$

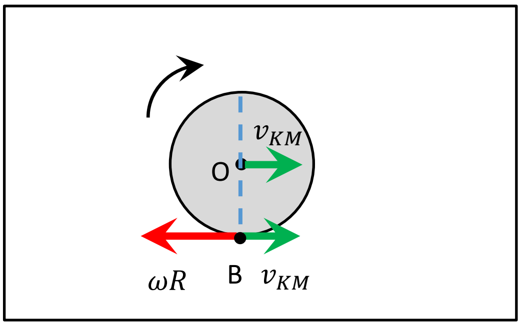
και έτσι εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση γύρω από το Κ.Μ. με γωνιακή ταχύτητα ω που δίνεται από την

$$\omega = 0 + \alpha t = \frac{2F}{mR}t$$

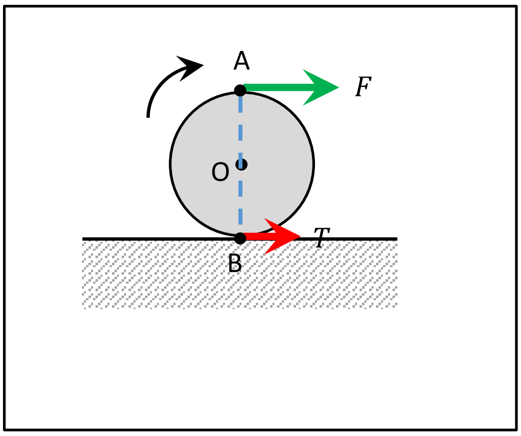
Η αντίστοιχη γραμμική ταχύτητα στο σημείο Β είναι ίση με

$$\omega R = \frac{2F}{m}t = \frac{2 \times 0.8}{0.2} \times 1 = 8\, m/s$$

είναι δηλαδή διπλάσια από την v_{KM} και είναι προς τα αριστερά όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



(β) Αφού η γραμμική ταχύτητα ωR στο σημείο B είναι προς τα αριστερά και είναι διπλάσια της v_{KM}, το σημείο B τείνει προς τα αριστερά (θεωρώντας την εφαρμογή μόνο της F). Έτσι μόλις ο δίσκος έρθει σε επαφή με το δάπεδο, η τριβή T θα αντιτεθεί σε αυτή την κίνηση και θα είναι προς τα δεξιά, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Με αυτό τον τρόπο η ωR θα ελαττωθεί ενώ ταυτόχρονα η v_{KM} θα αυξηθεί έως ότου γίνουν ίσες οπότε και θα ικανοποιείται η συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση.



Από κει και πέρα, αφού συνεχίζουμε να έχουμε κύλιση, η T θα αυτοπροσαρμοσθεί ώστε να ισχύει για πάντα η συνθήκη αυτή. Στη μεταφορική κίνηση ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$F + T = ma_{KM}$$

ενώ στην περιστροφική

$$(F - T)R = \frac{1}{2}mR^2 a$$

(θεωρούμε την ίδια φορά της περιστροφής όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα). Χρησιμοποιώντας την συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση $a_{KM} = R\alpha$ και απαλείφοντας την τριβή T, οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$2F = \frac{3}{2} m a_{KM}$$

οπότε

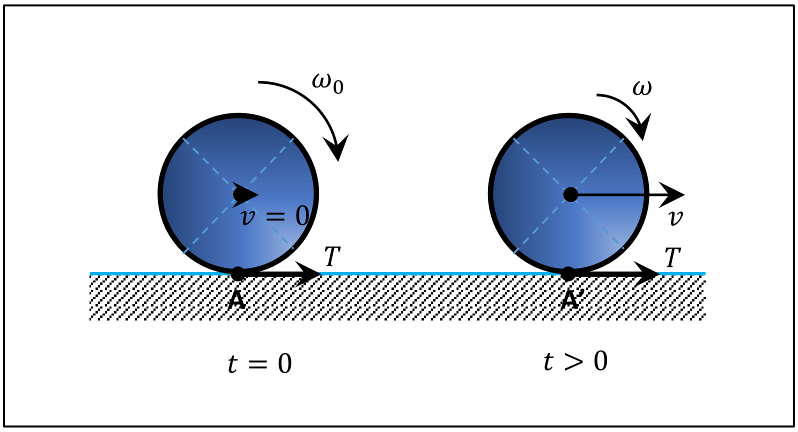
$$a_{KM} = \frac{4F}{3m} = \frac{4 \times 0.8}{3 \times 0.1} = 10.7\ m/s^2$$

10.10 Λεπτός δίσκος ακτίνας R και μάζας m ο οποίος κρατιέται ελάχιστα επάνω από οριζόντιο δάπεδο με τον άξονά του παράλληλα με το έδαφος, περιστρέφεται με μεγάλη γωνιακή ταχύτητα ω_0 γύρω από τον άξονά του. Στο $t = 0$ ο δίσκος αφήνεται ελεύθερος και έρχεται σε επαφή με το δάπεδο και εκτελεί μια σύνθετη κίνηση η οποία αρχικά είναι κύλιση με ολίσθηση αλλά η οποία μετά από χρόνο t_1 καταλήγει σε κύλιση χωρίς ολίσθηση. Να βρεθούν (α) ο χρόνος t_1. (β) η απόσταση που διανύει το κέντρο μάζας και ο αριθμός των περιστροφών του δίσκου μέσα στο χρονικό διάστημα $0 \to t_1$. (γ) Το έργο (μεταφορικό και περιστροφικό) της τριβής στο ίδιο χρονικό διάστημα. Δίνεται ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μ του δίσκου με το δάπεδο.

Απάντηση: $-2m{\omega_0}^2R^2/9$

Λύση:

(α) Αρχικά όταν ο δίσκος έρθει σε επαφή με το δάπεδο, έχει μόνο γωνιακή ταχύτητα ω_0 ενώ η μεταφορική ταχύτητα v του Κ.Μ. είναι μηδέν. Επομένως δεν ικανοποιείται η συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση $v = \omega R$. Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, η τριβή σε αυτή τη φάση πρέπει να είναι τέτοια που να αυξήσει το v και ταυτόχρονα να ελαττώσει το ω ώστε να επιτευχθεί συμβιβασμός και να ικανοποιηθεί η συνθήκη κύλισης. Άρα η τριβή πρέπει να είναι προς τα δεξιά.



Αυτό εξηγείται και με την σχετική κίνηση του σημείου επαφής Α του δίσκου. Θυμηθείτε ότι η τριβή πάντα αντιτίθεται στη σχετική κίνηση των δυο επιφανειών που βρίσκονται σε επαφή. Αρχικά, λόγω της μεγάλης ω_0 και μηδενικής v, το Α τείνει να ολισθήσει προς τα αριστερά του σχήματος και επομένως η τριβή, η οποία είναι αναγκαστικά τριβή ολίσθησης, πρέπει να έχει τη φορά που δείχνεται στο σχήμα. Το μέτρο της δίνεται από την

$$T = \mu N = \mu m g$$

Η τριβή αυτή δημιουργεί ροπή ίση με

$$\tau = TR = \mu m g R$$

Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα για μεταφορική και περιστροφική κίνηση μπορούμε να υπολογίσουμε τις δυο επιταχύνσεις (μεταφορική του Κ.Μ. και γωνιακή):

$$a_{KM} = \frac{T}{m} = \mu g$$

και

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{\mu m g R}{\frac{1}{2} m R^2} = \frac{2\mu g}{R}$$

Αφού αυτές οι επιταχύνσεις είναι σταθερές, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις της ομαλά επιταχυνόμενης (μεταφορικής) και ομαλά επιβραδυνόμενης (περιστροφικής) κίνησης:

$$v = a_{KM} t = \mu g t$$

και

$$\omega = \omega_0 - \alpha t = \omega_0 - \frac{2\mu g}{R} t$$

Τη χρονική στιγμή $t = t_1$ ικανοποιείται η συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση $v = \omega R$ και επομένως

$$\mu g t_1 = \omega_0 R - 2\mu g t_1 => t_1 = \frac{\omega_0 R}{3\mu g}$$

(β) Από τους νόμους της ομαλά επιταχυνόμενης (μεταφορικής) και ομαλά επιβραδυνόμενης (περιστροφικής) κίνησης έχουμε για την απόσταση

$$x_1 = \frac{1}{2} a_{KM} {t_1}^2 = \frac{1}{2} \mu g \left(\frac{\omega_0 R}{3\mu g}\right)^2 = \frac{{\omega_0}^2 R^2}{18\mu g}$$

και για τη γωνία

$$\theta_1 = \omega_0 t_1 - \frac{1}{2} \alpha {t_1}^2 = t_1 \left(\omega_0 - \frac{1}{2} \alpha t_1\right) = \frac{\omega_0 R}{3\mu g} \left(\omega_0 - \frac{1}{2} \frac{2\mu g}{R} \frac{\omega_0 R}{3\mu g}\right) = \frac{2{\omega_0}^2 R}{9\mu g}$$

Ο αριθμός των περιστροφών είναι ίσος με

$$n_1 = \frac{\theta_1}{2\pi} = \frac{{\omega_0}^2 R}{9\pi\mu g}$$

(γ) Εφόσον η τριβή είναι σταθερή και κατά μήκος της κίνησης του Κ.Μ., το μεταφορικό έργο είναι απλά το γινόμενο της δύναμης επί την μετατόπιση

$$W_M = Tx_1 = \mu mg \frac{{\omega_0}^2 R^2}{18\mu g} = \frac{m{\omega_0}^2 R^2}{18}$$

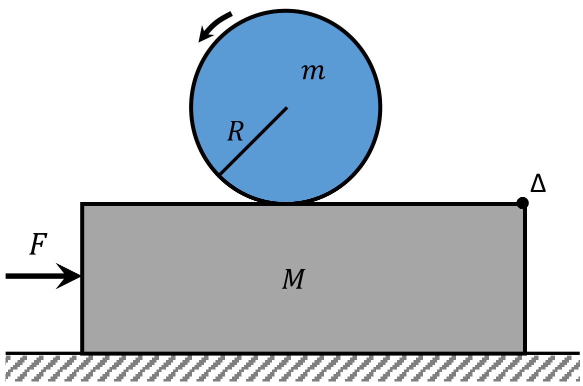
Ομοίως το περιστροφικό έργο είναι απλά το γινόμενο της ροπής επί την μεταβολή της γωνίας

$$W_\Pi = -\tau\theta_1$$

Το αρνητικό πρόσημο έχει να κάνει με το ότι η ροπή αντιτίθεται στην αύξηση της γωνίας. Αντικαθιστώντας

$$W_\Pi = -\mu mgR \frac{2{\omega_0}^2 R}{9\mu g} = -\frac{2m{\omega_0}^2 R^2}{9}$$

10.11 Στο παρακάτω σχήμα, μια συμπαγής σφαίρα μάζας m και ακτίνας R βρίσκεται αρχικά τοποθετημένη επάνω σε ορθογώνιο κιβώτιο μάζας M και μήκους L, στο δεξί άκρο Δ της επάνω επιφάνειας του κιβωτίου. Το κιβώτιο βρίσκεται επάνω σε λείο δάπεδο χωρίς τριβές. Κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ και ενώ το σύστημα των δυο σωμάτων ηρεμεί, εφαρμόζεται στο κιβώτιο μια οριζόντια δύναμη $F(t) = kt^2$ προς τα δεξιά όπου k μια θετική σταθερά και t ο χρόνος. Ως αποτέλεσμα αυτής της δύναμης, το κιβώτιο επιταχύνεται προς τα δεξιά και λόγω της τριβής μεταξύ των δυο σωμάτων, η σφαίρα εκτελεί <u>κύλιση χωρίς ολίσθηση</u> επάνω στην επιφάνεια του κιβωτίου με μια σχετική ταχύτητα προς τα αριστερά (σε σχέση με το κιβώτιο). Να βρεθεί σε ποια χρονική στιγμή η σφαίρα θα πέσει από το πίσω μέρος του κιβωτίου.



<u>Απάντηση</u>: ${t_1}^2 = 12L(7M + 2m)/5k$

Λύση: Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται το ζεύγος τριβών T που δρουν στα δυο σώματα και οι οριζόντιες ταχύτητες, V για το κιβώτιο και $V-v$ για το Κ.Μ. της σφαίρας όπου σύμφωνα με την εκφώνηση, το v είναι η σχετική ταχύτητα της σφαίρας (προς τα αριστερά) ως προς την επιφάνεια του κιβωτίου. Από τον νόμο του Νεύτωνα για το κιβώτιο (μεταφορά) και την σφαίρα (μεταφορά και περιστροφή) έχουμε αντίστοιχα

$$F-T=M\frac{dV}{dt}$$

$$T=m\frac{d}{dt}(V-v)$$

$$TR=I\frac{d\omega}{dt}$$

Αφού η σφαίρα κινείται με σχετική ταχύτητα v ως προς την πάνω επιφάνεια του κιβωτίου και εκτελεί κύλιση, τότε $\omega=v/R$. Για την ροπή αδράνειας συμπαγούς σφαίρας γνωρίζουμε ότι $I=2/5mR^2$. Έτσι η τρίτη εξίσωση παραπάνω γίνεται

$$T=\frac{2}{5}m\frac{dv}{dt}$$

η οποία όταν αντικατασταθεί στην δεύτερη, οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$$\frac{2}{5}m\frac{dv}{dt}=m\frac{d}{dt}(V-v)$$

από όπου παίρνουμε ότι

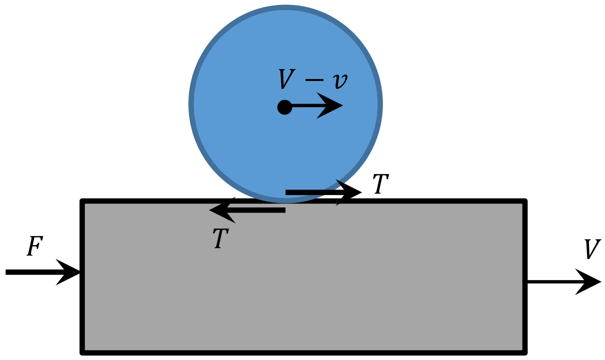
$$\frac{dV}{dt}=\frac{7}{5}\frac{dv}{dt}$$

Όταν αυτό το αποτέλεσμα αντικατασταθεί στην πρώτη εξίσωση, τότε έχουμε

$$F-\frac{2}{5}m\frac{dv}{dt}=M\frac{7}{5}\frac{dv}{dt}$$

ή

$$F=\frac{1}{5}(7M+2m)\frac{dv}{dt}$$



Από τα δεδομένα $F = kt^2$ οπότε

$$\frac{1}{5}(7M + 2m)\frac{dv}{dt} = kt^2$$

από όπου με απλή ολοκλήρωση παίρνουμε

$$v(t) = \frac{5k}{7M + 2m}\frac{t^3}{3} + c$$

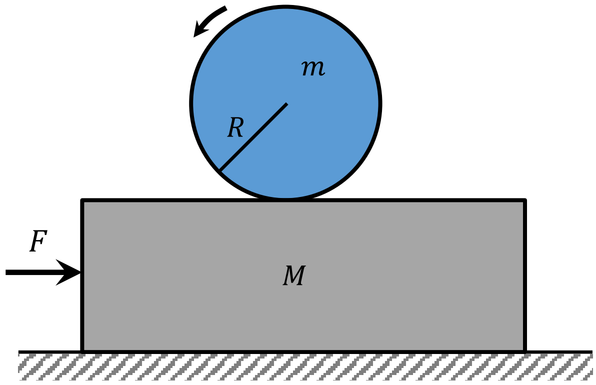
Από την αρχική συνθήκη $v(0) = 0$ (ηρεμία) παίρνουμε $c = 0$. Η $v(t)$ είναι η σχετική ταχύτητα της σφαίρας ως προς το κιβώτιο και άρα η ολοκλήρωσή της μας δίνει την αντίστοιχη σχετική απόσταση x επάνω στο κιβώτιο:

$$x(t) = \frac{5k}{7M + 2m}\frac{t^4}{12}$$

Για να πέσει η σφαίρα από το κιβώτιο, πρέπει να διανύσει απόσταση ίση με το μήκος του L και επομένως απαιτείται χρόνος t_1 που δίνεται από την

$$t_1 = \sqrt[4]{\frac{12L(7M + 2m)}{5k}}$$

10.12 Στο παρακάτω σχήμα, ένας συμπαγής κύλινδρος μάζας m και ακτίνας R βρίσκεται αρχικά τοποθετημένος επάνω σε ορθογώνιο κιβώτιο μάζας M και μήκους L, στο μέσο της οριζόντιας απόστασης της επάνω επιφάνειας του κιβωτίου. Το κιβώτιο βρίσκεται επάνω σε λείο δάπεδο χωρίς τριβές. Κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ και ενώ το σύστημα των δυο σωμάτων ηρεμεί, εφαρμόζεται στο κιβώτιο μια οριζόντια δύναμη $F(t) = kt$ προς τα δεξιά όπου k μια θετική σταθερά και t ο χρόνος. Ως αποτέλεσμα αυτής της δύναμης, το κιβώτιο επιταχύνεται προς τα δεξιά και λόγω της τριβής μεταξύ των δυο σωμάτων, ο κύλινδρος εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση επάνω στην επιφάνεια του κιβωτίου με μια σχετική ταχύτητα προς τα αριστερά (σε σχέση με το κιβώτιο). Να βρεθεί σε ποια χρονική στιγμή ο κύλινδρος θα πέσει από το πίσω μέρος του κιβωτίου.



<u>Απάντηση</u>: $t_1{}^3 = 3L(3M+m)/(2k)$

<u>Λύση</u>: Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται το ζεύγος τριβών T που δρουν στα δυο σώματα και οι οριζόντιες ταχύτητες, V για το κιβώτιο και $V-v$ για το Κ.Μ. του κυλίνδρου όπου σύμφωνα με την εκφώνηση, το v είναι η σχετική ταχύτητα του κυλίνδρου (προς τα αριστερά) ως προς την επιφάνεια του κιβωτίου. Από τον νόμο του Νεύτωνα για το κιβώτιο (μεταφορά) και τον κύλινδρο (μεταφορά και περιστροφή) έχουμε αντίστοιχα

$$F - T = M\frac{dV}{dt}$$

$$T = m\frac{d}{dt}(V-v)$$

$$TR = I\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{1}{R}\frac{dv}{dt}\right)$$

Αφού ο κύλινδρος κινείται με σχετική ταχύτητα v ως προς την πάνω επιφάνεια του κιβωτίου και εκτελεί κύλιση, τότε $\omega = v/R$. Για την ροπή αδράνειας συμπαγούς κυλίνδρου γνωρίζουμε ότι $I = 1/2mR^2$. Έτσι η τρίτη εξίσωση παραπάνω γίνεται

$$T = \frac{1}{2}m\frac{dv}{dt}$$

η οποία όταν αντικατασταθεί στην δεύτερη, οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$$\frac{1}{2}m\frac{dv}{dt} = m\frac{d}{dt}(V-v)$$

από όπου παίρνουμε ότι

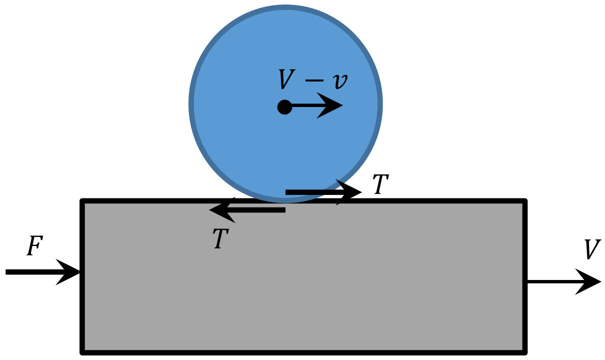
$$\frac{dV}{dt} = \frac{3}{2}\frac{dv}{dt}$$

Όταν αυτό το αποτέλεσμα αντικατασταθεί στην πρώτη εξίσωση, τότε έχουμε

$$F - \frac{1}{2}m\frac{dv}{dt} = M\frac{3}{2}\frac{dv}{dt}$$

ή

$$F = \frac{1}{2}(m + 3M)\frac{dv}{dt}$$



Από τα δεδομένα $F = kt$ οπότε

$$\frac{1}{2}(3M + m)\frac{dv}{dt} = kt$$

από όπου με απλή ολοκλήρωση παίρνουμε

$$v(t) = \frac{k}{3M + m}t^2 + c$$

Από την αρχική συνθήκη $v(0) = 0$ (ηρεμία) παίρνουμε $c = 0$. Η $v(t)$ είναι η σχετική ταχύτητα του κυλίνδρου ως προς το κιβώτιο και άρα η ολοκλήρωσή της μας δίνει την αντίστοιχη σχετική απόσταση x επάνω στο κιβώτιο:

$$x(t) = \frac{k}{3M + m}\frac{t^3}{3}$$

Για να πέσει ο κύλινδρος από το κιβώτιο, πρέπει να διανύσει απόσταση ίση με το μισό μήκος του $L/2$ και επομένως απαιτείται χρόνος t_1 που δίνεται από την

$$t_1 = \sqrt[3]{\frac{3L(3M + m)}{2k}}$$

Θεώρημα Έργου Ενέργειας στην Κύλιση

10.1 Στο Πρόβλημα 10.10 να σχολιασθεί εάν ισχύει το θεώρημα έργου-ενέργειας μεταξύ των χρόνων $t = 0$ και $t = t_1$.

<u>Λύση</u>:

Σύμφωνα με το θεώρημα έργου ενέργειας, πρέπει να έχουμε $\mathit{\Delta} K = W$ όπου W είναι το συνολικό έργο των δυνάμεων που έδρασαν μεταξύ του αρχικού $t = 0$ και του τελικού χρόνου t_1 και $\mathit{\Delta} K = K_1 - K_0$ η διαφορά της κινητικής ενέργειας μεταξύ αυτών των στιγμών. Αρχικά έχουμε μόνο περιστροφική κίνηση και άρα

$$K_0 = \frac{1}{2} I {\omega_0}^2$$

Αντιθέτως, στην τελική στιγμή έχουμε περιστροφή και μεταφορά και έτσι

$$K_1 = \frac{1}{2} I {\omega_1}^2 + \frac{1}{2} m {v_1}^2$$

Επομένως

$$\mathit{\Delta} K = K_1 - K_0 = \frac{1}{2} I ({\omega_1}^2 - {\omega_0}^2) + \frac{1}{2} m {v_1}^2$$

$$\mathit{\Delta} K = \frac{1}{2} I (\omega_1 - \omega_0)(\omega_1 + \omega_0) + \frac{1}{2} m {v_1}^2$$

Αντικαθιστώντας

$$\mathit{\Delta} K = \frac{1}{2} I (\omega_0 - \alpha t_1 - \omega_0)(\omega_0 - \alpha t_1 + \omega_0) + \frac{1}{2} m {v_1}^2$$

$$\mathit{\Delta} K = \frac{1}{2} I (-\alpha t_1)(2\omega_0 - \alpha t_1) + \frac{1}{2} m (\mu g t_1)^2$$

$$\mathit{\Delta} K = \frac{1}{2}\frac{1}{2} m R^2 (-\frac{2\mu g}{R}\frac{\omega_0 R}{3\mu g})(2\omega_0 - \frac{2\mu g}{R}\frac{\omega_0 R}{3\mu g}) + \frac{1}{2} m \left(\mu g \frac{\omega_0 R}{3\mu g}\right)^2$$

$$\mathit{\Delta} K = \frac{1}{4} m R^2 (-\frac{2\omega_0}{3})(2\omega_0 - \frac{2\omega_0}{3}) + \frac{1}{2} m \left(\frac{\omega_0 R}{3}\right)^2$$

$$\mathit{\Delta} K = \frac{1}{4} m R^2 (-\frac{2\omega_0}{3})(2\omega_0 - \frac{2\omega_0}{3}) + \frac{1}{2} m \left(\frac{\omega_0 R}{3}\right)^2$$

$$\mathit{\Delta} K = -\frac{2}{9} m {\omega_0}^2 R^2 + \frac{1}{18} m {\omega_0}^2 R^2$$

ή

$$\mathit{\Delta} K = -\frac{1}{6} m {\omega_0}^2 R^2$$

Από την άλλη μεριά, το συνολικό έργο ισούται με

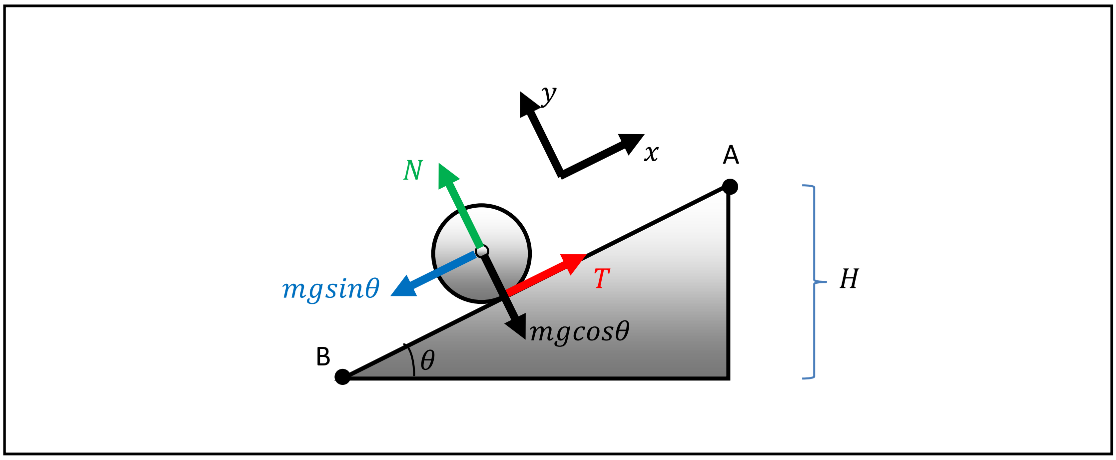
$$W = W_M + W_\Pi = \frac{m {\omega_0}^2 R^2}{18} - \frac{2 m {\omega_0}^2 R^2}{9} = -\frac{1}{6} m {\omega_0}^2 R^2$$

ακριβώς όσο το $\mathit{\Delta} K$ και επομένως ισχύει το θεώρημα έργου-ενέργειας, όπως αναμένεται.

10.14 Συμπαγής κύλινδρος μάζας $m = 0.2\,kg$ και ακτίνας $R = 0.1\,m$ αφήνεται να κυλήσει ελεύθερα σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\theta = 25^0$ από ύψος $H = 0.6\,m$ με αρχική ταχύτητα $v_0 = 1\,m/s$ κατά μήκος του επιπέδου. Να βρεθεί η γραμμική ταχύτητα του Κ.Μ. του όταν φτάσει σε ύψος μηδέν με τη βοήθεια της αρχής της διατήρησης της ενέργειας. Ο συντελεστής στατικής τριβής είναι $\mu = 0.4$ και μπορείτε να πάρετε $g \approx 10\,m/s^2$ για ευκολία

<u>Απάντηση</u>: $3\,m/s$

<u>Λύση</u>:



(α) Έστω A και B αντίστοιχα το υψηλότερο και χαμηλότερο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου. Εφόσον σε αυτό το πρόβλημα υπάρχουν τόσο συντηρητικές (βάρος) όσο και μη συντηρητικές δυνάμεις (τριβή), πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας (Α.Δ.Ε.) στη πιο γενική μορφή της Εξ. 6.16

$$K_A + U_A + \widetilde{W}_{AB} = K_B + U_B$$

ώστε να συμπεριλάβει και το έργο $\widetilde{W}_{AB}$ των μη συντηρητικών δυνάμεων δηλαδή το έργο της τριβής. Ως γνωστόν, η δυναμική ενέργεια του βάρους είναι ίση με $U = mgh$ όπου h είναι το ύψος από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, δηλαδή από το B. Λόγω του ότι έχουμε τόσο μεταφορά όσο και περιστροφή, πρέπει σύμφωνα με τον Πίνακα 10.1 να συμπεριλάβουμε και τις δυο αντίστοιχες κινητικές ενέργειες. Έτσι η Α.Δ.Ε γράφεται:

$$\frac{1}{2}m{v_A}^2 + \frac{1}{2}I{\omega_A}^2 + mgy_A + \widetilde{W}_{AB} = \frac{1}{2}m{v_B}^2 + \frac{1}{2}I{\omega_B}^2 + mgy_B$$

Στην παραπάνω έκφραση $h_A = H$ και $h_B = 0$ είναι τα ύψη των δυο σημείων και έτσι

$$\frac{1}{2}m{v_A}^2 + \frac{1}{2}I{\omega_A}^2 + mgH + \widetilde{W}_{AB} = \frac{1}{2}m{v_B}^2 + \frac{1}{2}I{\omega_B}^2$$

Θεωρούμε ότι ο κύλινδρος εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση και έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε την Εξ. 10.6. Η παραπάνω τότε γίνεται

$$\frac{1}{2}m{v_A}^2 + \frac{1}{2R^2}I{v_A}^2 + mgH + \widetilde{W}_{AB} = \frac{1}{2}m{v_B}^2 + \frac{1}{2R^2}I{v_B}^2$$

Από τον Πίνακα 8.1 η ροπή αδράνειας ενός κυλίνδρου είναι ίση με $I = 1/2mR^2$ και έτσι έχουμε

$$\frac{1}{2}m{v_A}^2 + \frac{1}{2R^2}\frac{1}{2}mR^2{v_A}^2 + mgH + \widetilde{W}_{AB} = \frac{1}{2}m{v_B}^2 + \frac{1}{2R^2}\frac{1}{2}mR^2{v_B}^2$$

ή

$$\frac{3}{4}m{v_A}^2 + mgH + \widetilde{W}_{AB} = \frac{3}{4}m{v_B}^2$$

Τι μπορούμε να πούμε για το έργο $\widetilde{W}_{AB}$; Θεωρώντας ότι η τριβή T είναι σταθερή, το έργο της μεταφοράς είναι ίσο με $\widetilde{W}_{AB}^{\mu\varepsilon\tau} =-Tx$. Το μείον είναι επειδή η τριβή αντιτίθεται στην κίνηση (θυμηθείτε ότι στον ορισμό του έργου υπάρχει ένα συνημίτονο και εδώ $cos180^0 = -1$). Επιπλέον η τριβή προκαλεί θετική ροπή TR γύρω από το Κ.Μ. της σφαίρας και έτσι το έργο της περιστροφής ισούται με

$$\widetilde{W}_{AB}^{\pi\varepsilon\rho} = \int_0^\theta \tau d\theta = TR\int_0^\theta d\theta = TR\theta$$

όπου θεωρήθηκε ότι στην αρχική θέση Α η αρχική γωνία είναι 0. Όμως εάν θεωρήσουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση ισχύει $x = R\theta$ και έτσι το παραπάνω έργο της ροπής ισούται με Tx. Επομένως το συνολικό έργο της τριβής είναι ίσο με $\widetilde{W}_{AB} = \widetilde{W}_{AB}^{\mu\varepsilon\tau} + \widetilde{W}_{AB}^{\pi\varepsilon\rho} = -Tx + Tx = 0$ δηλαδή η τριβή επιβραδύνει την μεταφορά αλλά αντιθέτως επιταχύνει την περιστροφή και έτσι το συνολικό έργο είναι μηδέν δηλαδή η τριβή ούτε προσθέτει ούτε αφαιρεί ενέργεια!!! Επομένως η Α.Δ.Ε γίνεται

$$\frac{3}{4}m{v_A}^2 + mgH = \frac{3}{4}m{v_B}^2$$

Η αρχική ταχύτητα είναι v_0 οπότε

$$\frac{3}{4}m{v_0}^2 + mgH = \frac{3}{4}m{v_B}^2$$

Λύνοντας ως προς v_B και αντικαθιστώντας τα δεδομένα, οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$v_B = \sqrt{{v_0}^2 + \frac{4}{3}gH} = \sqrt{1^2 + \frac{4}{3}10 \times 0.6} = 3\ m/s$$

Παρατηρούμε ότι στο παραπάνω αποτέλεσμα δεν έγινε χρήση πολλών από τα δεδομένα όπως η γωνία θ, η μάζα m, ο συντελεστής τριβής μ αλλά ούτε και της ακτίνας R. Προφανώς το πρόβλημα δεν εξαρτάται από όλους αυτούς τους παράγοντες αλλά εάν λύναμε το πρόβλημα με την βοήθεια του 2ου νόμου του Νεύτωνα μαζί με τις εξισώσεις της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης, θα χρειαζόμασταν όλα αυτά τα νούμερα π.χ. θα έπρεπε να υπολογίσουμε ρητώς την δύναμη της επιτάχυνσης $mgsin\theta$ αλλά και της τριβής $\mu mgcos\theta$. Βλέπουμε δηλαδή την ομορφιά της χρήσης της αρχής Α.Δ.Ε. η οποία έχει να κάνει με αρχικές και τελικές τιμές και όχι με τις ενδιάμεσες λεπτομέρειες.

Η μόνη παράμετρος που επηρεάζει το παραπάνω τελικό αποτέλεσμα είναι το $1/2$ στην ροπή αδράνειας του συμπαγούς κυλίνδρου, δηλαδή εάν είχαμε ένα κοίλο κύλινδρο, αυτός ο παράγοντας θα ήταν διαφορετικός και θα καταλήγαμε σε άλλο νούμερο, δείτε το επόμενο πρόβλημα.

10.15 Να λυθεί το προηγούμενο πρόβλημα εάν ο συμπαγής κύλινδρος αντικατασταθεί από ένα λεπτότοιχο κοίλο κύλινδρο (σωλήνας) ίσης μάζας και ακτίνας με αυτές του συμπαγούς κυλίνδρου. Να συγκριθούν τα δυο αποτελέσματα.

<u>Απάντηση</u>: $2.64\ m/s$

<u>Λύση</u>: Όλοι οι υπολογισμοί είναι ακριβώς όπως στο προηγούμενο πρόβλημα μέχρις το σημείο όπου αντικαθιστούμε τη ροπή αδράνειας του κυλίνδρου:

$$\frac{1}{2}m{v_A}^2 + \frac{1}{2R^2}I{v_A}^2 + mgH + \widetilde{W}_{AB} = \frac{1}{2}m{v_B}^2 + \frac{1}{2R^2}I{v_B}^2$$

Από τον Πίνακα 8.1 η ροπή αδράνειας ενός λεπτότοιχου κυλίνδρου (σωλήνας) είναι ίση με $I = mR^2$ και έτσι έχουμε

$$\frac{1}{2}m{v_A}^2 + \frac{1}{2R^2}mR^2{v_A}^2 + mgH + \widetilde{W}_{AB} = \frac{1}{2}m{v_B}^2 + \frac{1}{2R^2}mR^2{v_B}^2$$

ή

$$m{v_A}^2 + mgH + \widetilde{W}_{AB} = m{v_B}^2$$

Αντικαθιστώντας $\widetilde{W}_{AB} = 0$, $v_A = v_0$ και τα δεδομένα νούμερα, οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$v_B = \sqrt{{v_0}^2 + gH} = \sqrt{1^2 + 10 \times 0.6} = 2.64\, m/s$$

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω αποτέλεσμα είναι μικρότερο από αυτό του προηγούμενου προβλήματος. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού ο κοίλος κύλινδρος έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας από τον αντίστοιχο συμπαγή κύλινδρο αφού η ίδια μάζα κατανέμεται σε μεγαλύτερη ακτίνα κατά μέσο όρο. Έτσι είναι δυσκολότερο να περιστρέψουμε τον κοίλο κύλινδρο, εξ’ ου και η μικρότερη τελική ταχύτητα.

11. ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Απλός Αρμονικός Ταλαντωτής

11.1 Σημειακό σώμα μάζας $m = 50\ g$ είναι προσδεμένο σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $k = 1.8\ N/m$ το οποίο έχει το φυσικό του μήκος, επάνω σε λείο δάπεδο χωρίς τριβές. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, η μάζα τοποθετείται σε τέτοια θέση ώστε το ελατήριο να έχει παραμορφωθεί κατά $10\ cm$ και ακολούθως αφήνεται ελεύθερη. Να βρεθεί η παραμόρφωση του ελατηρίου κατά τη χρονική στιγμή $2\ s$.

Απάντηση: $8.44\ cm$

Λύση:

Σύμφωνα με την Εξ. 11.2, η απομάκρυνση της μάζας δίνεται από την

$$x(t) = Acos(\omega t + \varphi)$$

η οποία είναι και ταυτόχρονα η παραμόρφωση του ελατηρίου. Πρέπει να προσδιορισθεί η αρχική φάση φ. Όπως γνωρίζουμε από την καθημερινή μας εμπειρία, η αρχική παραμόρφωση είναι και η μέγιστη που μπορεί να έχει το ελατήριο και έτσι $x(0) = A = 10\ cm$. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω, οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$cos(\varphi) = 1$$

που σημαίνει ότι $\varphi = 0$. Το μόνο που μένει είναι να υπολογίσουμε το ω. Από την Εξ. 11.3

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{1.8}{0.05} = 36 => \omega = 6\ rad/s$$

Επομένως η απομάκρυνση της μάζας δίνεται από την

$$x(t) = 10cos(6t)$$

όπου το x είναι σε cm και ο χρόνος σε s. Κατά τη δεομένη χρονική στιγμή $t = 2\ s$, η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι ίση με

$$x(2) = 10cos(12) = 8.44\ cm$$

Σημείωση: Ο υπολογισμός του συνημιτόνου με αριθμομηχανή τσέπης χρειάζεται λίγη προσοχή γιατί πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ακτίνια και όχι μοίρες και ο λόγος είναι ότι το ω στη Φυσική είναι πάντα σε rad/s και έτσι το όρισμα του συνημιτόνου είναι σε rad.

11.2 Σημειακό σώμα μάζας $m = 50\ g$ είναι προσδεμένο σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $k = 1.8\ N/m$ επάνω σε λείο δάπεδο χωρίς τριβές. Η μάζα έχει εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας της έτσι ώστε να εκτελεί απλή αρμονική κίνηση. Παρατηρείται ότι στο $t = 0$ η μάζα διέρχεται από το $x = 0$ το οποίο αντιστοιχεί στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, με μέγιστη ταχύτητα $0.6\,m/s$ προς τα δεξιά. Να βρεθεί η παραμόρφωση του ελατηρίου κατά τη χρονική στιγμή $0.35\,s$.

Απάντηση: $8.6\,cm$

Λύση:

Σύμφωνα με την Εξ. 11.2, η απομάκρυνση της μάζας δίνεται από την

$$x(t) = Acos(\omega t + \varphi)$$

η οποία είναι και ταυτόχρονα η παραμόρφωση του ελατηρίου. Πρέπει να προσδιορισθεί η αρχική φάση φ. Αυτό γίνεται από την αρχική συνθήκη $x(0) = 0$. Αντικαθιστώντας

$$Acos(0 + \varphi) = 0 => \cos(\varphi) = 0$$

που σημαίνει ότι $\varphi = \pm\pi/2$. Ποιο από τα δυο επιλέγουμε; Η απάντηση βρίσκεται στην ταχύτητα της μάζας. Από τα δεδομένα, η ταχύτητα στο $t = 0$ είναι προς τα δεξιά, δηλαδή θετική. Με παραγώγιση βρίσκουμε για την ταχύτητα

$$v(t) = x'(t) = -A\omega sin(\omega t + \varphi)$$

η οποία στο $t = 0$ δίνει

$$v(0) = -A\omega sin(\varphi)$$

Μόνο η επιλογή $\varphi = -\pi/2$ οδηγεί σε θετικό αποτέλεσμα. Επίσης από αυτή την έκφραση φαίνεται ότι η μέγιστη ταχύτητα είναι ίση με $A\omega$ η οποία σύμφωνα με τα δεδομένα είναι ίση με $0.6\,m/s$ από το οποίο συνάγεται ότι $A = 0.1\,m = 10\,cm$. Το μόνο που μένει είναι να υπολογίσουμε το ω. Από την Εξ. 11.3

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{1.8}{0.05} = 36 => \omega = 6\,rad/s$$

Επομένως η απομάκρυνση της μάζας δίνεται από την

$$x(t) = 0.1cos(6t - \pi/2) = 0.1sin(6t)$$

όπου το x είναι σε m και ο χρόνος σε s. Κατά τη δεδομένη χρονική στιγμή $t = 0.35\,s$, η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι ίση με

$$x(0.35) = 0.1sin(6 \times 0.35) = 0.086\,m = 8.6\,cm$$

11.3 Σημειακό σώμα μάζας $m = 0.3\,kg$ είναι προσδεμένο σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $k = 0.9\,N/m$ επάνω σε λείο δάπεδο χωρίς τριβές. Η μάζα έχει εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας της έτσι ώστε να εκτελεί απλή αρμονική κίνηση. Παρατηρείται ότι στο $t = 0$ η μάζα διέρχεται από το $x = 1\,m$ με ταχύτητα $3\,m/s$ προς τα αριστερά, όπου το $x = 0$ αντιστοιχεί στη θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Να βρεθεί η παραμόρφωση του ελατηρίου κατά τη χρονική στιγμή $0.5\,s$.

Απάντηση: $-0.67\ m$

Λύση:

Από την Εξ. 11.3

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{0.9}{0.3} = 3 => \omega = \sqrt{3}\ rad/s$$

Σύμφωνα με την Εξ. 11.2, η απομάκρυνση της μάζας δίνεται από την

$$x(t) = Acos(\omega t + \varphi) = Acos(\sqrt{3}t + \varphi)$$

η οποία είναι και ταυτόχρονα η παραμόρφωση του ελατηρίου. Πρέπει να προσδιορισθεί η αρχική φάση φ. Αυτό γίνεται από την αρχική συνθήκη $x(0) = 1$. Αντικαθιστώντας

$$Acos(\varphi) = 1$$

Εφόσον δεν γνωρίζουμε το A πρέπει να καταφύγουμε στην άλλη δεδομένη αρχική συνθήκη $v(0) = -3\ m/s$ όπου το μείον χρησιμοποιήθηκε επειδή αυτή η ταχύτητα είναι προς τα αριστερά. Με παραγώγιση βρίσκουμε για την ταχύτητα

$$v(t) = x'(t) = -\sqrt{3}Asin(\sqrt{3}t + \varphi)$$

η οποία στο $t = 0$ δίνει

$$v(0) = -\sqrt{3}Asin(\varphi)$$

Επομένως

$$-\sqrt{3}Asin(\varphi) = -3 => Asin(\varphi) = \sqrt{3}$$

Διαιρούμε τις δυο αυτές αρχικές συνθήκες για να απαλειφθεί το πλάτος A και έχουμε

$$\frac{Asin(\varphi)}{Acos(\varphi)} = \sqrt{3} => tan(\varphi) = \sqrt{3} => \varphi = \pi/3$$

(εδώ δεν χρειάζεται να ανησυχούμε για αρνητικό πρόσημο της φ όπως στο προηγούμενο πρόβλημα αφού η συνάρτηση της εφαπτομένης είναι περιττή δηλαδή $tan(-\pi/3) = -\sqrt{3}$ που είναι διαφορετική συνθήκη). Επομένως η απομάκρυνση της μάζας δίνεται από την

$$x(t) = Acos(\sqrt{3}t + \pi/3)$$

Μένει να υπολογίσουμε το πλάτος. Από την αρχική συνθήκη $x(0) = 1$ που όπως είδαμε οδηγεί στην $Acos(\varphi) = 1$ έχουμε

$$A = \frac{1}{cos(\varphi)} = \frac{1}{cos(\pi/3)} = 2\ m$$

Κατά τη δεδομένη χρονική στιγμή $t = 0.5\ s$, η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι ίση με

$$x(0.5) = 2cos\left(0.5\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right) = -0.67\ m$$

11.4 Στο προηγούμενο πρόβλημα να γίνει η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης της μάζας συναρτήσει του χρόνου.

Απάντηση: Ημίτονο μετατοπισμένο κατά $\approx -0.6\ s$ προς τα αριστερά με περίοδο $3.63\ s$

Λύση: Όπως είδαμε στο προηγούμενο πρόβλημα, η απομάκρυνση της μάζας είναι η εξής

$$x(t) = 2cos(\sqrt{3}t + \pi/3)$$

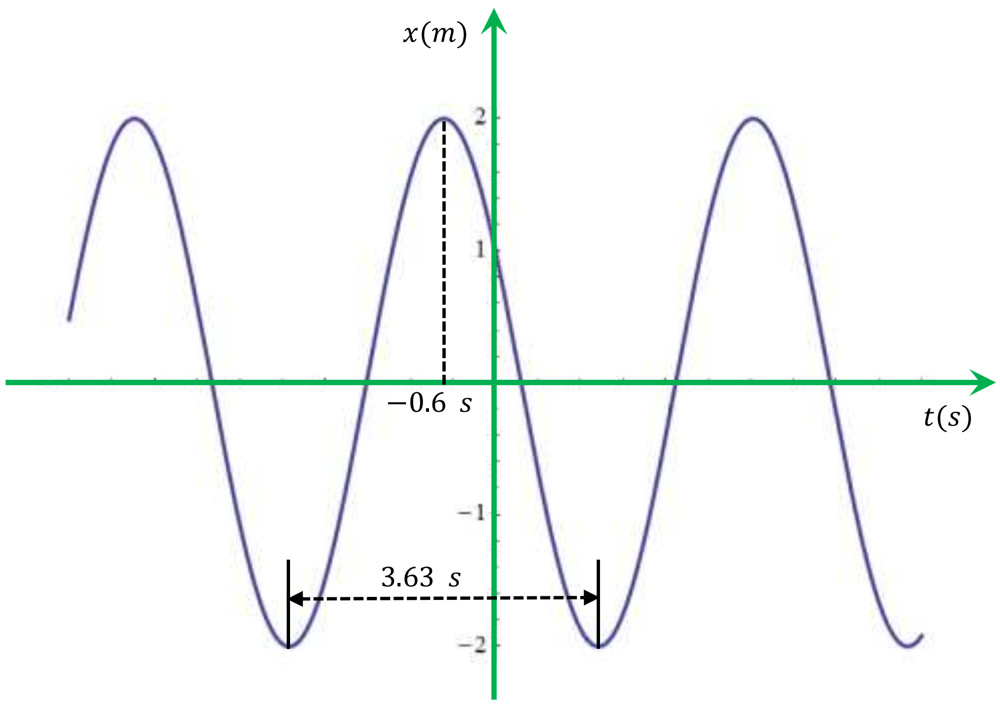
όπου το x είναι σε m και ο χρόνος σε s. Λόγω της αρχικής φάσης $\pi/3$, η συνάρτηση του συνημιτόνου είναι μετατοπισμένη. Πως όμως μπορούμε να βρούμε αυτή τη μετατόπιση; Γνωρίζουμε από τα Μαθηματικά ότι η συνάρτηση αυτή παρουσιάζει μέγιστο στο μηδέν, όταν δηλαδή το όρισμά της είναι μηδέν το οποίο σε αυτή τη περίπτωση γίνεται σε χρόνο t_0 όπου

$$\sqrt{3}t_0 + \frac{\pi}{3} = 0 => t_0 = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx -0.6\ s$$

Το μέγιστο του $x(t)$ είναι το πλάτος $A = 2\ m$ ενώ η περίοδος δίνεται από την

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \approx 3.63\ s$$

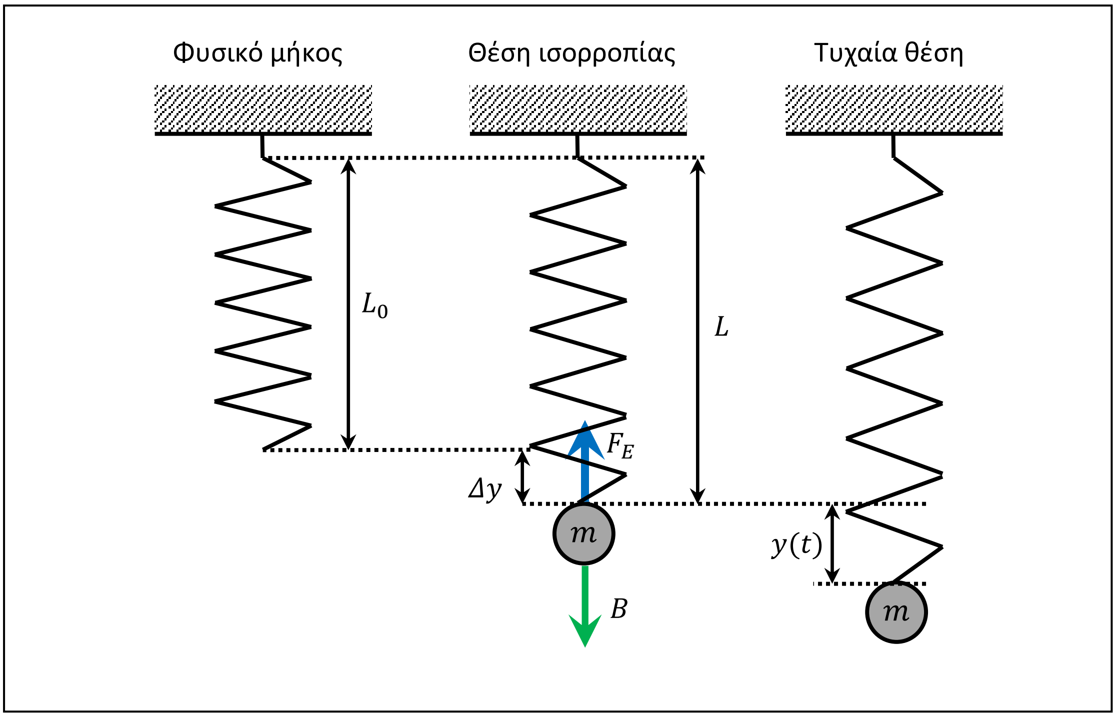
Συγκρίνοντας με το παραπάνω αποτέλεσμα έχουμε $t_0/T \approx 1/6$ επομένως μπορούμε να σκιαγραφήσουμε την γραφική παράσταση $x(t)$ σχετικά εύκολα:



11.5 Σε κατακόρυφο ελατήριο φυσικού μήκους L_0 και σταθεράς k, του οποίου το πάνω άκρο είναι προσδεμένο σε ακλόνητο σημείο, στερεώνεται σημειακή μάζα m στο κάτω άκρο. Εάν η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ίση με g, να βρεθούν τα εξής: (α) Το νέο μήκος L του ελατηρίου αφού στερεωθεί η μάζα σε αυτό, θεωρώντας ότι την φέρνουμε πολύ αργά στη θέση που το όλο σύστημα ισορροπεί. (β) Εάν τώρα η μάζα αυτή εκτραπεί κατά κατακόρυφη απόσταση y_m από αυτή τη θέση ισορροπίας, να αποδειχθεί ότι η μάζα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση γράφοντας την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση και λύνοντάς την.

Λύση:

(α) Στο παρακάτω σχήμα στα αριστερά φαίνεται το ελατήριο στο φυσικό του μήκος L_0 (θεωρούμε ότι είναι αβαρές και έτσι δεν παραμορφώνεται κατά την κατακόρυφη ανάρτησή του). Στο μεσαίο σχήμα φαίνεται το ελατήριο στο νέο μήκος του L όταν αναρτηθεί στο κάτω άκρο του η μάζα m, την οποία φέρουμε στην τελική θέση ισορροπίας πολύ αργά ώστε να είναι σε ακινησία. Έστω $\Delta y = L - L_0$ η παραμόρφωση του ελατηρίου. Τότε στη μάζα ασκείται εκτός από το βάρος της $B = -mg$ και η δύναμη του ελατηρίου F_E η οποία σύμφωνα με την Εξ. 3.7 είναι ίση με $-k\Delta y$. Προσέξτε την ύπαρξη του αρνητικού προσήμου στις δυο εξισώσεις (λαμβάνοντας την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική). Σημαίνει αυτό ότι είναι και οι δυο προς τα κάτω; Για το μεν βάρος ναι αφού το μείον βρίσκεται μπροστά από μια σταθερή και θετική ποσότητα mg για την δε δύναμη ελατηρίου όμως το πρόσημο απλά σημαίνει ότι η δύναμη αυτή είναι αντίθετη από το Δy το οποίο μπορεί να είναι είτε θετικό είτε αρνητικό. Στην περίπτωση του σχήματος στο κέντρο, το Δy είναι αρνητικό (όπως γνωρίζουμε και από την καθημερινή μας εμπειρία) και άρα η δύναμη F_E είναι θετική δηλαδή προς τα πάνω.



Από την συνθήκη ισορροπίας στον κατακόρυφο άξονα, έχουμε για τη θέση ισορροπίας

$$\Sigma F_y = 0 => -k\Delta y - mg = 0 => \Delta y = -\frac{mg}{k}$$

όπου επαληθεύεται ότι το Δy είναι αρνητικό όπως προαναφέρθηκε. Το νέο μήκος του ελατηρίου είναι ίσο με (δείτε σχήμα)

$$L = L_0 + \Delta y = L_0 + \frac{mg}{k}$$

(β) Έστω το παραπάνω σχήμα στα δεξιά όπου δείχνει την μάζα m κάποια χρονική στιγμή t σε τυχαία απόσταση y από την θέση ισορροπίας της. Το μήκος του ελατηρίου σε αυτή τη θέση είναι ίσο με

$$l(t) = L_0 + \Delta y + y = L + y$$

όπου L το μήκος που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα και έτσι η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι ίση με $l(t) - L_0 = y + \Delta y$ και άρα σύμφωνα με την Εξ. 3.7, η δύναμη του ελατηρίου ισούται με

$$F_E = -k(y + \Delta y)$$

Η φυσική σημασία του αρνητικού προσήμου είναι όπως και παραπάνω. Όταν δηλαδή το μήκος $y + \Delta y$ είναι αρνητικό, όπως στο σχήμα, τότε η F_E γίνεται θετική και η δύναμη είναι προς τα πάνω. Αυτό αντιστοιχεί στην επιμήκυνση του ελατηρίου. Οριακά όταν $y = +\Delta y$, δηλαδή το ελατήριο είναι στο φυσικό του μήκος (δείτε σχήμα) η δύναμη F_E γίνεται μηδέν και για $y > +\Delta y$ το ελατήριο συσπειρώνεται και η F_E γίνεται αρνητική δηλαδή προς τα κάτω. Στη μάζα ασκείται και το βάρος της $B = -mg$ και άρα ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα μας δίνει:

$$my'' = F_E + B = -k(y + \Delta y) - mg$$

όπου y'' είναι η κατακόρυφη επιτάχυνση της μάζας. Αντικαθιστούμε την έκφραση του Δy που βρήκαμε παραπάνω και έχουμε

$$y'' = -\frac{k}{m}y$$

Αυτή είναι η ίδια ακριβώς διαφορική εξίσωση όπως η Εξ. 11.1 του απλού αρμονικού ταλαντωτή με ίδια ακριβώς σταθερά ελατηρίου k και άρα την ίδια κυκλική συχνότητα ω που σύμφωνα με την Εξ. 11.3 δίνεται από την

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Η μόνη διαφορά είναι ότι το y δεν περιγράφει την παραμόρφωση του ελατηρίου από το αρχικό του φυσικό μήκος L_0 αλλά από την νέα θέση ισορροπίας με μήκος ελατηρίου ίσο με L. Εάν λοιπόν επιλέξουμε το μήκος L ως ένα νέο "φυσικό" μήκος του ελατηρίου στο οποίο ισορροπεί λόγω του βάρους της μάζας, τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε ότι ξέρουμε για τον αρμονικό ταλαντωτή, χωρίς να χρειάζεται να εμπλέκεται πλέον το βάρος στην εξίσωση του ταλαντωτή. Για παράδειγμα η απομάκρυνση y σε κάθε χρονική στιγμή t θα δίνεται σύμφωνα με την Εξ. 11.2 από την

$$y(t) = Acos(\omega t + \varphi)$$

Εάν υποθέσουμε ότι η μάζα εκτρέπεται στο $t = 0$ από τη θέση ισορροπίας κατά κατακόρυφη απόσταση y_m, τότε η μια αρχική συνθήκη είναι η $y(0) = y_m$ αλλά αφού αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα v τότε ισχύει και $v(0) = 0$. Αφού η ταχύτητα της μάζας είναι η

$$v(t) = y'(t) = -A\omega sin(\omega t + \varphi)$$

τότε η δεύτερη αρχική συνθήκη οδηγεί στην $\varphi = 0$ που όταν αντικατασταθεί στην πρώτη, μας δίνει το αποτέλεσμα $A = y_m$ δηλαδή η αρχική απομάκρυνση y_m είναι και το πλάτος της μετέπειτα ταλάντωσης.

Απόσβεση

11.6 Μάζα $m = 2\ kg$ που είναι αναρτημένη σε ελατήριο σταθεράς $k = 1\ N/m$ με απόσβεση, εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση με πλάτος $A(t)$ που δίνεται από την σχέση $A(t) = 0.25e^{-0.4t}$, όλα στο S.I. (α) Να βρεθεί το πλάτος κατά τη χρονική στιγμή $t = 2.5\ s$. (β) Να υπολογιστεί η ενέργεια του ταλαντωτή κατά την ίδια χρονική στιγμή. (γ) Να βρεθεί σε ποια χρονική στιγμή το πλάτος πέφτει στο $1/5$ της αρχικής του τιμής.

Απάντηση: (α) $0.092\ m$, (β) $2.87\ mJ$, (γ) $4.02\ s$

Λύση:

(α) Με απευθείας αντικατάσταση παίρνουμε για το πλάτος τη χρονική στιγμή $t = 2.5\ s$:

$$A(2.5) = 0.25e^{-0.4\times 2.5} = 0.092\ m$$

(β) Δυστυχώς στην απόσβεση δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το εξαιρετικά απλό αποτέλεσμα της της Εξ. 11.10 αλλά πρέπει να καταφύγουμε στην Εξ. 11.8. Από την Εξ. 11.12 έχουμε

$$x(t) = Ae^{-\beta t}cos(\omega t) = A(t)cos(\omega t)$$

Χρειάζεται να υπολογίσουμε το ω. Από το δεδομένο πλάτος αναγνωρίζουμε ότι $\beta = 0.4\ s^{-1}$ Μέσω της Εξ. 11.16 έχουμε

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \beta^2} = 0.583\ rad/s$$

Έτσι

$$x(2.5) = 0.092\ cos(0.583 \times 2.5) = 0.01\ m$$

Από την Εξ. 11.14 έχουμε

$$v(t) = -A(t)[\omega sin(\omega t) + \beta cos(\omega t)]$$

Αντικαθιστώντας

$$v(2.5) = -0.092\ [0.583sin(0.583 \times 2.5) + 0.4cos(0.583 \times 2.5)] = -0.0574\ m/s$$

Από την Εξ. 11.8

$$E(2.5) = \frac{1}{2}mv(2.5)^2 + \frac{1}{2}kx(2.5)^2 = 3.35mJ$$

Επομένως η ενέργεια του ταλαντωτή κατά την χρονική στιγμή $t = 2.5\ s$ ισούται με

$$E(2.5\ ) = \frac{1}{2}m\omega^2 A(2.5\ )^2 = \frac{1}{2}2 \times 0.34 \times 0.092^2 = 2.87\ mJ$$

(γ) Από την εκφώνηση έχουμε $A(t) = A/5$ έτσι

$$Ae^{-\beta t} = \frac{A}{5} => -\beta t = ln\left(\frac{1}{5}\right) => t = \frac{ln5}{\beta} = \frac{ln5}{0.4} = 4.02\ s$$

11.7 Μάζα $m = 1\ kg$ που είναι αναρτημένη σε ελατήριο σταθεράς $k = 4\pi^2\ N/m$ με απόσβεση εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση με πλάτος $A(t)$ που δίνεται από την σχέση $A(t) = 0.5e^{-1.2\pi t}$. Να αποδειχθεί ότι η ενέργεια που χάνει ο ταλαντωτής ανάμεσα στις χρονικές στιγμές $t_1 = T$ και $t_2 = 1.2T$, ισούται με το έργο της δύναμης απόσβεσης (υπαινιγμός: χρησιμοποιήστε τη διαφορική σχέση $dx = vdt$ στον υπολογισμό του έργου).

Απάντηση: $\Delta E = -0.4817\ mJ \quad W_A = -0.4817\ mJ$

Λύση:

Συγκρίνοντας το δεδομένο πλάτος $A(t)$ με την Εξ. 11.13 παίρνουμε για το αρχικό πλάτος $A = 0.5\ m$ και για την σταθερά απόσβεσης $\beta = 1.2\pi\ s^{-1}$. Χρειαζόμαστε την κυκλική συχνότητα ω για να υπολογίσουμε την περίοδο T. Από την Εξ. 11.15

$$\omega^2 = \frac{k}{m} - \beta^2 = 4\pi^2 - (1.2\pi)^2 = 2.56\pi^2\ rad^2/s^2$$

επομένως $\omega = 1.6\pi\ rad/s$ και έτσι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1.6\pi} = 1.25\ s$$

Για τις χρονικές στιγμές $t_1 = T = 1.25\ s$ και $t_2 = 1.2T = 1.5\ s$ έχουμε από την Εξ. 11.12

$$x(1.25) = 4.49\ mm$$

$$x(1.5) = 0.54$$

και από την Εξ 11.14.

$$v(1.25) = -0.0169\ m/s$$

$$v(1.5) = -0.0104\ m/s$$

Από την Εξ. 11.8, οι αντίστοιχες ενέργειες του ταλαντωτή είναι ίσες με

$$E(1.25) = \frac{1}{2}mv(1.25)^2 + \frac{1}{2}kx(1.25)^2 = 0.5416\ mJ$$

$$E(1.5) = \frac{1}{2}1 \times 2.56\pi^2 1.75^2 = 0.0599\ mJ$$

Επομένως η απώλεια της ενέργειας του ταλαντωτή μεταξύ των στιγμών t_1 και t_2 ισούται με

$$\Delta E = 0.0599 - 0.5416 = -0.4817\ mJ$$

Από την άλλη μεριά, το έργο της δύναμης απόσβεσης $F_A = -bv$ ισούται με

$$W_A = \int_{x_1}^{x_2} F_A dx = -b\int_{x_1}^{x_2} vdx$$

όπου οι απομακρύνσεις x_1 και x_2 αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές t_1 και t_2. Χρησιμοποιώντας τον υπαινιγμό $dx = vdt$, το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται

$$W_A = -b\int_{t_1}^{t_2} v^2 dt = 2m\beta\int_{t_2}^{t_1} v^2 dt$$

όπου έγινε χρήση της Εξ. 11.14 και αναστράφηκαν τα όρια ολοκλήρωσης. Η ταχύτητα v του ταλαντωτή υπολογίζεται από την παραγώγιση της απομάκρυνσής του Εξ. 11.13 ως προς το χρόνο:

$$v(t) = x'(t) = -\omega A sin\omega t e^{-\beta t} - \beta A cos\omega t e^{-\beta t} = -Ae^{-\beta t}[\omega sin\omega t + \beta cos\omega t]$$

Αντικαθιστώντας

$$v(t) = -0.2\pi e^{-1.2\pi t}[4sin(1.6\pi t) + 3cos(1.6\pi t)]$$

Μπορούμε να πάρουμε το τετράγωνο της παραπάνω έκφρασης και να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα με τη βοήθεια πινάκων ολοκληρωμάτων αλλά το προκύπτον ολοκλήρωμα, παρόλο που λύνεται αναλυτικά, απαιτεί μακροσκελείς υπολογισμούς. Είναι πιο εύκολο να χρησιμοποιήσουμε ένα υπολογιστικό πακέτο όπως η *Mathematica,* να ορίσουμε την παραπάνω συνάρτηση $v(t)$ και να ζητήσουμε από το πακέτο να υπολογίσει το ορισμένο ολοκλήρωμα I του τετραγώνου της από $t_2 = 1.5\ s$ έως $t_1 = 1.25\ s$. Το αποτέλεσμα είναι ίσο με

$$I = \int_{t_1}^{t_2} v^2 dt = -0.0000638855$$

οπότε

$$W_A = 2m\beta I = -2 \times 1 \times 1.2\pi \times 0.0000638855 = -0.4817\ mJ$$

Το έργο όπως αναμένεται, είναι αρνητικό αφού είναι έργο τριβής. Βλέπουμε δηλαδή ότι η απώλεια της ενέργειας του ταλαντωτή, είναι ίση με το έργο της δύναμης της απόσβεσης. Αυτό το αναμένουμε λόγω διατήρησης της ενέργειας στην γενική της μορφή Εξ. 6.17:

$$K_1 + U_1 + W_A = K_2 + U_2$$

Επειδή το έργο W_A είναι αρνητικό, αφαιρεί από την αρχική μηχανική ενέργεια $K_1 + U_1$ του ταλαντωτή.

11.8 Μάζα $m = 2\ kg$ είναι αναρτημένη σε ελατήριο με απόσβεση και εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση με πλάτος $A(t)$ που δίνεται από την σχέση $A(t) = 0.25e^{-0.4t}$, όλα στο S.I. Παρατηρείται ότι το πλάτος κατά την 10η περίοδο της ταλάντωσης είναι ίσο με το 16×10^{-4} του πλάτους κατά την 6η περίοδο. Να βρεθεί ο λόγος των πλατών δυο τυχαίων χρονικών στιγμών που απέχουν χρονικά κατά δυο περιόδους.

<u>Απάντηση</u>: 0.04

<u>Λύση</u>:

(α) Από τα δεδομένα

$$A(10T) = Ae^{-b10T}$$

$$A(6T) = Ae^{-b6T}$$

Παίρνοντας λόγους και χρησιμοποιώντας τα δεδομένα

$$\frac{A(10T)}{A(6T)} = 0.2 => e^{-4bT} = 16 \times 10^{-4}$$

Παρατηρούμε ότι και οι δυο εκθέτες έχουν δύναμη του 4 και άρα παίρνουμε την 4η ρίζα $\sqrt[4]{\ }$ του παραπάνω αποτελέσματος για να βρούμε το εξής

$$e^{-bT} = \sqrt[4]{16} \times 10^{-1} = 0.2$$

Έστω δυο χρονικές στιγμές t_1 και $t_2 = t_1 + 2T$ που απέχουν χρονικά κατά δυο περιόδους. Ο λόγος των πλατών τους είναι ίσος με

$$\frac{A(t_2)}{A(t_1)} = \frac{Ae^{-bt_2}}{Ae^{-bt_1}} => e^{-b(t_2-t_1)} = e^{-2bT} = \left(e^{-bT}\right)^2 = 0.2^2 = 0.04$$

Συντονισμός

11.9 Σημειακή μάζα m είναι αναρτημένη σε ελατήριο σταθεράς k με δύναμη απόσβεσης $F_A = -bv$ και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση λόγω της εφαρμογής μιας εξωτερικής δύναμης $F(t) = F_0 cos(\omega_F t)$. Να αποδείξετε ότι η φάση στον συντονισμό λαμβάνει την τιμή $\varphi = -\pi/2$ ακολουθώντας τα εξής βήματα: (α) Ξεκινήστε από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα γράφοντας στο 2ο μέλος αναλυτικά όλες τις δυνάμεις που δρουν στη μάζα. (β) Εκφράστε την επιτάχυνση και την ταχύτητα με τη μορφή παραγώγων ώστε το αποτέλεσμά σας στο προηγούμενο ερώτημα να έχει τη μορφή διαφορικής εξίσωσης αλλά να συμπεριλάβετε τις σταθερές ω_0 και β που δίνονται στις Εξισώσεις 11.3 και 11.15 αντίστοιχα. (γ) Αντικαταστήστε την μόνιμη λύση της Εξ. 11.18 στην διαφορική εξίσωση που βρήκατε και εκτελέσετε αναλυτικά τις πράξεις ώστε να καταλήξετε σε μια αλγεβρική εξίσωση για τυχαίο ω_F. (δ) Εφαρμόστε τη συνθήκη του συντονισμού και βρείτε το φ εφαρμόζοντας την συνθήκη της γραμμικής ανεξαρτησίας των αρμονικών συναρτήσεων.

<u>Λύση</u>:

(α) Από το 2° νόμο του Νεύτωνα

$$ma = \Sigma F$$

Στη μάζα δρουν τρεις δυνάμεις, η δύναμη του ελατηρίου $F_E = -kx$, η δύναμη της απόσβεσης $F_A = -bv$ και η εξωτερική δύναμη (η διέγερση) $F(t) = F_0 cos(\omega_F t)$ και επομένως

$$ma = -kx - bv - F_0 cos(\omega_F t)$$

(β) Με τη χρήση παραγώγων

$$mx'' = -kx - bx' - F_0 cos(\omega_F t)$$

Από τις στις Εξισώσεις 11.3 και 11.15

$$mx'' = -m{\omega_0}^2 x - 2m\beta x' - F_0 cos(\omega_F t)$$

Φέρουμε τους όρους που περιέχουν το x από την μια μεριά και διαιρούμε με m ώστε το αποτέλεσμά μας να μοιάζει με μια κανονική διαφορική εξίσωση:

$$x'' + 2\beta x' + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m} cos(\omega_F t)$$

(γ) Από την Εξ. 11.18

$$x(t) = A_F cos(\omega_F t + \varphi)$$

με παραγώγιση

$$x'(t) = -A_F \omega_F sin(\omega_F t + \varphi)$$

$$x''(t) = -A_F {\omega_F}^2 cos(\omega_F t + \varphi)$$

(το πλάτος A_F δεν εξαρτάται από τον χρόνο, μόνο από τη συχνότητα). Με αντικατάσταση στην διαφορική εξίσωση του βήματος β έχουμε

$$-A_F {\omega_F}^2 cos(\omega_F t + \varphi) - 2\beta A_F \omega_F sin(\omega_F t + \varphi) + {\omega_0}^2 A_F cos(\omega_F t + \varphi) = \frac{F_0}{m} cos(\omega_F t)$$

(δ) Στον συντονισμό $\omega_F = \omega_0$ και έτσι ο 1ος και ο 3ος όρος αλληλοαναιρούνται και έτσι

$$2\beta A_F \omega_F sin(\omega_F t + \varphi) + \frac{F_0}{m} cos(\omega_F t) = 0$$

Αφού τα ημίτονα και συνημίτονα είναι γραμμικώς ανεξάρτητες συναρτήσεις, πρέπει οι συντελεστές τους να μηδενίζονται, πράγμα άτοπο αφού το F_0/m είναι διάφορο του μηδενός. Επομένως η μόνη άλλη επιλογή είναι να πρόκειται για την ίδια συνάρτηση (με ένα αρνητικό πρόσημο) δηλαδή

$$sin(\omega_F t + \varphi) = -cos(\omega_F t)$$

Αυτό όμως είναι εφικτό μόνο εάν $\varphi = -\pi/2$ αφού τότε

$$sin(\omega_F t + \varphi) = sin(\omega_F t - \pi/2) = -sin(\pi/2 - \omega_F t) = -cos(\omega_F t)$$

11.10 Δουλεύοντας παρόμοια με το προηγούμενο πρόβλημα, αποδείξτε ότι κατά τον συντονισμό, η δύναμη απόσβεσης είναι ίση και αντίθετη με τη δύναμη διέγερσης, δηλαδή αυτές οι δυο δυνάμεις αλληλοαναιρούνται οπότε είναι σαν να έχουμε έναν απλό αρμονικό ταλαντωτή.

Λύση:

Όπως στο προηγούμενο πρόβλημα, γράφουμε τον 2^o νόμο του Νεύτωνα

$$ma = \Sigma F$$

Στη μάζα δρουν τρεις δυνάμεις, η δύναμη του ελατηρίου $F_E = -kx$, η δύναμη της απόσβεσης $F_A = -bv$ και η εξωτερική δύναμη (η διέγερση) $F(t) = F_0 cos(\omega_F t)$. Από την Εξ. 11.18

$$x(t) = A_F cos(\omega_F t + \varphi)$$

με παραγώγιση

$$x'(t) = -A_F \omega_F sin(\omega_F t + \varphi)$$

(το πλάτος A_F δεν εξαρτάται από τον χρόνο, μόνο από τη συχνότητα). Όπως είδαμε στον συντονισμό ισχύει $\varphi = -\pi/2$ και έτσι

$$x'(t) = -A_F \omega_F sin\left(\omega_F t - \frac{\pi}{2}\right) = A_F \omega_F cos(\omega_F t)$$

Η δύναμη της απόσβεσης γίνεται

$$F_A = -bv = -2m\beta x' = -2m\beta A_F \omega_F cos(\omega_F t)$$

Η Εξ. 11.20 στον συντονισμό $\omega_F = \omega_0$ γίνεται

$$A_F = \frac{F_0}{2m\beta\omega_F}$$

Αντικαθιστώντας στο παραπάνω αποτέλεσμα

$$F_A = -2m\beta \frac{F_0}{2m\beta\omega_F} \omega_F cos(\omega_F t) = -F_0 cos(\omega_F t)$$

που είναι ακριβώς το αντίθετο της δύναμης διέγερσης. Επομένως στο συντονισμό, οι δυο από τις τρεις δυνάμεις αλληλοαναιρούνται και έτσι παραμένει μόνο η δύναμη του ελατηρίου.

11.11 Σημειακή μάζα $m = 8\ kg$ που είναι αναρτημένη σε ελατήριο σταθεράς k με δύναμη απόσβεσης $F_A = -bv$ εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση λόγω εφαρμογής μιας εξωτερικής δύναμης $F(t) = 2cos(\omega_F t)$, με όλα τα μεγέθη να είναι στο *S.I.* Εάν το σύστημα βρίσκεται σε συντονισμό και η μέγιστη ταχύτητά της μάζας είναι ίση με $0.5\ m/s$, να βρεθεί η σταθερά απόσβεσης β με τη βοήθεια του αποτελέσματος του προηγούμενου προβλήματος. .

Απάντηση: $0.25\ s^{-1}$

Λύση:

Στον συντονισμό γνωρίζουμε ότι η φάση φ είναι ίση με $-\pi/2$. Από την Εξ. 11.18, η απομάκρυνση της μάζας είναι ίση με

$$x(t) = A_F cos(\omega_F t - \pi/2) = A_F sin(\omega_F t)$$

Με παραγώγιση βρίσκουμε για την ταχύτητα της μάζας

$$x'(t) = \omega_F A_F cos(\omega_F t)$$

Το πλάτος αυτής της ταχύτητας είναι ίσο με $\omega_F A_F$ το οποίο σύμφωνα με τα δεδομένα είναι ίσο με $0.5\ m/s$ και άρα

$$x'(t) = 0.5cos(\omega_F t)$$

Η δύναμη απόσβεσης ισούται με

$$F_A = -bx' = -2\beta m \times 0.5cos(\omega_F t) = -\beta m cos(\omega_F t)$$

Είδαμε στο προηγούμενο πρόβλημα ότι στον συντονισμό η δύναμη απόσβεσης F_A είναι ίση και αντίθετη της δύναμης του εξαναγκασμού, δηλαδή $F_A = -F(t)$ και έτσι θέτουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα ίσο με $-F(t)$ για να πάρουμε:

$$-\beta m cos(\omega_F t) = -2cos(\omega_F t)$$

Αυτή η σχέση ισχύει για κάθε χρόνο t οπότε γενικά $cos(\omega_F t) \neq 0$ και έτσι αυτός ο όρος μπορεί να απαλειφθεί. Λύνοντας ως προς β

$$\beta = \frac{2}{m} = \frac{2}{8} = 0.25\ s^{-1}$$

11.12 Μάζα $m = 0.12\ kg$ είναι αναρτημένη σε ελατήριο σταθεράς $k = 200\ N/m$ με δύναμη απόσβεσης $F_A = -bv$ όπου $b = 0.03\ kg/s$ και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση λόγω εφαρμογής μιας εξωτερικής δύναμης $F(t) = 2.4cos(\omega_F t)$, με όλα τα μεγέθη να είναι στο *S.I.* Να βρεθούν (α) Η συχνότητα συντονισμού και (β) Το εύρος $\Delta f = |f_2 - f_1|$, όπου f_1 και f_2 οι δυο συχνότητες εκατέρωθεν του συντονισμού όπου το πλάτος πέφτει στο $1/\sqrt{2}$ της μέγιστης τιμής του. Το Δf είναι γνωστό ως το <u>εύρος ζώνης του συντονισμού</u> και η φυσική του σημασία φαίνεται στο Σχήμα 11.5 (δείτε επόμενο πρόβλημα).

<u>Απάντηση</u>: (α) 6.5 Hz (β) 0.040 Hz

<u>Λύση</u>:

(α) Σύμφωνα με την Εξ. 11.22, η κυκλική συχνότητα συντονισμού ισούται με

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} = \sqrt{5/1.2} = 40.8\, rad/s$$

και επομένως η συχνότητα συντονισμού f_0 είναι ίση με

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 6.5\ Hz$$

(β) Το πλάτος της ταλάντωσης δίνεται από την σχέση

$$A_F(\omega_F) = \frac{F_0/m}{\sqrt{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)^2 + (2\beta\omega_F)^2}}$$

Από τα δεδομένα $F_0 = 2.4\ N$ και $b = 0.20\ kg/s$ ενώ από την Εξ. 11.15 έχουμε

$$\beta = \frac{b}{2m} = 0.125\ s^{-1}$$

Επομένως, σε τυχαία συχνότητα διέγερσης, το πλάτος της ταλάντωσης είναι ίσο με

$$A_F(\omega_F) = \frac{20}{\sqrt{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)^2 + (\,0.25\omega_F)^2}}$$

Στον συντονισμό $\omega_0 = \omega_F$ και το πλάτος γίνεται μέγιστο

$$A_F(\omega_0) = \frac{20}{0.25\omega_0} = 1.96\ m$$

Θέλουμε τις συχνότητες όπου το πλάτος πέφτει στο $1/\sqrt{2}$ αυτής της τιμής, δηλαδή

$$A_F(\omega_F) = \frac{1}{\sqrt{2}} 1.960 = 1.386\ m$$

Αντικαθιστώντας

$$\frac{20}{\sqrt{(40.8^2 - {\omega_F}^2)^2 + (\,0.25\omega_F)^2}} = 1.386$$

$$\sqrt{(40.8^2 - {\omega_F}^2)^2 + (\,0.25\omega_F)^2} = \ 14.43$$

$$(40.8^2 - {\omega_F}^2)^2 + (\,0.25\omega_F)^2 - (14.43)^2 = 0$$

Θέτουμε $x = {\omega_F}^2$ και λύνουμε την δευτεροβάθμια. Επιλέγοντας μόνο τις θετικές λύσεις, έχουμε τα αποτελέσματα

$$\omega_{F1} = 40.67\ rad/s$$

$$\omega_{F2} = 40.92\ rad/s$$

με αντίστοιχες συχνότητες

$$f_1 = \frac{\omega_{F1}}{2\pi} = 6.473\ Hz$$

$$f_2 = \frac{\omega_{F2}}{2\pi} = 6.513\ Hz$$

Έτσι το εύρος ζώνης είναι ίσο με

$$\Delta f = |f_2 - f_1| = 0.040\ Hz$$

11.13 Μάζα m είναι αναρτημένη σε ελατήριο σταθεράς k με δύναμη απόσβεσης $F_A = -bv$ και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με δύναμη διέγερσης $F(t) = F_0 cos(\omega_F t)$. Να βρεθεί ένας τύπος για το <u>εύρος ζώνης του συντονισμού</u> $\Delta f = |f_2 - f_1|$, όπου f_1 και f_2 οι δυο συχνότητες εκατέρωθεν του συντονισμού όπου το πλάτος πέφτει στο $1/\sqrt{2}$ της μέγιστης τιμής του (δείτε το Σχήμα 11.5 και το προηγούμενο πρόβλημα). Για την απόδειξη, ακολουθήστε τα εξής βήματα: Αρχικά πρέπει να καταλήξετε σε μια δευτεροβάθμια ως προς $x = {\omega_F}^2$. Γράψτε τις λύσεις της συναρτήσει του λόγου β/ω_0 ο οποίος είναι ένας μικρός αριθμός αφού στην πράξη ισχύει συνήθως $\beta \ll \omega_0$. Ακολούθως χρησιμοποιήστε την προσέγγιση $\sqrt{1+\kappa} \approx 1 + \kappa/2$ που ισχύει για μικρούς αριθμούς κ και στις υπόλοιπες πράξεις αγνοήστε τις δυνάμεις του κ αφού είναι εξαιρετικά μικροί αριθμοί (π.χ. εάν $\kappa = 0.01$ τότε $\kappa^2 = 0.0001$). Το τελικό αποτέλεσμα είναι πολύ απλό. Να σχολιασθεί εάν συμφωνεί ποιοτικώς με τα βασικά χαρακτηριστικά του Σχήματος 11.5.

<u>Λύση</u>:

Το πλάτος της ταλάντωσης δίνεται από την σχέση

$$A_F(\omega_F) = \frac{F_0/m}{\sqrt{({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)^2 + (2\beta\omega_F)^2}}$$

Στον συντονισμό $\omega_0 = \omega_F$ και το πλάτος γίνεται μέγιστο

$$A_F(\omega_0) = \frac{F_0/m}{2\beta\omega_0}$$

Θέλουμε τις συχνότητες όπου το πλάτος πέφτει στο $1/\sqrt{2}$ αυτής της τιμής, δηλαδή

$$A_F(\omega_F) = \frac{1}{\sqrt{2}} A_F(\omega_0)$$

Αντικαθιστώντας

$$\frac{F_0/m}{\sqrt{({\omega_0}^2-{\omega_F}^2)^2+(2\beta\omega_F)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{F_0/m}{2\beta\omega_0}$$

$$({\omega_0}^2-{\omega_F}^2)^2+(2\beta\omega_F)^2=2(2\beta\omega_0)^2$$

$${\omega_0}^4+{\omega_F}^4-2{\omega_0}^2{\omega_F}^2+(2\beta\omega_F)^2-2(2\beta\omega_0)^2=0$$

$${\omega_F}^4+[(2\beta)^2-2{\omega_0}^2]{\omega_F}^2+{\omega_0}^4-2(2\beta\omega_0)^2=0$$

Θέτουμε $x={\omega_F}^2$ και έχουμε δευτεροβάθμια ως προς x. Η διακρίνουσα είναι ίση με

$$\Delta=4[2\beta^2-{\omega_0}^2]^2-4[{\omega_0}^4-2(2\beta\omega_0)^2]$$

$$\Delta=16\beta^2[\beta^2+{\omega_0}^2]$$

και οι δυο λύσεις είναι οι εξής

$$x_{1,2}=-\frac{[(2\beta)^2-2{\omega_0}^2]}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{16\beta^2[\beta^2+{\omega_0}^2]}$$

Σύμφωνα με τις υποδείξεις της εκφώνησης, θέτουμε $\alpha=\beta/\omega_0$ και παίρνουμε

$$x_{1,2}={\omega_0}^2-2\beta^2\pm2\beta\sqrt{{\omega_0}^2+\beta^2}$$

$$x_{1,2}={\omega_0}^2\left[1-2\alpha^2\pm2\alpha\sqrt{1+\alpha^2}\right]$$

Εφόσον το α είναι κατά πολύ μικρότερο της μονάδας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την δεδομένη προσέγγιση $\sqrt{1+\kappa}\approx1+\kappa/2$ και να πάρουμε

$$x_{1,2}\approx{\omega_0}^2[1-2\alpha^2\pm2\alpha(1+\alpha^2/2)]$$

$$x_{1,2}\approx{\omega_0}^2[1-2\alpha^2\pm(2\alpha+\alpha^3)]$$

Σύμφωνα και πάλι με την εκφώνηση, μπορούμε να διώξουμε τους πολύ μικρούς όρους α^2 και α^3 και να καταλήξουμε στο

$$x_{1,2}\approx{\omega_0}^2[1\pm2\alpha]$$

Από την $x={\omega_F}^2$ κρατάω μόνο τις θετικές ρίζες και έχω

$$\omega_{1,2}=\sqrt{x_{1,2}}=\omega_0\sqrt{1\pm2\alpha}\approx\omega_0(1\pm\alpha)$$

όπου και πάλι έγινε χρήση της δεδομένης προσέγγισης με τη ρίζα. Τελικά

$$\omega_{1,2}\approx\omega_0\left(1\pm\frac{\beta}{\omega_0}\right)=\omega_0\pm\beta$$

Οι αντίστοιχες συχνότητες είναι ίσες με

$$f_{1,2} = \frac{\omega_{1,2}}{2\pi} = \frac{\omega_0 \pm \beta}{2\pi}$$

και το εύρος ζώνης

$$\Delta f = |f_2 - f_1| = \frac{\beta}{\pi}$$

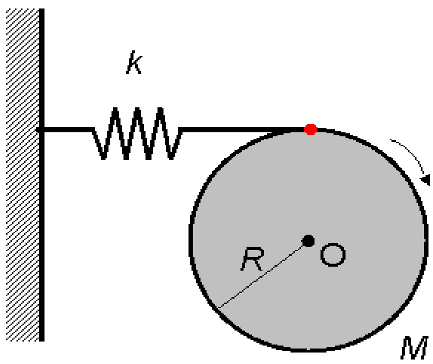
Επομένως όσο αυξάνει η απόσβεση β, αυξάνει και το εύρος της καμπύλης συντονισμού. Επίσης είδαμε παραπάνω ότι το πλάτος στον συντονισμό ισούται με

$$A_F(\omega_0) = \frac{F_0/m}{2\beta\omega_0}$$

είναι δηλαδή αντιστρόφως ανάλογο με το β. Αυτές οι δυο παρατηρήσεις είναι σε πλήρη συμφωνία με το Σχήμα 11.5 όπου φαίνονται δυο καμπύλες συντονισμού, μια για μικρό και μια για μεγάλο β αφού η δεύτερη από αυτές έχει χαμηλότερο πλάτος και μεγαλύτερο εύρος.

Μικρές Ταλαντώσεις

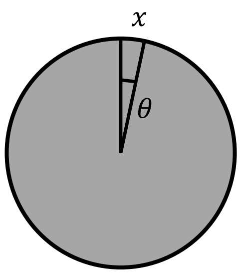
11.14 Στο παρακάτω σχήμα ο λεπτός τροχός μάζας M και ακτίνας R μπορεί και περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από νοητό άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του Ο και είναι κάθετος σε αυτόν. Στο υψηλότερο σημείο του τροχού προσδένεται οριζόντιο ελατήριο σταθεράς k και αρχικά το όλο σύστημα ισορροπεί με το ελατήριο να βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Εάν ο τροχός περιστραφεί κατά μικρή γωνία έτσι ώστε να θεωρηθεί ότι το ελατήριο παραμένει προσεγγιστικά οριζόντιο, να βρεθεί η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων που θα προκύψουν.



Απάντηση: $2\pi\sqrt{2k/M}$

Λύση:

Έστω ότι σε τυχαία χρονική στιγμή, ο τροχός είναι περιστραμμένος κατά μια μικρή γωνία θ προς τα δεξιά όπως στο παρακάτω σχήμα (την οποία γωνία θεωρούμε θετική όταν είναι σύμφωνα με την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού). Το αντίστοιχο μήκος τόξου x σύμφωνα με την Εξ. 7.3 είναι ίσο με $x = R\theta$ και μπορούμε να πούμε ότι προσεγγιστικά η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι ίση με x.



Έτσι η δύναμη του ελατηρίου είναι προσεγγιστικά ίση με $F = -kx$ και η αντίστοιχη ροπή ισούται με

$$\tau = FR = -kR^2\theta$$

Η ροπή αδράνειας του δίσκου από τον Πίνακα 8.1 είναι ίση με

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα στη περιστροφική κίνηση οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$$I\alpha = \tau$$

Όμως από τις Εξισώσεις 8.1 και 8.2 προκύπτει ότι η γωνιακή επιτάχυνση είναι ίση με

$$\alpha(t) = \omega'(t) = \left(\theta'(t)\right)' = \theta(t)''$$

και έτσι

$$\frac{1}{2}MR^2\theta'' = -kR^2\theta$$

$$\theta'' = -\frac{2k}{M}\theta$$

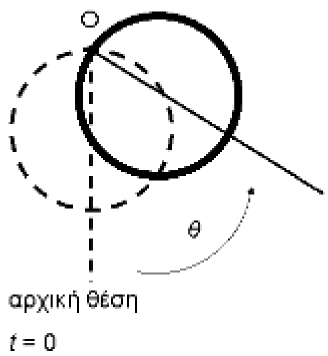
Συγκρίνοντας με την Εξ. 11.23, έχουμε ότι

$$\omega^2 = \frac{2k}{M}$$

με αντίστοιχη περίοδο

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2k}{M}}$$

11.15 Στο παρακάτω σχήμα ο λεπτός δακτύλιος μάζας M και ακτίνας R αναρτάται με τη βοήθεια καρφιού στο σημείο O της περιφέρειάς του από κατακόρυφο τοίχο. Εάν ο δακτύλιος μπορεί και περιστρέφεται ελεύθερα χωρίς τριβές γύρω από το καρφί, να βρεθεί η περίοδος της ταλάντωσης λόγω βαρύτητας εάν ο δακτύλιος εκτρέπεται αρχικά κατά μια μικρή γωνία θ_A από τη θέση ισορροπίας του και ακολούθως αφήνεται ελεύθερος.



<u>Απάντηση</u>: $2\pi\sqrt{2R/g}$

<u>Λύση</u>: Έστω ότι ο δακτύλιος βρίσκεται σε τυχαία γωνία θ ως προς την κατακόρυφο όπως στο παραπάνω σχήμα. Το κέντρο μάζας (Κ.Μ.) του δακτυλίου βρίσκεται στο κέντρο του το οποίο δεν είναι ένα υλικό σημείο του σώματος αλλά αυτό δεν έχει καμία σημασία στην ανάλυση του προβλήματος. Μπορούμε και πάλι να θεωρούμε ότι το βάρος δρα σε αυτό το σημείο σαν να ήταν όλη η μάζα του δακτυλίου συγκεντρωμένη σε αυτό. Αφού το βάρος είναι κατακόρυφο, τότε σχηματίζει γωνία θ με την ακτίνα R που συνδέει το Κ.Μ. με τον άξονα περιστροφής (βραχίονας) και έτσι η αντίστοιχη ροπή ισούται με

$$\tau = -MgRsin\theta$$

Το μείον έχει την έννοια του Παραδείγματος 11.4, δείχνει δηλαδή ότι η ροπή αντιτίθεται στην γωνία θ. Π.χ. στο παραπάνω σχήμα η θ και άρα και το $sin\theta$ είναι θετικά όμως το τ είναι αρνητικό (σύμφωνα με την σύμβαση προσήμων που είδαμε στην περιστροφική κίνηση). Όλα τα πρόσημα αντιστρέφονται από την άλλη μεριά της κατακορύφου. Σύμφωνα με τον Πίνακα 8.1, η ροπή αδράνεια ενός κυκλικού δακτυλίου του οποίου ο άξονας περιστροφής περνάει από το κέντρο μάζας του, είναι ίση με:

$$I_{KM} = MR^2$$

Εδώ ο άξονας περιστροφής είναι στο σημείο O το οποίο απέχει απόσταση $d = R$ από το κέντρο του δακτυλίου και άρα από το θεώρημα του Steiner

$$I = I_{KM} + Md^2 = 2MR^2$$

Από τον νόμο του Νεύτωνα για περιστροφές, Εξ. 18 έχουμε:

$$\tau = I\alpha => \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{-MRg}{2MR^2}sin\theta$$

ή

$$\theta'' = -\frac{g}{2R} sin\theta$$

Όπως και στο Παράδειγμα 11.4, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση $sin\theta \approx \theta$ και να έχουμε:

$$\theta'' \approx -\frac{g}{2R}\theta$$

Σύγκριση με την Εξ. 11.23 οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2R}}$$

και

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

Διακρότημα

11.16 Ένας μουσικός διεγείρει ταυτόχρονα δυο ίδιες χορδές κιθάρας οι οποίες είναι στην κατασκευή τους πανομοιότυπες αλλά η μια είναι ελαφριά πιο τανυσμένη από την άλλη. Παρατηρεί ότι ο σύνθετος ήχος παρουσιάζει κάποιες αυξομειώσεις με εμφανείς στιγμές σιγής. Μετράει σε χρόνο δέκα λεπτών έναν αριθμό 120 τέτοιων στιγμών σιγής. Εάν η συχνότητα της χορδής με την μεγαλύτερη τάνυση είναι 440 Hz, τότε να βρεθεί η συχνότητα της άλλης χορδής.

Απάντηση: 439.8 Hz

Λύση: Προφανώς οι στιγμές σιγής που ακούει ο μουσικός είναι τα μηδενικά στο Σχήμα 11.7 τα οποία εμφανίζονται με διπλάσια συχνότητα από ότι το πλάτος $\tilde{A}(t)$. Για παράδειγμα από ένα μέγιστο του πλάτους $\tilde{A}(t)$ μέχρι και το επόμενο, δηλαδή σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου του, υπάρχουν δυο μηδενικά, δηλαδή τα μηδενικά εμφανίζονται ανά χρονικό διάστημα ίσο με μισή περίοδο του πλάτους $\tilde{A}(t)$ και άρα με διπλάσια συχνότητα. Σύμφωνα με την Εξ. 11.28 η συχνότητα του $\tilde{A}(t)$ είναι ίση με $\Delta\omega/2$ και άρα μηδενικά εμφανίζονται με διπλάσια συχνότητα $\Delta\omega$ η οποία από την Εξ. 11.26 είναι ίση με $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ όπου ω_1 είναι η υψηλότερη κυκλική συχνότητα δηλαδή της χορδής με την μεγαλύτερη τάνυση. Οι αντίστοιχες συχνότητες σχετίζονται μέσω της $\Delta f = f_1 - f_2$. Αφού ο μουσικός ανιχνεύει έναν αριθμό $n = 120$ από τέτοια μηδενικά σε χρόνο $t = 10$ λεπτών, τότε η συχνότητά τους σε Hz είναι ίση με

$$\Delta f = \frac{n}{t} = \frac{120}{10 \times 60} = 0.2\ Hz$$

Από τα δεδομένα $f_1 = 440\ Hz$ και άρα η χαμηλότερη συχνότητα είναι ίση με

$$f_2 = f_1 - \Delta f = 440 - 0.2 = 439.8\ Hz$$

11.17 Ο μουσικός του προηγούμενου προβλήματος, προσπαθεί να κουρδίσει μια χαλαρή χορδή μιας κιθάρας, διεγείροντάς την ταυτόχρονα με μια πανομοιότυπη τανυσμένη χορδή μιας άλλης κιθάρας και σφίγγοντάς την κατάλληλα. Χρησιμοποιώντας ένα δυναμόμετρο, βρίσκει ότι η δύναμη τάνυσης των δυο χορδών έχουν αρχικό λόγο 1.1025 και το αντίστοιχο διακρότημα που ακούει, έχει πλάτος με περίοδο T_δ. Αφού σφίξει ελαφριά την χαλαρή χορδή, ο λόγος των δυνάμεων αλλάζει σε 1.0404 και η περίοδος του πλάτους σε $T_\delta' = T_\delta + 0.2\ s$. Να βρεθεί η συχνότητα της τανυσμένης χορδής εάν γνωρίζετε ότι η συχνότητα μιας μουσικής χορδής είναι ανάλογη της ρίζας της δύναμης τάνυσης.

<u>Απάντηση</u>: $300\ Hz$

<u>Λύση</u>: Έστω f_2 και $f_2{}'$ οι συχνότητες της χαλαρής χορδής πριν και μετά το σφίξιμο αντίστοιχα και f_1 της σφιγμένης χορδής. Αφού $f \sim \sqrt{F_T}$ όπου F_T η δύναμη τάνυσης, τότε από τα δεδομένα έχουμε

$$\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{1.1025} = 1.05$$

και

$$\frac{f_1}{f_2{}'} = \sqrt{1.0404} = 1.02$$

Από την Εξ. 11.26 γνωρίζουμε ότι το διακρότημα εμφανίζεται με συχνότητα

$$f_\delta = \frac{\Delta f}{2} = \frac{f_1 - f_2}{2}$$

και άρα έχει περίοδο

$$T_\delta = \frac{1}{f_\delta} = \frac{2}{f_1 - f_2}$$

Ομοίως μετά το σφίξιμο

$$T_\delta{}' = \frac{2}{f_1 - f_2{}'}$$

Από τα δεδομένα έχουμε $T_\delta' = T_\delta + 0.2$ και άρα

$$\frac{2}{f_1 - f_2{}'} = \frac{2}{f_1 - f_2} + 0.2$$

$$\frac{1}{f_1(1 - f_2'/f_1)} = \frac{1}{f_1(1 - f_2/f_1)} + 0.1$$

$$\frac{1}{1 - f_2'/f_1} = \frac{1}{1 - f_2/f_1} + 0.1 f_1$$

Έτσι έχουμε

$$0.1f_1 = \frac{1}{1 - 1/1.02} - \frac{1}{1 - 1/1.02}$$

οπότε τελικά $f_1 = 300\ Hz$

12. ΚΥΜΑΤΑ

Μαθηματική Περιγραφή Κύματος

12.1 Λεπτή χορδή απείρου μήκους βρίσκεται τανυσμένη σε ισορροπία επάνω στον άξονα x. Ξαφνικά ένας εγκάρσιος παλμός διέρχεται από αυτήν ο οποίος ταξιδεύει προς τα δεξιά με ταχύτητα ίση με $v = 1.2\ m/s$. Ως αποτέλεσμα, τα μόρια της χορδής αποκλίνουν από τη θέση ισορροπίας τους με κατακόρυφη απομάκρυνση y (σε m) που στο $t = 0$ δίνεται από την εξίσωση

$$y = A\frac{x}{x^2 + \beta^2}$$

όπου x είναι η οριζόντια συντεταγμένη κατά μήκος της χορδής, $A = 10\ m^2$ και $\beta = 1\ m$. Να βρεθεί η κατακόρυφη απομάκρυνση y ενός μορίου της χορδής που βρίσκεται στο $x = 3\ m$ κατά τη χρονική στιγμή $t = 1.5\ s$.

<u>Απάντηση</u>: $4.92\ m$

<u>Λύση</u>:

Η εξίσωση του κύματος προκύπτει από την δοθείσα έκφραση με την αντικατάσταση του x με $x - vt$ δηλαδή:

$$y(x,t) = A\frac{x - vt}{(x - vt)^2 + \beta^2}$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα:

$$y = 10\frac{3 - 1.2 \times 1.5}{(3 - 1.2 \times 1.5)^2 + 1} = 4.92\ m$$

12.2 Λεπτή χορδή απείρου μήκους βρίσκεται τανυσμένη σε ισορροπία επάνω στον άξονα x. Ξαφνικά ένας εγκάρσιος παλμός διέρχεται από αυτήν ο οποίος ταξιδεύει προς τα δεξιά με ταχύτητα $v = 0.5\ m/s$. Ως αποτέλεσμα, τα μόρια της χορδής αποκλίνουν από τη θέση ισορροπίας τους με κατακόρυφη απομάκρυνση y (σε m) που στο $t = 0$ δίνεται από την εξίσωση

$$y = A\frac{x}{x^2 + \beta^2}$$

με $A = 8\ m^2$ και $\beta = 3\ m$. (α) Να γίνει η γραφική παράσταση $y(x)$ της παραπάνω έκφρασης (β) Να βρεθεί σε ποια x η κατακόρυφη απομάκρυνση είναι ίση με $y = 1.28\ m$ κατά τη χρονική στιγμή $t = 1.5\ s$.

<u>Απάντηση</u>: (β) $x = 0.93\ m$ και $x = 50.55\ m$

Λύση:

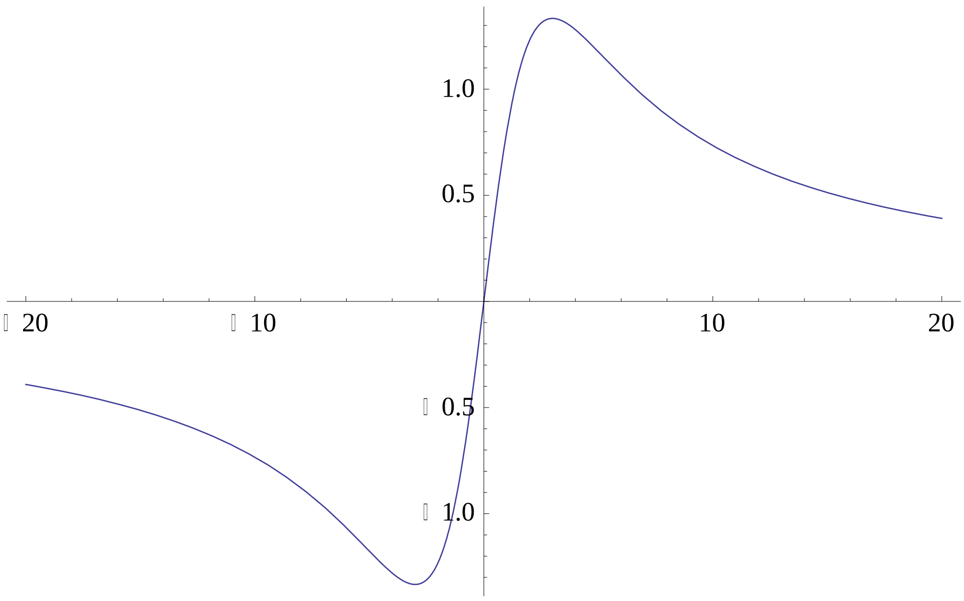
(α) Η δεδομένη συνάρτηση είναι η

$$y = 8\frac{x}{x^2 + 3^2}$$

και η γραφική της παράσταση φαίνεται παρακάτω. Έχει ρίζα στο $x = 0$ ενώ στο $x \to \pm\infty$ τείνει στο

$$y \to 8\frac{x}{x^2} = \frac{8}{x} \to 0^{\pm}$$

Για μικρά x το x^2 είναι αμελητέο σε σχέση με το 3^2 και έτσι η συνάρτηση γίνεται η ευθεία $y = 8x/9$ με κλίση $8/9$.



(β) Στο $t = 1.5\ s$ το κύμα έχει μετακινηθεί κατά $\Delta x = vt = 0.5 \times 1.5 = 0.75\ m$ και επομένως περιγράφεται από την εξίσωση $f(x - \Delta x)$ όπου $f(x)$ είναι η δεδομένη συνάρτηση κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ (το μείον είναι επειδή το κύμα κινείται προς τα δεξιά). Επομένως το y αλλάζει σε

$$y = 8\frac{x - \Delta x}{(x - \Delta x)^2 + 3^2} = 8\frac{x - 0.75}{(x - 0.75\,)^2 + 3^2}$$

Θέτουμε $y = 1.28$ και $z = x - 0.75$ και έχουμε

$$1.28 = 8\frac{z}{z^2 + 3^2} => 0.16(z^2 + 3^2) = 8z$$

ή

$$z^2 - 50z + 9 = 0$$

Αυτή είναι μια δευτεροβάθμια με λύσεις $z = 0.18\ m$ και $z = 49.8\ m$. Οι αντίστοιχες τιμές για x υπολογίζονται από την $x = z + \Delta x = z + 0.75$ και είναι οι

$x = 0.93\ m$ και $x = 50.55\ m$

12.3 Δυο κύματα που διαδίδονται πάνω σε μια χορδή, αναπαρίστανται από τις εξισώσεις:

$$y_1 = \frac{a}{(bx - ct)^2 + 2}$$

και

$$y_2 = \frac{-a}{(bx + ct - d)^2 + 2}$$

όπου $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$ και $d = 6$ σε κατάλληλες μονάδες ώστε τα x και y να είναι σε μέτρα ενώ το t σε δευτερόλεπτα. (α) Να γίνει η γραφική παράσταση των δυο κυμάτων κατά την χρονική στιγμή $t = 0$. (β) Να βρεθούν οι ταχύτητες των δυο κυμάτων. (γ) Να βρεθεί γραφικώς σε ποια χρονική στιγμή τα δυο κύματα αλληλοεξουδετερώνονται σε όλα τα σημεία x. (δ) Να βρεθεί γραφικώς σε ποιο σημείο της χορδής τα δυο κύματα αλληλοεξουδετερώνονται σε κάθε χρονική στιγμή t;

<u>Απάντηση</u>: (β) $\pm 4/3\ m/s$ (γ) $3/4\ s$ (δ) $x = 1\ m$

<u>Λύση</u>:

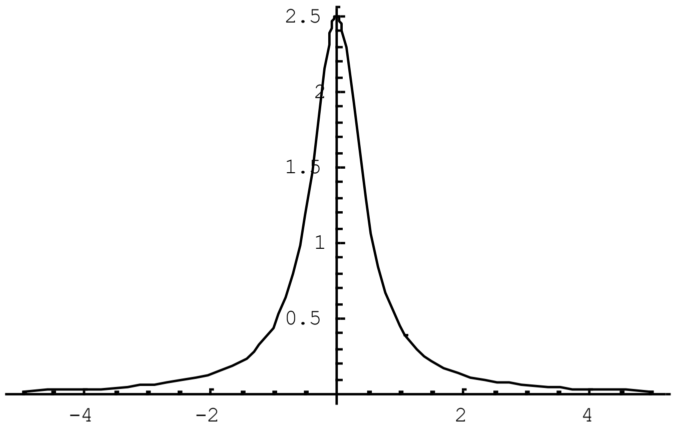
α) Για $t = 0$ τα δυο κύματα γίνονται

$$y_1 = \frac{5}{(3x)^2 + 2}$$

και

$$y_2 = \frac{-5}{(3x - 6)^2 + 2}$$

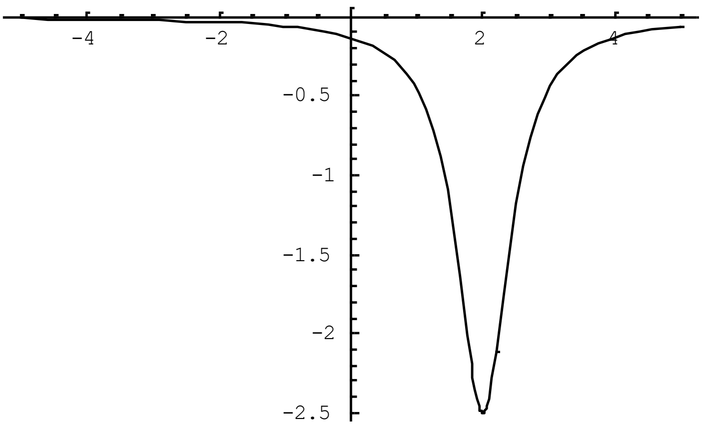
Η $y_1(x)$ είναι συμμετρική συνάρτηση του αφού $y_1(-x) = y_1(x)$ λόγω του τετραγώνου. Επίσης παίρνει παντού θετικές τιμές. Επειδή το x βρίσκεται στον παρανομαστή, είναι επίσης μια φθίνουσα συνάρτηση του $|x|$ (απόλυτο λόγω του τετραγώνου). Όταν $x \to \infty$ τότε $y_1 \to 0$ και στο $x = 0$ παίρνουμε $y_1 = 5/2$ επομένως η γραφική παράσταση θα είναι κάπως έτσι:



Η $y_2(x)$ μπορεί να γραφεί ως

$$y_2 = \frac{-5}{(3x-6)^2+2} = \frac{-5}{(3\tilde{x})^2+2}$$

Όπου $\tilde{x} = x - 2$ δηλαδή έχει την ίδια μορφή με την $y_1(x)$ με την μόνη διαφορά ότι παίρνει παντού αρνητικές τιμές και ότι είναι κεντραρισμένη στο $\tilde{x} = 0$ δηλαδή στο $x = 2$. Επομένως η γραφική παράσταση της $y_2(x)$ είναι κάπως έτσι:



β) Η γενική έκφραση ενός κύματος που κινείται προς τα δεξιά είναι $y = f(x - vt)$. Εάν η ταχύτητα v είναι αρνητική τότε το κύμα κινείται προς τα αριστερά. Οι δοθείσες y_1 και y_2 μπορούν να γραφούν ως

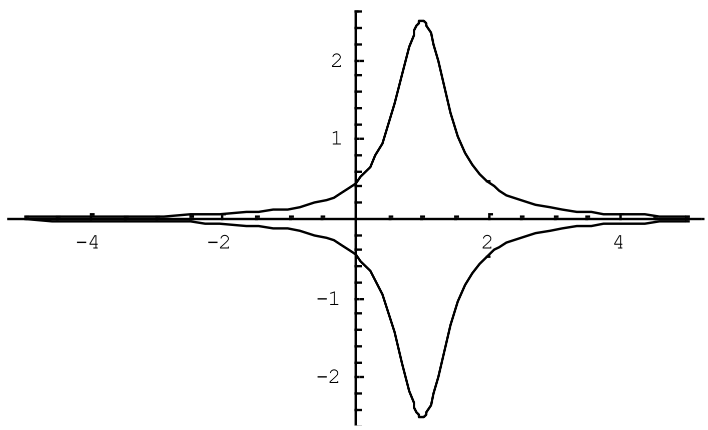
$$y_1 = \frac{5}{9(x-4/3t)^2+2}$$

και

$$y_2 = \frac{-5}{9(x+4/3t-2)^2+2}$$

οπότε η μια είναι συνάρτηση του $x - 4/3t$ και η άλλη του $x + 4/3t$ και άρα η y_1 κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα $v_1 = 4/3\ m/s$ και η άλλη προς τα αριστερά με ταχύτητα $v_2 = -4/3\ m/s$.

γ) Επειδή πρόκειται για δυο ίσων και αντίθετων κυματομορφών που κινούνται με ίσες και αντίθετες ταχύτητες πλησιάζοντας η μια την άλλη, σε κάποια στιγμή θα είναι κεντραρισμένες στο ίδιο σημείο και θα αλληλοεξουδετερωθούν. Όπως είδαμε στο $t = 0$ η μία είναι κεντραρισμένη στο $x = 0$ και η άλλη στο$x = 2$. Λόγω συμμετρίας και ταχύτητες ίσου μέτρων, θα κεντραριστούν στο μέσο στο $x = 1$ οπότε θα έχει διέλθει χρόνος ίσος με $t = x/v_1 = 1/v_1 = 3/4\ s$. Η κατάσταση θα μοιάζει κάπως έτσι:



δ) Λύση 1: Σε κάποιο σημείο ισχύει λόγω επαλληλίας $y_1 + y_2 = 0$. Από τις δοθείσες εξισώσεις αυτό σημαίνει

$$9(x - 4/3t)^2 + 2 = 9(x + 4/3t - 2)^2 + 2$$

$$(x - 4/3t)^2 = (x + 4/3t - 2)^2$$

$$\left(x - \frac{4}{3}t\right) = \pm(x + \frac{4}{3}t - 2)$$

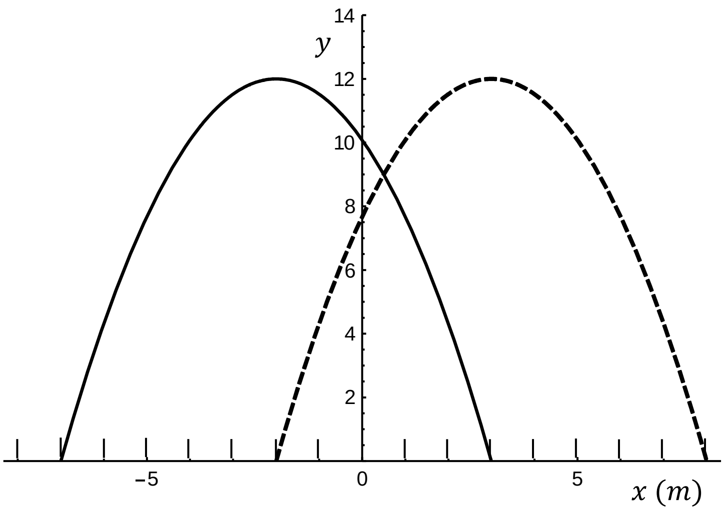
Η θετική ρίζα δίνει τον χρόνο $t = 3/4$ s του προηγούμενου ερωτήματος. Η αρνητική ρίζα οδηγεί στο

$$x - \frac{4}{3}t = -x - \frac{4}{3}t + 2 => 2x = 2 => x = 1\ m$$

Λύση 2: Οι δυο κορυφές κινούνται αντίθετα με ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με αντίστοιχες εξισώσεις $x_1 = 3/4t$ και $x_2 = 2 - 3/4t$ (κεντραρισμένες στο $x = 0$ και $x = 2$ αντίστοιχα και με αντίθετες ταχύτητες $\pm 3/4$). Λόγω συμμετρίας, στο μέσο των δυο κορυφών, τα δυο κύματα αλληλο-αναιρούνται. Ο μέσος είναι στο

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{3}{4}t + 2 - \frac{3}{4}t}{2} = 1\ m$$

12.4 Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα δυο στιγμιότυπα ενός κύματος (για $t = -6\ s$ η διακεκομμένη γραμμή και $t = 4\ s$ η συνεχής γραμμή αντίστοιχα) το οποίο για $t = 0\ s$ περιγράφεται από την εξίσωση $y(x, 0) = y_0(1 - x^2/x_0^2)$ με τον περιορισμό $y \geq 0$ (δηλαδή το συγκεκριμένο κύμα δεν λαμβάνει αρνητικές τιμές). Να βρεθεί η γενική μαθηματική έκφραση $y(x, t)$ του κύματος για κάθε χρονική στιγμή t. Να προσδιορισθούν όλες οι σταθερές του προβλήματος από τη δεδομένη γραφική παράσταση εάν γνωρίζετε ότι τα βασικά χαρακτηριστικά της αντιστοιχούν όλα σε ακέραιους αριθμούς. Να σχεδιασθεί η γραφική παράσταση του στιγμιότυπου $t = 10\ s$ και να βρεθεί η τιμή του y του κύματος στο $x = -6\ m$ (αυτού του στιγμιότυπου).



<u>Απάντηση</u>: $11.52\ m$

<u>Λύση</u>:

Η απομάκρυνση των δυο κυματομορφών ισούται με

$$\Delta x = x_2 - x_1 = -7 - (-2) = -5\ m$$

(π.χ παίρνοντας τις αριστερές άκρες). Η χρονική διαφορά των δυο κυμάτων ισούται με:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 4 - (-6) = 10\ s$$

Έτσι η ταχύτητα του κύματος είναι

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{5}{10} = -0.5\ m/s$$

Για να βρούμε τη γενική μαθηματική έκφραση $y(x, t)$ του κύματος αντικαθιστούμε το x του αρχικού στιγμιότυπου με το $x - vt$. Η εξίσωση είναι η εξής:

$$y(x, t) = y_0\left(1 - \frac{(x - vt)^2}{x_0^2}\right) = y_0\left(1 - \frac{(x + 0.5t)^2}{x_0^2}\right)$$

Από τη γραφική παράσταση, το μέγιστο είναι στο $y_0 = 12$. Η γραφική παράσταση στο $t = 0$ είναι συμμετρική με ρίζες στο $x = \pm x_0$ και έτσι έχει εύρος στον άξονα x ίσο με $2x_0$. Από τη γραφική παράσταση βλέπουμε ότι οι δεδομένοι παλμοί έχουν εύρος $8 - (-2) = 10$ (η διακεκομμένη) και έτσι $x_0 = 5$.

Επομένως η γενική μαθηματική έκφραση $y(x,t)$ του κύματος είναι η εξής:

$$y(x,t) = 12\left(1 - \frac{(x+0.5t)^2}{25}\right)$$

Για $x = -6$ και $t = 10\ s$ έχουμε

$$y(-6,10) = 11.52\ m$$

12.5 Δυο όμοιοι κυματικοί παλμοί που περιγράφονται στο $t = 0\ s$ από τις

$$y_1(x,0) = y_0(1 - x^2/x_0^2)$$

και

$$y_2(x,0) = y_0(1 - (x-2x_0)^2/x_0^2)$$

με $x_0 = 3\ m$ και με τον περιορισμό $y_1 \geq 0$ και $y_2 \geq 0$ (δηλαδή παίρνουν μόνο θετικές τιμές), διαδίδονται επάνω στην ίδια χορδή μεγάλου μήκους, ο πρώτος προς τα δεξιά και ο δεύτερος προς τα αριστερά. Εάν κατά τη χρονική στιγμή $t = 3.2\ s$ στο $x = x_0$ το συνιστάμενο κύμα έχει ύψος ίσο με $y = 0.72\ y_0$ (με τον t να είναι ο μικρότερος χρόνος που μπορεί να συμβεί αυτό και ενώ τα δυο κύματα αλληλο-καλύπτονται), τότε να βρεθεί η δύναμη με την οποία είναι τανυσμένο το νήμα εάν έχει γραμμική πυκνότητα μάζας ίση με $2\ kg/m$.

Απάντηση: $11.52\ m$

Λύση:

Αφού πρόκειται για την ίδια χορδή, η ταχύτητα των δυο κυμάτων είναι ίση κατά μέτρο, έστω v. Από την επαλληλία των δυο κυμάτων:

$$y(x,t) = y_0\left[1 - \frac{(x-vt)^2}{x_0^2}\right] + y_0\left[1 - \frac{(x+vt-2x_0)^2}{x_0^2}\right]$$

(προσέξτε ότι αυτό που κινείται προς τα δεξιά περιέχει τον όρο $x - vt$ ενώ αυτό που κινείται προς τα αριστερά περιέχει το όρο $x + vt$. Στο $x = x_0$

$$y(x,t) = y_0\left[1 - \frac{(x_0-vt)^2}{x_0^2}\right] + y_0\left[1 - \frac{(vt-x_0)^2}{x_0^2}\right] = 2y_0\left[1 - \frac{(x_0-vt)^2}{x_0^2}\right]$$

Εφαρμόζουμε την δεδομένη συνθήκη

$$y = 0.72y_0 => \left[1 - \frac{(x_0-vt)^2}{x_0^2}\right] = 0.36 => \frac{(x_0-vt)^2}{x_0^2} = 0.64$$

$$\frac{x_0 - vt}{x_0} = \pm 0.8 => x_0 - vt = \pm 0.8x_0 => vt = x_0 \mp 0.8x_0$$

Επειδή θέλουμε το μικρότερο χρόνο, κρατάμε το μείον.

$$v = \frac{0.2x_0}{t} = \frac{0.2 \times 3}{3.2} = 0.1875\ m/s$$

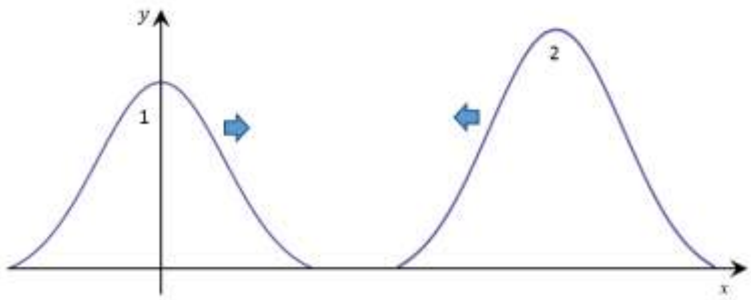
Για να βρούμε τη δύναμη, εφαρμόζουμε τον τύπο της ταχύτητας ενός κύματος σε χορδή:

$$v = \sqrt{F/\mu} => F = \mu v^2 = 2 \times 0.1875^2 = 0.0703\ N$$

12.6 Ένας φοιτητής κόβει από ένα μασούρι νήματος ένα κομμάτι μήκους L, και αφού το ζυγίζει και βρίσκει μάζα m, το τανύζει μεταξύ δυο σημείων με τάση T. Ακολούθως δημιουργεί δυο ξεχωριστούς κυματικούς παλμούς έτσι ώστε ο πρώτος να διαδίδεται προς τα δεξιά ενώ ο δεύτερος προς τα αριστερά όπως στο παρακάτω σχήμα. Θεωρώντας ότι το κομμάτι του νήματος βρισκόταν αρχικά επάνω στον άξονα x και ότι ο άξονας y είναι η κατακόρυφη απομάκρυνση των μορίων της χορδής από την αρχική τους θέση, τότε οι δυο παλμοί αναπαρίστανται στο $t = 0$ από τις εξισώσεις

$$y_1 = ae^{-bx^2}$$
$$y_2 = ce^{-d(x-x_0)^2}$$

όπου τα a, b, c, d και x_0 είναι θετικές σταθερές σε κατάλληλες μονάδες έτσι ώστε τα x και y να είναι σε μέτρα. Όταν οι δυο κορυφές των παλμών έρθουν σε κοινό x, να βρεθεί η κατακόρυφη ταχύτητα των μορίων της χορδής στο $x = x_0$ (όχι την ταχύτητα του κύματος, την ταχύτητα της κατακόρυφης ταλάντωσης). Θεωρήστε ότι το L είναι αρκετά μεγάλο ώστε να μην υπάρχουν στο πρόβλημά σας ανακλάσεις των κυμάτων στα άκρα.



Απάντηση: $vx_0\left(abe^{-bx_0{}^2/4} - cde^{-dx_0{}^2/4}\right)$

Λύση:

Η ταχύτητα διάδοσης σε χορδή δίνεται από την

$$v = \sqrt{\frac{F}{m/L}}$$

Αφού οι δυο παλμοί κινούνται στην ίδια χορδή, τότε θα έχουν την ίδια ταχύτητα, ίση με το v στην παραπάνω σχέση. Στο $t \neq 0$ οι δυο παλμοί αναπαρίστανται από τις εξισώσεις

$$y_1 = ae^{-b(x-vt)^2}$$

και

$$y_2 = ce^{-d(x+vt-x_0)^2}$$

Από την επαλληλία έχουμε ότι το συνιστάμενο κύμα είναι ίσο με

$$y = y_1 + y_2 = ae^{-b(x-vt)^2} + ce^{-d(x+vt-x_0)^2}$$

Προσέξτε ότι ο 1^{ος} που κινείται προς τα δεξιά έχει τον όρο $x - vt$ ενώ ο 2^{ος} που κινείται προς τα αριστερά έχει τον όρο $x + vt$. Η κατακόρυφη ταχύτητα των μορίων της χορδής δίνεται από την παράγωγο

$$\frac{dy}{dt} = 2bv(x - vt)ae^{-b(x-vt)^2} - 2dv(x + vt - x_0)ce^{-d(x+vt-x_0)^2}$$

Στο $t = 0$ ο 1^{ος} παλμός έχει κορυφή στο $x = 0$ ενώ ο 2^{ος} έχει κορυφή στο $x = x_0$. Αφού κινούνται με ίσες και αντίθετες ταχύτητες, όταν οι δυο κορυφές θα έρθουν σε κοινό x, τότε θα έχουν καλύψει απόσταση ίση με $x_0/2$ ο καθένας και έτσι ο αντίστοιχος χρόνος είναι ίσος με

$$t = \frac{x_0/2}{v} => vt = \frac{x_0}{2}$$

Η κατακόρυφη ταχύτητα σε αυτή τη χρονική στιγμή στο $x = x_0$ είναι ίση με

$$\frac{dy}{dt} = 2bv\left(x_0 - \frac{x_0}{2}\right)ae^{-b(x_0-x_0/2)^2} - 2dv(x_0 + x_0/2 - x_0)ce^{-d(x_0+x_0/2-x_0)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = bvx_0ae^{-bx_0{}^2/4} - dvx_0ce^{-dx_0{}^2/4}$$

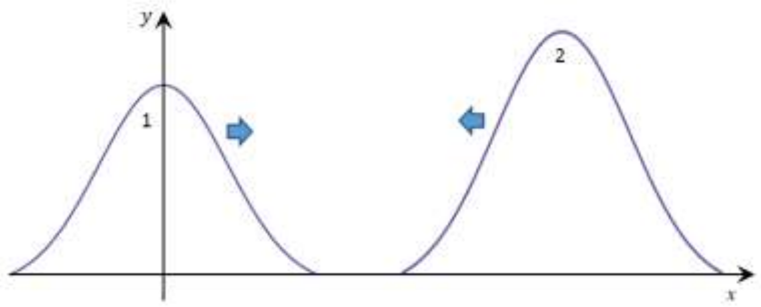
$$\frac{dy}{dt} = vx_0\left(abe^{-bx_0{}^2/4} - cde^{-dx_0{}^2/4}\right)$$

12.7 Ένας φοιτητής κόβει από ένα μασούρι νήματος ένα κομμάτι μήκους L, και αφού το ζυγίζει και βρίσκει μάζα m, το τανύζει μεταξύ δυο σημείων με τάση T. Ακολούθως δημιουργεί δυο ξεχωριστούς κυματικούς παλμούς έτσι ώστε ο πρώτος να διαδίδεται προς τα δεξιά ενώ ο δεύτερος προς τα αριστερά όπως στο παρακάτω σχήμα. Θεωρώντας ότι το κομμάτι του νήματος βρισκόταν αρχικά επάνω στον άξονα x και ότι ο άξονας y είναι η κατακόρυφη απομάκρυνση των μορίων της χορδής από την αρχική τους θέση, τότε οι δυο παλμοί αναπαρίστανται στο $t = 0$ από τις εξισώσεις

$$y_1 = a - \frac{ax^2}{b^2 + x^2}$$

$$y_2 = c - \frac{c(x - x_0)^2}{d^2 + (x - x_0)^2}$$

όπου τα a, b, c, d και x_0 είναι θετικές σταθερές σε κατάλληλες μονάδες έτσι ώστε τα x και y να είναι σε μέτρα. Όταν οι δυο κορυφές των παλμών ανταλλάξουν x (σε σχέση με αυτό που είχαν στο $t = 0$), να βρεθεί η κατακόρυφη απόσταση μορίων της χορδής στο $x = x_0/2$. Θεωρήστε ότι το L είναι αρκετά μεγάλο ώστε να μην υπάρχουν στο πρόβλημά σας ανακλάσεις των κυμάτων στα άκρα.



Λύση

Η ταχύτητα διάδοσης σε χορδή δίνεται από την

$$v = \sqrt{\frac{F}{m/L}}$$

Αφού οι δυο παλμοί κινούνται στην ίδια χορδή, τότε θα έχουν την ίδια ταχύτητα, ίση με το v στην παραπάνω σχέση. Στο $t \neq 0$ οι δυο παλμοί αναπαρίστανται από τις εξισώσεις

$$y_1 = a - \frac{a(x - vt)^2}{b^2 + (x - vt)^2}$$

και

$$y_2 = c - \frac{c(x + vt - x_0)^2}{c^2 + (x + vt - x_0)^2}$$

Από την επαλληλία έχουμε ότι το συνιστάμενο κύμα είναι ίσο με

$$y = y_1 + y_2 = a + c - \frac{a(x - vt)^2}{b^2 + (x - vt)^2} - \frac{c(x + vt - x_0)^2}{c^2 + (x + vt - x_0)^2}$$

Προσέξτε ότι ο 1ος που κινείται προς τα δεξιά έχει τον όρο $x - vt$ ενώ ο 2ος που κινείται προς τα αριστερά έχει τον όρο $x + vt$. Στο $t = 0$ ο 1ος παλμός έχει κορυφή στο $x = 0$ ενώ ο 2ος έχει κορυφή στο $x = x_0$. Αφού κινούνται με ίσες και αντίθετες ταχύτητες, όταν οι δυο κορυφές θα ανταλλάξουν x, τότε θα έχουν καλύψει απόσταση ίση με x_0 ο καθένας και έτσι ο αντίστοιχος χρόνος είναι ίσος με

$$t = \frac{x_0}{v} => vt = x_0$$

Η κατακόρυφη απομάκρυνση σε αυτή τη χρονική στιγμή στο $x = x_0/2$ είναι ίση με

$$y = y_1 + y_2 = a + c - \frac{a(x_0/2\ - x_0)^2}{b^2 + (x_0/2\ - x_0)^2} - \frac{c(x_0/2\ + x_0 - x_0)^2}{c^2 + (x_0/2\ + x_0 - x_0)^2}$$

$$y = y_1 + y_2 = a + c - \frac{a(x_0/2\ )^2}{b^2 + (x_0/2\ )^2} - \frac{c(x_0/2\ )^2}{c^2 + (x_0/2\ )^2}$$

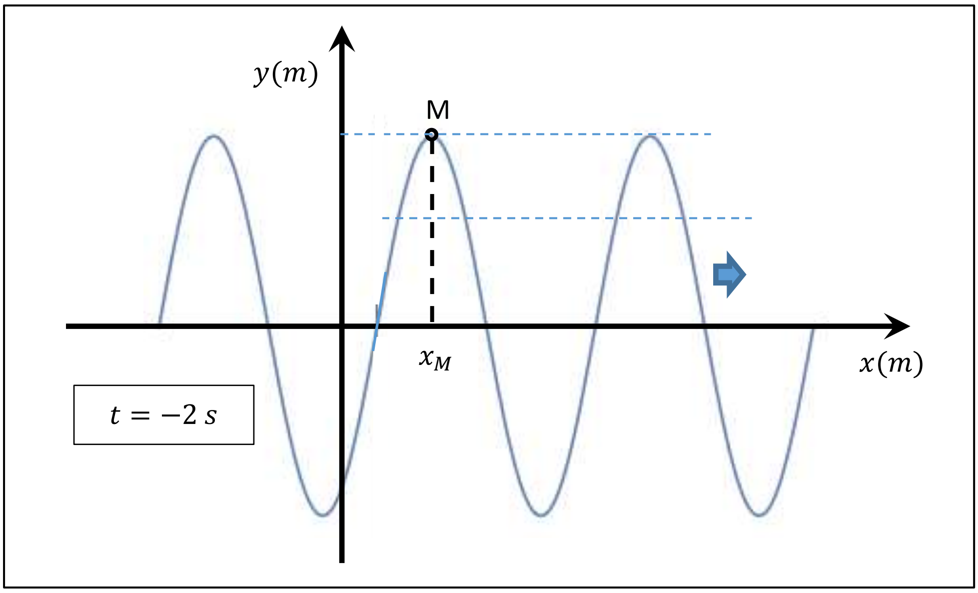
$$y = y_1 + y_2 = a + c - \frac{a{x_0}^2}{4b^2 + {x_0}^2} - \frac{c{x_0}^2}{4c^2 + {x_0}^2}$$

Περιοδικά - Αρμονικά Κύματα

12.8 Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται το στιγμιότυπο $t = -2\ s$ ενός αρμονικού κύματος που κινείται προς τα δεξιά και το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση

$$y = Asin\left[\frac{\pi}{4}(\alpha x - \beta t)\right]$$

όπου $A = 10\ m$, $\alpha = 4\ m^{-1}$ και το $\beta = 2\ s^{-1}$. Το σημείο M ταξιδεύει μαζί με το κύμα (είναι ιδεατό και όχι υλικό σημείο) και βρίσκεται επάνω σε ένα μέγιστο αυτού με συντεταγμένη x_M. Να βρεθεί πόσο θα μεταβληθεί το x_M μετά από χρόνο $\Delta t = 3\ s$.



Λύση:

Η δοθείσα εξίσωση μπορεί να γραφτεί και ως

$$y = Asin\left(\frac{\pi\alpha}{4}x - \frac{\pi\beta}{4}t\right)$$

η οποία είναι της μορφής $y = Asin(kx - \omega t)$ που έχουμε μελετήσει στο κεφάλαιο "ΚΥΜΑΤΑ". Από τη σύγκριση παίρνουμε

$$k = \frac{\pi\alpha}{4}$$

και

$$\omega = \frac{\pi\beta}{4}$$

Η ταχύτητα του κύματος είναι ίση με

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\beta}{\alpha}$$

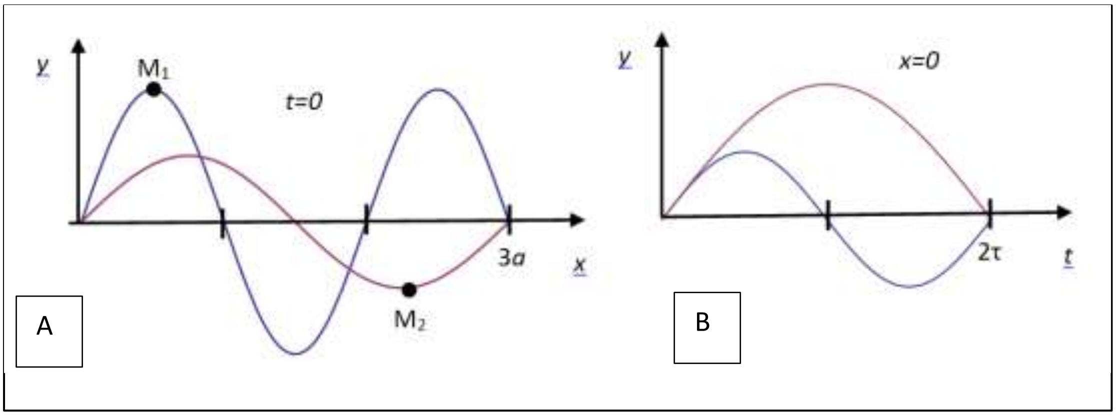
Επομένως όλο το κύμα και άρα και το x_B θα μετακινηθούν κατά

$$\Delta x_B = v\Delta t = \frac{\beta}{\alpha}\Delta t$$

Αντικαθιστώντας

$$\Delta x_B = \frac{3 \times 2}{4} = 1.5\ m$$

12.9 Στο παρακάτω σχήμα Α φαίνεται το στιγμιότυπο $t\ = 0$ δυο αρμονικών κυμάτων τα οποία διαδίδονται ταυτόχρονα σε δυο διαφορετικές χορδές (κοντά η μια στην άλλη) όπου y είναι η κατακόρυφη απομάκρυνση των μορίων της κάθε χορδής από τη θέση ισορροπίας της, το $+x$ είναι η διεύθυνση διάδοσης των κυμάτων, t ο χρόνος και α =2 m. Στο σχήμα Β φαίνεται η γραφική παράσταση των ταλαντώσεων των μορίων της χορδής στο σημείο $x\ =\ 0$ συναρτήσει του t λόγω της ύπαρξης των δυο κυμάτων όπου το τ =2.5 s. Να βρεθεί κατά πόση απόσταση επάνω στον άξονα x θα απέχουν οι κορυφές M_1 και M_2 (το μέγιστο του ενός κύματος και το ελάχιστο του άλλου) μετά από χρόνο 2.5 (δηλαδή 2 ½) περιόδων του κύματος που περιέχει το M_2. (Τα M_1 και M_2 είναι ιδεατά σημεία που κινούνται μαζί με τα κύματα και όχι υλικά σημεία).



Λύση:

Από τη γραφική παράσταση στα αριστερά, βλέπουμε ότι τα μήκη κύματος των δυο κυμάτων ισούνται με $\lambda_1 = 2\alpha = 4\,m$ (αυτό με το μεγαλύτερο πλάτος) και $\lambda_2 = 3\alpha = 6\,m$. Από τη γραφική παράσταση στα δεξιά, οι περίοδοι των δυο κυμάτων ισούνται με $T_1 = 4\tau = 10\,s$ (αυτό με το μεγαλύτερο πλάτος) και $T_2 = 2\tau = 5\,s$. Ο δεδομένος χρόνος αναφέρεται στην περίοδο του δεύτερου κύματος (χαμηλότερο πλάτος) επομένως

$$t = 2.5T_1 = 12.5\,s$$

Οι αντίστοιχες ταχύτητες είναι ίσες με:

$$v_1 = \frac{\lambda_1}{T_1} = \frac{4}{10} = 0.4\,m/s$$

$$v_2 = \frac{\lambda_2}{T_2} = \frac{6}{5} = 1.2\,m/s$$

Το M_1 αρχικά βρίσκεται στο $x = a/2 = 1\,m$ ενώ το M_2 στο $x = 2a + 1/4a = 4.5\,m$. Επομένως η αρχική διαφορά είναι $\Delta x = 4.5 - 1 = 3.5\,m$.

Στο χρόνο t τα M_1 και M_2 έχουν μετακινηθεί κατά

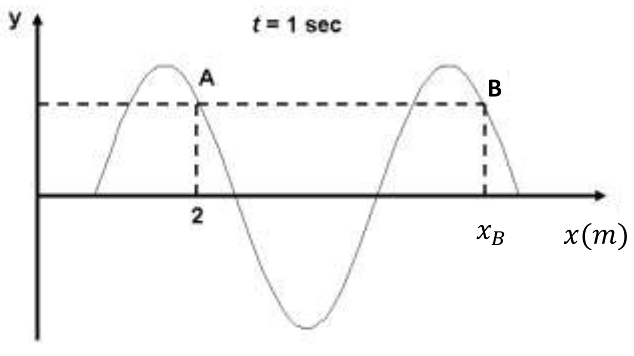
$$\Delta x_1 = v_1 t = 0.4 \times 12.5 = 5\,m$$

$$\Delta x_2 = v_2 t = 1.2 \times 12.5 = 15\,m$$

Επομένως η νέα διαφορά απόστασης ισούται με

$$\Delta x = (4.5 + 5) - (1 + 15) = -6.5\,m$$

12.10 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το στιγμιότυπο ενός κύματος κατά το χρόνο $t = 1\,s$ το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση $y = y_0 sin(kx - \omega t)$ με $\omega = 3\pi/4\,rad/s$. Εάν η φάση του σημείου A ισούται με $\varphi_A = \pi/4\,rad$ και η συντεταγμένη του $x_A = 2\,m$ στο συγκεκριμένο στιγμιότυπο, τότε να βρεθεί η απομάκρυνση x_B του σημείου B σε m.



<u>Λύση</u>: Από τον ορισμό της φάσης

$$\varphi_A = kx_A - \omega t$$

Αντικαθιστώντας τα x_A και t από τη γραφική παράσταση και το δεδομένο φ_A, βρίσκουμε για το k:

$$\varphi_A = 2k - \omega => k = \frac{\varphi_A + \omega}{2} = \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2}$$

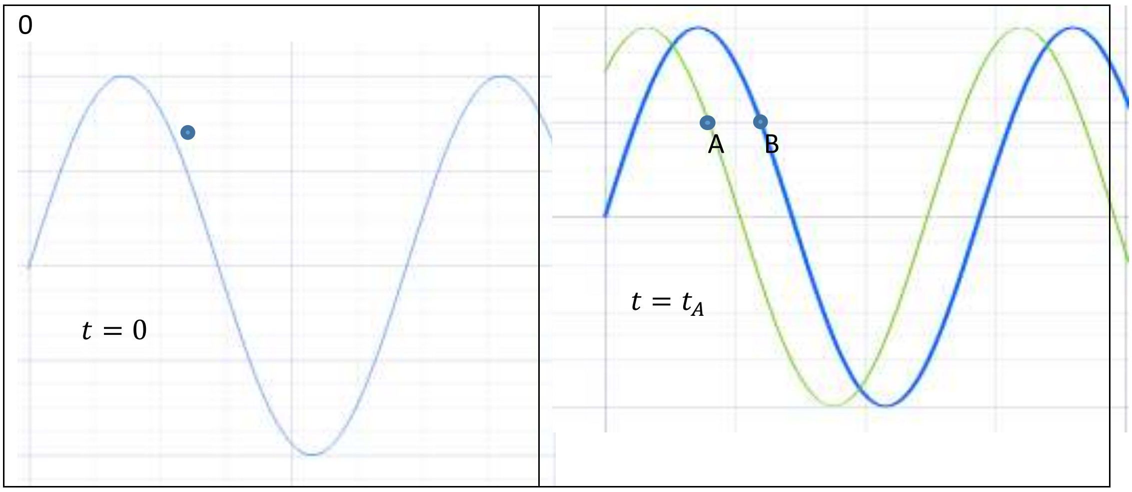
Το μήκος κύματος ισούται με

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4\ m$$

Τα σημεία Α και Β απέχουν ένα μήκος κύματος και έτσι

$$x_B - 2 = \lambda => x_B = \lambda + 2 = 2 + 4 = 6\ m$$

12.11 Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δυο κύματα στο $t = 0$ (αριστερά) όπου συμπίπτουν, και σε μεταγενέστερο χρόνο t_A (στα δεξιά) όπου έχουν πλέον ξεχωρίσει (κινούνται σε διαφορετικό μέσο με διαφορετικές ταχύτητες). Τα δυο κύματα περιγράφονται από τις εξισώσεις $y_1 = 10sin[\pi(\alpha x - \beta t)]$ και $y_2 = 10sin[\pi(\alpha x - \gamma t)]$. Να βρεθεί η οριζόντια απόσταση ΑΒ σε m των δυο κυμάτων μετά από χρόνο t_A. Δίνονται τα α, β, γ και t_A με $\gamma > \beta$.



<u>Λύση</u>: Τα δυο κύματα είναι αρμονικά και άρα οι ταχύτητές τους είναι ίσες με

$$v_1 = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$v_2 = \frac{\omega_2}{k_2} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Σε χρόνο t_A το κάθε κύμα θα έχει διανύσει απόσταση $v_1 t_A$ και $v_2 t_A$ αντίστοιχα και επομένως η απόσταση μεταξύ τους θα είναι ίση με τη διαφορά

$$\Delta x = (v_2 - v_1)t_A = (\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha})t_A$$

12.12 Ένα αρμονικό κύμα περιγράφεται από την εξίσωση

$$y = Acos\left[\frac{\pi}{\kappa}\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{t}{\beta}\right)\right]$$

όπου τα $A = 2\ m$, $\alpha = 4.2\ m$, $\beta = 5.25\ s$ και $\kappa = 3$. Πόση είναι η απόσταση Δx μεταξύ ενός μηδενικού του κύματος (εκεί όπου $y = 0$) και του αμέσως επόμενου μηδενικού;

<u>Λύση</u>:

Πρέπει να γράψουμε τη δοθείσα έκφραση στην γνωστή μορφή

$$y = Acos(kx - \omega t)$$

(η χρήση του συνημιτόνου αντί του ημιτόνου που χρησιμοποιείται στο βιβλίο δεν αλλάζει την ουσία του προβλήματος). Η παραπάνω γράφεται και ως

$$y = Acos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$$

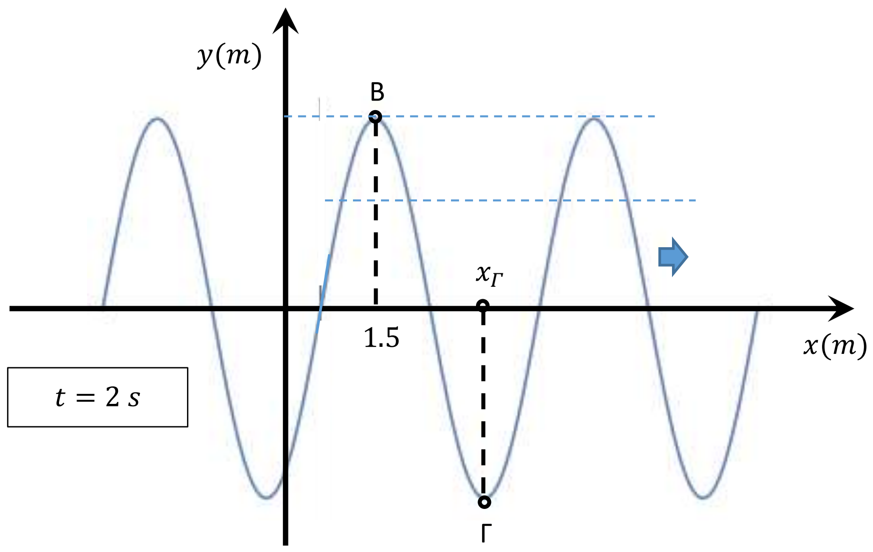
όπου λ και T είναι το μήκος κύματος και η περίοδος αντίστοιχα. Με μια μικρή μετατροπή, η δοθείσα έκφραση γράφεται ως

$$y = Acos\left[2\pi\left(\frac{x}{2\kappa\alpha} - \frac{t}{2\kappa\beta}\right)\right]$$

Άρα από την αντιστοιχία έχουμε $\lambda = 2\kappa\alpha$. Σε ένα αρμονικό κύμα όμως, η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών μηδενικών είναι ίση με μισό μήκος κύματος και έτσι η ζητούμενη απόσταση είναι η

$$\Delta x = \kappa\alpha = 3 \times 4.2 = 12.6\ m$$

12.13 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το στιγμιότυπο $t = 2\ s$ ενός αρμονικού κύματος που κινείται προς τα δεξιά και το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση $y = Asin(kx - \omega t)$ όπου τα x και A είναι σε m, το t σε sec, $k = 12\ rad/m$ και $\omega = 4.2\ rad/s$. Τα σημεία Β και Γ είναι σταθερά σημεία του χώρου στα οποία τυγχάνει στο συγκεκριμένο στιγμιότυπο το κύμα να έχει μέγιστο και ελάχιστο (το αμέσως επόμενο) όπως φαίνεται στο σχήμα. Εάν η συντεταγμένη του Β είναι $x_B = 1.5\ m$ τότε να βρεθεί η φάση στο σημείο Γ ένα δευτερόλεπτο μετά από το συγκεκριμένο στιγμιότυπο.



<u>Λύση</u>:

Από τον κυματάρυθμο $k = 12.9\ rad/m$ μπορούμε να βρούμε το μήκος κύματος λ

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{12} = 0.523\ m$$

Από το μέγιστο έως το ελάχιστο η απόσταση x αλλάζει κατά μισό μήκος κύματος και έτσι:

$$x_\Gamma = x_B + \frac{\lambda}{2} = 1.5 + 0.523\ = 2.523\ m$$

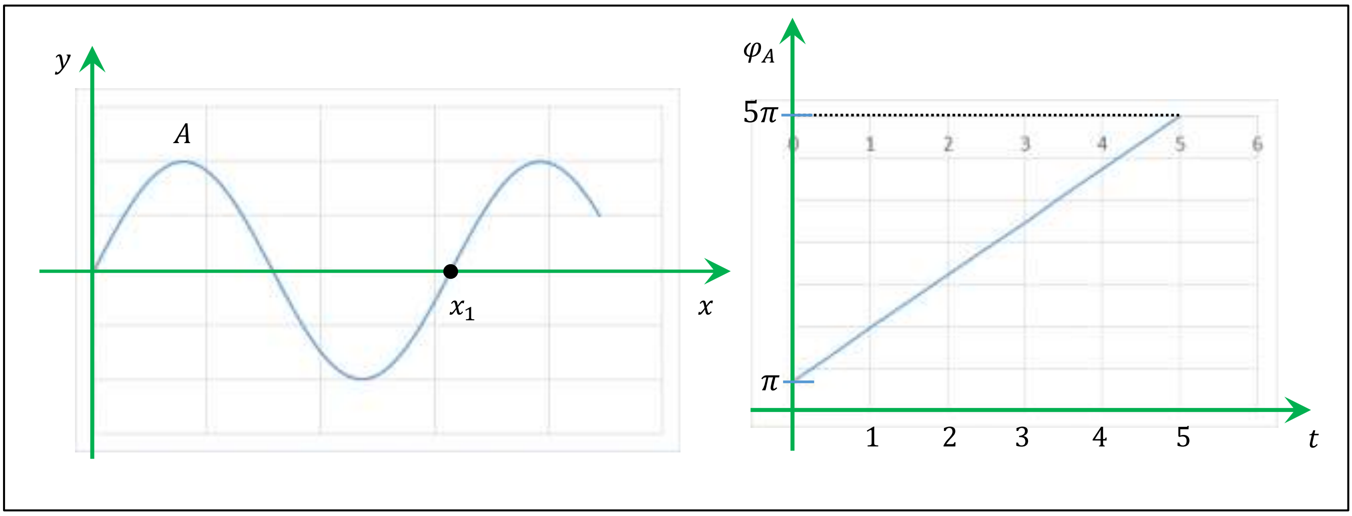
Σε ένα δευτερόλεπτο μετά το δεδομένο στιγμιότυπο, ο χρόνος θα είναι ίσος με

$$t = 2 + 1 = 3\ s$$

και η φάση στο σημείο Γ θα ισούται με

$$\varphi_\Gamma = kx_\Gamma - \omega t = 12 \times 2.523 - 4.2 \times 3 = 17.7\ rad$$

12.14 Στο παρακάτω σχήμα στα αριστερά φαίνεται το στιγμιότυπο $t\ = 0$ ενός αρμονικού κύματος Α το οποίο διαδίδεται σε μια χορδή όπου y είναι η κατακόρυφη απομάκρυνση των μορίων της κάθε χορδής από τη θέση ισορροπίας της και $+x$ είναι η διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Στο ίδιο σχήμα φαίνεται το δεύτερο μηδενικό της γραφικής παράστασης (μετά την αρχή) στην θέση $x = x_1$. Στο δεύτερο σχήμα στα δεξιά φαίνεται η γραφική παράσταση της φάσης φ_A του Α συναρτήσει του χρόνου t στην ίδια θέση x_1. Ένας φοιτητής παύει το κύμα Α και διεγείρει στη θέση του ένα δεύτερο επίσης αρμονικό κύμα Β και παρατηρεί ένα παρόμοιο στιγμιότυπο $t'\ = 0$ (όπου τώρα t' ο νέος χρόνος) όπως αυτό στο σχήμα στα αριστερά, στο οποίο η νέα γραφική παράσταση περνάει και αυτή από την αρχή $(0{,}0)$ με θετική κλίση (όπως το Α) αλλά το δεύτερο μηδενικό της εμφανίζεται σε μια νέα θέση $x_2\ = 1.2x_1$. Εάν ο μαθητής στέκεται σε αυτή τη νέα θέση, πόσες ταλαντώσεις του κύματος Β θα μετρήσει σε χρόνο μισού λεπτού;



Απάντηση: 10 ταλαντώσεις

Λύση:

Η θέση $x = x_1$ αντιστοιχεί σε ένα μήκος κύματος του Α δηλαδή

$$\lambda_A = x_1$$

και ο κυματάριθμός του είναι ίσος με

$$k_A = \frac{2\pi}{\lambda_A} = \frac{2\pi}{x_1}$$

Η εξίσωση του κύματος Α είναι γενικά η εξής

$$y = y_A sin(k_A x - \omega_A t + \varphi_0)$$

με φάση $\varphi_A = k_A x - \omega_A t + \varphi_0$ και είναι όντως μια γραμμική συνάρτηση του t όπως η δεδομένη γραφική παράσταση στα δεξιά με κλίση ω_A, την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα από τα δυο ακραία σημεία της $(0, \pi)$ και $(5{,}5\pi)$:

$$\omega_A = \frac{5\pi - \pi}{5 - 0} = \frac{4\pi}{5}\ rad/s$$

Παρόμοια με το κύμα Α, έτσι και στο Β η απόσταση x_2 είναι ίση με ένα μήκος κύματος $\lambda_B = x_2$ και ο αντίστοιχος κυματάρυθμος είναι ο

$$k_B = \frac{2\pi}{x_2}$$

το οποίο από τη δεδομένη σχέση $x_2 = 1.2x_1$ γίνεται

$$k_B = \frac{2\pi}{1.2x_1} = \frac{k_A}{1.2}$$

Εφόσον το μέσο διάδοσης είναι το ίδιο, τότε και τα Α και Β έχουν την ίδια ταχύτητα. Από την βασική κυματική σχέση $v = \omega/k$ έχουμε

$$\frac{\omega_B}{k_B} = \frac{\omega_A}{k_A}$$

ή

$$\omega_B = \omega_A \frac{k_B}{k_A} = \frac{\omega_A}{1.2} = \frac{4\pi}{1.2 \times 5} = \frac{2\pi}{3}\ rad/s$$

Η συχνότητα του δεύτερου κύματος είναι ίση με

$$f_B = \frac{\omega_B}{2\pi} = \frac{1}{3}\ Hz$$

Σε χρόνο μισού λεπτού $\Delta t = 30\ s$ το κύμα Β εκτελεί n ταλαντώσεις με συχνότητα

$$\frac{n}{\Delta t} = \frac{1}{3} => n = 10$$

Ενέργεια Κύματος – Ισχύς Κύματος

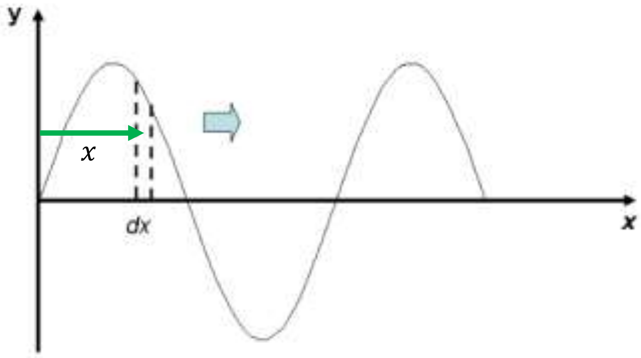
12.15 Ένα κύμα με εξίσωση $y = Asin(kx - \omega t)$ διαδίδεται επάνω σε χορδή με γραμμική πυκνότητα μάζας μ. Ν βρεθεί πόση ενέργεια σε $Joules$ μεταφέρει αυτό το κύμα σε χρόνο $\Delta t = 0.1\ s$. Δίνονται τα $\mu = 10^{-4}\ kg/m$, $A = 0.1\ m$, $k = 0.2\ m^{-1}$ και $\omega = 2\ rad/s$:

Λύση: Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, θεωρούμε ένα στοιχειώδες τμήμα της χορδής με πλάτος dx, μάζα $dm = \mu dx$ και συντεταγμένη x. Εάν θεωρήσουμε το x ως σταθερό και το t ως μεταβλητή, τότε η εξίσωση $y = Asin(kx - \omega t)$ περιγράφει ταλαντωτή με κυκλική συχνότητα ω, πλάτος A και κάποια αρχική φάση που εξαρτάται από το x. Η ενέργεια ενός αρμονικού ταλαντωτή συναρτήσει του πλάτους του είναι ίση με

$$dE = \frac{1}{2} dm\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\mu dx \omega^2 A^2$$

Η ταχύτητα του κύματος μπορεί να γραφτεί και ως $v = dx/dt$ και έτσι:

$$dE = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2 dt$$



Παίρνοντας προσεγγιστικά $dt \approx \Delta t$ και χρησιμοποιώντας την κυματική σχέση $\omega = vk$ οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$$\Delta E = \frac{1}{2k}\mu\omega^3 A^2 \Delta t = \frac{0.05}{k}\mu A^2\omega^3 = \frac{0.05}{0.2}10^{-4}(0.1)^2 2^3 = 2\times 10^{-6}\,J$$

12.16 Στο Πρόβλημα 12.12 να υπολογισθεί η ισχύς του κύματος εάν η γραμμική πυκνότητα της χορδής είναι ίση με $\mu = 2\ kg/m$ και το μέγιστο της ταλάντωσης των μορίων της χορδής είναι 40 cm.

<u>Λύση</u>: Από την Εξ. 12.15 έχουμε για την ισχύ του κύματος

$$p = \frac{1}{2}\mu v A^2\omega^2$$

Από τα δεδομένα, το μέγιστο της ταλάντωσης των μορίων της χορδής είναι στην ουσία το πλάτος του κύματος

$$A = 40\ cm = 0.4\ m$$

Στο Πρόβλημα 12.12 από την εκφώνηση έχουμε $= 12\,rad/m$ και $\omega = 4.2\,rad/s$ και επομένως η ταχύτητα του κύματος είναι ίση με

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{4.2}{12} = 0.35\ m/s$$

Έτσι η ισχύς ισούται με

$$p = \frac{1}{2}\mu v A^2\omega^2 = \frac{1}{2}2\times 0.35\times 0.4^2\times 4.2^2 = 0.98\ W$$

Στάσιμα Κύματα

12.17 Χορδή που βρίσκεται τανυσμένη επάνω στον άξονα x, είναι περιορισμένη μεταξύ δυο σημείων με συντεταγμένες $x_A = 1.5\,m$ και $x_B = 4.2\,m$. Αφού η χορδή διεγείρεται, παρατηρείται ότι σχηματίζεται κάποια ανώτερη αρμονική $n = 3$. Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών δεσμών.

<u>Λύση</u>:

Το μήκος της χορδής είναι ίσο με

$$L = x_B - x_A$$

Η απόσταση μεταξύ δυο δεσμών είναι ίση με μισό μήκος κύματος. Στην αρμονική n, το μήκος κύματος ισούται με

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} = 2\frac{x_B - x_A}{n}$$

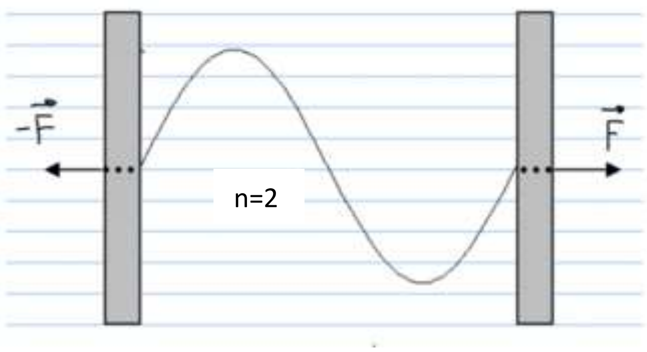
Επομένως η ζητούμενη απόσταση είναι ίση με

$$\Delta x = \frac{\lambda_n}{2} = \frac{x_B - x_A}{n}$$

Αντικαθιστώντας:

$$\Delta x = \frac{4.2 - 1.5}{3} = 0.9\,m$$

12.18 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η 2η αρμονική ενός κύματος επάνω σε χορδή με γραμμική πυκνότητα μάζας $\mu = 10^{-4}\,kg/m$. Σε μια ανώτερη αρμονική n, η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών δεσμών ισούται με $\Delta x = 0.4\,m$ και η χορδή είναι τανυσμένη με δύναμη $F = 4\,N$. Να βρεθεί η συχνότητα αυτής της αρμονικής (της n) σε Hz.



Λύση: Σε ένα κύμα, η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών ελαχίστων είναι ίση με μισό μήκος κύματος και επομένως

$$\lambda_n = 2\Delta x = 0.8\ m$$

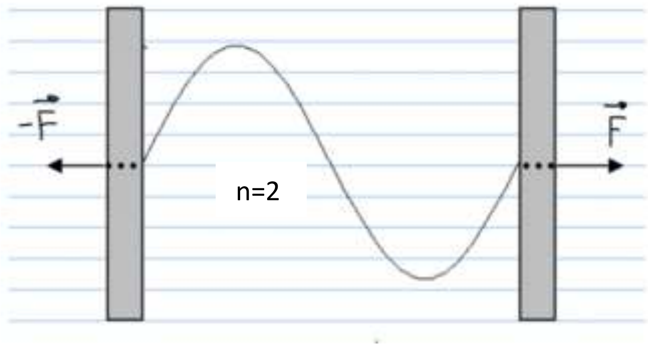
Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος σε χορδή ισούται με

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{4}{10^{-4}}} = 200\ m/s$$

Από την κυματική σχέση $v = f_n \lambda_n$ μπορούμε να λύσουμε ως προς τη συχνότητα

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{200}{0.8} = 250\ Hz$$

12.19 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η $2^{η}$ αρμονική ενός κύματος που διαδίδεται επάνω σε χορδή με γραμμική πυκνότητα μάζας $\mu = 2 \times 10^{-4}\ kg/m$ και μήκος $L = 0.8\ m$. Σε μια ανώτερη αρμονική n, ο λόγος του μήκους κύματός της δια το μήκος κύματος της $2^{ης}$ αρμονικής είναι $\kappa = 0.4$. Η χορδή είναι τανυσμένη με δύναμη $F = 18\ N$. Ν βρεθεί η συχνότητα αυτής της αρμονικής (της n) σε Hz. Ποια είναι η συγκεκριμένη αρμονική;



Λύση:

Από το παραπάνω σχήμα έχουμε $\lambda_2 = L = 0.8\ m$. Από το δεδομένο λόγο:

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_2} = \kappa => \lambda_n = \kappa L = 0.4 \times 0.8 = 0.32\ m$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος σε χορδή ισούται με

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{18}{2 \times 10^{-4}}} = 300\ m/s$$

Από την κυματική σχέση $v = f_n \lambda_n$ μπορούμε να λύσουμε ως προς τη συχνότητα

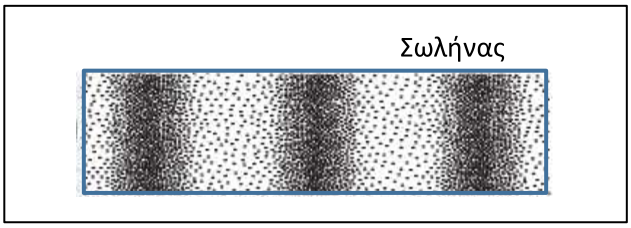
$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{300}{0.32} = 937.5\ Hz$$

Αφού το μήκος κύματος είναι αντιστρόφως ανάλογο με τον αριθμό αρμονικής n, τότε από το δεδομένο λόγο:

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_2} = \kappa => \frac{2}{n} = \kappa => n = \frac{2}{\kappa} = \frac{2}{0.4} = 5$$

Επομένως πρόκειται για την 5η αρμονική.

12.20 Στο παραπάνω σχήμα εικονίζεται το στιγμιότυπο ενός στάσιμου ηχητικού κύματος που σχηματίζεται μέσα σε ένα κλειστό σωλήνα μήκους $L = 3\ m$ με αέριο στο εσωτερικό του. Οι σκούρες περιοχές αντιστοιχούν σε μέγιστα του κύματος (εκεί όπου ο όρος $sinkx$ του στάσιμου κύματος παίρνει την τιμή 1). Εάν $150\ Hz$ είναι η συχνότητα της θεμελιώδους (βασικής) αρμονικής, βρείτε την ταχύτητα του ήχου σε m/s μέσα στον σωλήνα.



Λύση:

Το στάσιμο κύμα έχει 5 κοιλίες (τρεις που αντιστοιχούν σε $sinkx = 1$ και δυο ενδιάμεσα που αντιστοιχούν σε $sinkx = -1$). Έτσι πρόκειται για την $n = 5$ αρμονική. Η συχνότητά της είναι ίση με

$$f_5 = 5f_1 = 750\ Hz$$

Στην αρμονική n, το μήκος κύματος ισούται με

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Επομένως

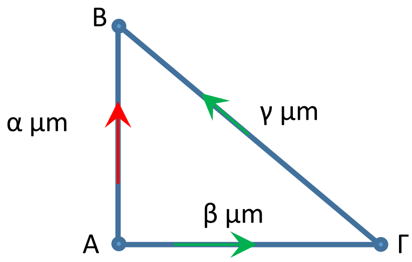
$$\lambda_5 = \frac{2 \times 3}{5} = \frac{6}{5}$$

Η ταχύτητα των κυμάτων είναι ίση με:

$$v = \lambda_5 f_5 = \frac{6}{5} 750 = 900\ m/s$$

Συμβολή κυμάτων

12.21 Στο παρακάτω σχήμα φως μήκους κύματος λ παράγεται από ένα laser και ακολούθως χωρίζεται στο σημείο Α σε δυο δέσμες. Η μια δέσμη ακολουθεί τη διαδρομή ΑΒ ενώ η άλλη δέσμη ακολουθεί τη μεγαλύτερη διαδρομή ΑΓΒ. Να υπολογισθεί η διαφορά φάσης σε ακτίνια των δυο δεσμών στο σημείο Β. Δίνονται τα μήκη $\alpha = 1.2\ \mu m$, και $\beta = 2\ \mu m$ και $\lambda = 0.6\ \mu m$:



<u>Λύση</u>:

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{1.2^2 + 2^2} = 2.33\ \mu m$$

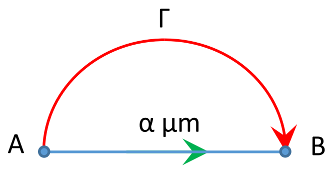
Η διαφορά μήκους μεταξύ των δυο διαδρομών είναι ίση με

$$\Delta x = \gamma - \alpha = 2.33 - 1.20 = 1.13\ \mu m$$

Επομένως η διαφορά φάσης μεταξύ των δυο δεσμών ισούται με:

$$\varphi = k\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \frac{2\pi}{0.6}1.13\ = 11.8\, rad$$

12.22 Στο παρακάτω σχήμα φως μήκους κύματος $\lambda = 0.8\ \mu m$ παράγεται από ένα laser και ακολούθως χωρίζεται στο σημείο Α σε δυο δέσμες. Η μια δέσμη ακολουθεί τη διαδρομή ΑΒ ενώ η άλλη δέσμη ακολουθεί τη μεγαλύτερη διαδρομή ΑΓΒ. Να υπολογισθεί η διαφορά φάσης σε ακτίνια των δυο δεσμών στο σημείο Β εάν $\alpha = 0.5\ \mu m$.



Λύση:

Δουλεύουμε όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα. Η διαδρομή ΑΒ έχει μήκος $\alpha = 0.5\ \mu m$ που είναι ίσο με τη διάμετρο $2R$ του κύκλου. Το μήκος x_{AB} του ημικυκλίου ΑΓΒ είναι ίσο με το μισό της περιφέρειας

$$x_{AB} = \frac{1}{2} 2\pi R = \pi R = \frac{\pi\alpha}{2}$$

Η διαφορά μήκους μεταξύ των δυο διαδρομών είναι ίση με

$$\Delta x = x_{AB} - \alpha = \frac{\pi\alpha}{2} - \alpha = \alpha\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 0.5\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 0.285\ \mu m$$

Επομένως η διαφορά φάσης μεταξύ των δυο δεσμών ισούται με:

$$\varphi = k\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \frac{2\pi}{0.8} 0.285 \ = 2.24\, rad$$

12.23 Δυο κύματα $y_1 = y_0 sin(kx - \omega t)$ και $y_2 = y_0 sin(k\tilde{x} - \omega t)$ που διαδίδονται στη μια διάσταση προέρχονται από δυο σύμφωνες πηγές αλλά διανύουν δυο διαφορετικούς δρόμους με μήκη x και $\tilde{x} = x + \Delta x$ αντίστοιχα. Πόση πρέπει να είναι η διαφορά Δx ώστε το προκύπτον από την συμβολή κύμα να έχει πλάτος $y_0/3$; Η κυκλική συχνότητα των κυμάτων είναι $\omega = 50\ rad/s$ και η ταχύτητά τους $300\ m/s$.

Λύση:

Η επαλληλία των δυο κυμάτων είναι ίση με

$$y = y_1 + y_2 = y_0[sin(kx - \omega t) + sin(k\tilde{x} - \omega t)\,]$$

Από την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$sinA + sinB = 2sin\frac{A+B}{2}cos\frac{A-B}{2}$$

έχουμε

$$y = 2y_0 sin(kx + k\Delta x/2 \ - \omega t)cos(k\Delta x/2)$$

Παρατηρούμε ότι η επαλληλία των δυο κυμάτων είναι επίσης κύμα αφού περιέχει τον κλασσικό κυματικό όρο $kx - \omega t$. Το πλάτος αυτού του κύματος είναι ίσο με

$$\tilde{y}_0 = 2y_0 cos(k\Delta x/2)$$

και σύμφωνα με την εκφώνηση ισούται με $y_0/3$ επομένως

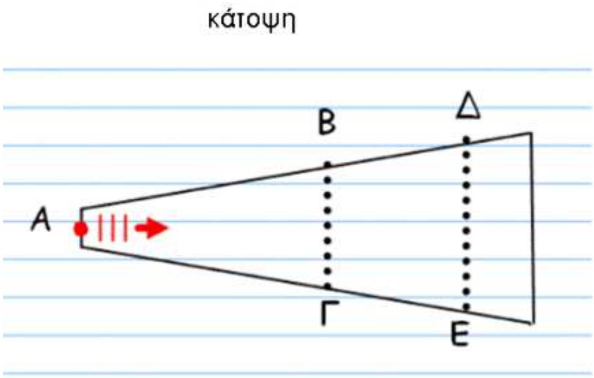
$$2y_0 cos\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) = \frac{y_0}{3} => \ cos\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) = \frac{2}{3} => \frac{k\Delta x}{2} = 0.841$$

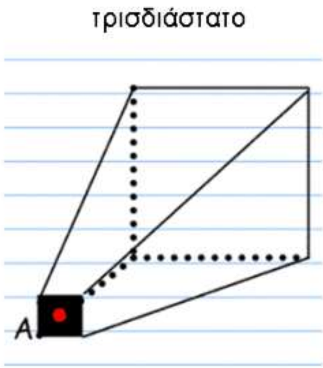
Από την κυματική σχέση $v = \omega/k$ έχουμε

$$\frac{\omega\Delta x}{2v} = 0.841 => \Delta x = \frac{1.682v}{\omega} = \frac{1.682 \times 300}{50} = 10.1\ m$$

13. ΗΧΟΣ

13.1 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η κάτοψη (αριστερά) μιας χοάνης ενός μεγαφώνου το οποίο έχει τετραγωνική διατομή (και οι τέσσερις πλευρές του είναι ίσες με την παραπάνω κάτοψη). Η πηγή στο Α εκπέμπει με σταθερή ισχύ $80\ W$ χωρίς απώλειες μέσα στη χοάνη. Να βρεθεί η ένταση του ήχου $I_{\Delta E}$ σε μονάδες S.I. επάνω στο διατομή που έχει πλευρά το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ εάν αυτό έχει μήκος $x_{\Delta E} = 2\ cm$. Πόση ενέργεια διαπερνάει αυτή τη διατομή σε χρόνο $5\ s$;





Λύση:

Εφόσον δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας μέσα στην χοάνη, τότε η ίδια ισχύς P που εκπέμπεται στο σημείο Α, φτάνει και στη διατομή με πλευρά ΔΕ. Αφού αυτή η διατομή είναι τετραγωνική με πλευρά μήκους $x_{\Delta E} = 2 \times 10^{-2}\ m$, τότε το εμβαδό της $A_{\Delta E}$ ισούται με:

$$A_{\Delta E} = {x_{\Delta E}}^2 = 4 \times 10^{-4}\ m^2$$

Από την Εξ. 13.9, έχουμε για τον ορισμό της έντασης του ήχου

$$I_{\Delta E} = \frac{P}{A_{\Delta E}} = \frac{80}{4 \times 10^{-4}} = 2 \times 10^5\ W/m^2$$

Η ισχύς είναι εξ' ορισμού η ενέργεια ανά μονάδα χρόνου και επομένως σε χρόνο $t = 5\ s$ διαπερνάει την διατομή με πλευρά ΔΕ (όπως και οποιαδήποτε άλλη διατομή αφού δεν υπάρχουν απώλειες) ενέργεια E ίση με

$$E = Pt = 80 \times 5 = 400\ Joules$$

13.2 Στο προηγούμενο πρόβλημα να βρεθεί το μήκος της πλευράς ΒΓ εάν η ένταση του ήχου επάνω στην διατομή που περιέχει αυτή τη πλευρά, ισούται με $32 \times 10^5\ W/m^2$ ενώ η αντίστοιχη ένταση επάνω στην διατομή με πλευρά ΔΕ είναι ίση με $8 \times 10^5\ W/m^2$. Το μήκος της πλευράς ΔΕ είναι ίσο με $x_{\Delta E} = 2 \times 10^{-2}\ m$.

Λύση:

Από τον ορισμό της έντασης του ήχου έχουμε:

$$I_{ΒΓ} = \frac{P}{A_{ΒΓ}} => P = I_{ΒΓ}A_{ΒΓ}$$

Εφόσον δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας μέσα στην χοάνη, τότε η ίδια ισχύς P που εκπέμπεται στο σημείο Α, φτάνει και στη διατομή με πλευρά ΒΓ αλλά και σε αυτή με πλευρά ΔΕ. Επομένως

$$I_{ΔΕ} = \frac{P}{A_{ΔΕ}} => P = I_{ΔΕ}A_{ΔΕ}$$

Εξισώνοντας την ισχύ στις δυο διατομές οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$$I_{ΒΓ}A_{ΒΓ} = I_{ΔΕ}A_{ΔΕ}$$

Όπως είδαμε, το εμβαδό $A_{ΔΕ}$ ισούται με:

$$A_{ΔΕ} = {x_{ΔΕ}}^2 = 4 \times 10^{-4}\ m^2$$

και ομοίως $A_{ΒΓ} = {x_{ΒΓ}}^2$ όπου $x_{ΒΓ}$ είναι το μήκος της πλευράς ΒΓ. Επομένως

$$I_{ΒΓ}{x_{ΒΓ}}^2 = I_{ΔΕ}{x_{ΔΕ}}^2 => x_{ΒΓ} = x_{ΔΕ}\sqrt{\frac{I_{ΔΕ}}{I_{ΒΓ}}} = 2 \times 10^{-2}\sqrt{\frac{8 \times 10^5}{32 \times 10^5}} = 1 \times 10^{-2} = 1\ cm$$

13.3 Σε δυο διαφορετικά σημεία Α και Β του χώρου, οι εντάσεις του ήχου είναι αντίστοιχα I_A και $I_B = \kappa I_A$. Να βρεθεί το επίπεδο έντασης σε dB στο σημείο Β εάν το επίπεδο της έντασης στο Α είναι ίσο με 25 dB και $\kappa = 100$:

Λύση:

Η διαφορά του επιπέδου της έντασης μεταξύ των δυο σημείων ισούται με:

$$\beta_B - \beta_A = 10\ log\left(\frac{I_B}{I_0}\right) - 10\ log\left(\frac{I_A}{I_0}\right) = 10\ log\left(\frac{I_B}{I_A}\right) = 10\ log\,\kappa$$

Επομένως

$$\beta_B = \beta_A + 10\ log\,\kappa = 25 + 10log100 = 45\ dB$$

13.4 Το επίπεδο έντασης που ακούει ένας φοιτητής σε κάποιο σημείο του χώρου σε dB είναι β_A. Εάν διαιρέσει την απόστασή του από την πηγή κατά ένα παράγοντα κ, τότε να βρεθεί το νέο επίπεδο έντασης β_B . Δίνονται τα $\beta_A = 6\ dB$ και $\kappa = 4$:

Λύση:

Από τα δεδομένα $r_B = r_A/\kappa$ όπου r_A είναι η απόσταση του αρχικού σημείου A από την πηγή και r_B είναι η απόσταση του αρχικού σημείου B από την πηγή. Υποθέτοντας σφαιρική κατανομή του ήχου, ομοιογενής προς όλες τις κατευθύνσεις, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 13.11 και να έχουμε

$$\frac{I_B}{I_A} = \frac{{r_A}^2}{{r_B}^2} = \kappa^2$$

Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, η διαφορά του επιπέδου της έντασης του ήχου στα δυο σημεία ισούται με:

$$\beta_B - \beta_A = 10\, log\left(\frac{I_A\kappa^2}{I_0}\right) - 10\, log\left(\frac{I_A}{I_0}\right) = 10\, log(\kappa^2) = 20\, log\, \kappa$$

Επομένως

$$\beta_B = \beta_A + 20\, log\, \kappa = 6 + 20 log 4 = 18\, dB$$

13.5 Σημειακή ηχητική πηγή εκπέμπει ενέργεια $E = 300\, J$ μέσα σε 2 λεπτά. Να βρεθεί το επίπεδο έντασης σε dB σε ένα σημείο που απέχει απόσταση $x = 20\, m$ από την πηγή.

Λύση:

Η ισχύς του παραγόμενου κύματος είναι ίση με

$$P = \frac{E}{t} = \frac{300}{2 \times 60} = 2.5\, W$$

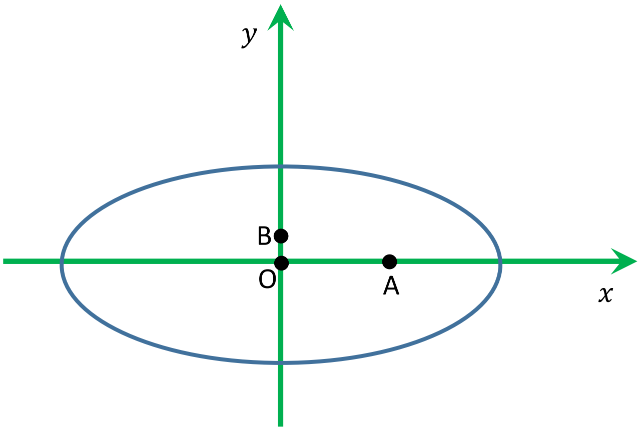
Σε απόσταση x η ένταση δίνεται από τον τύπο

$$I = \frac{P}{4\pi x^2} = 0.00049736\, W/m^2$$

Το επίπεδο έντασης δίνεται από τον τύπο

$$\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10 \log_{10}\left(\frac{0.00049736}{10^{-12}}\right) = 87\, dB$$

13.6 Η έλλειψη στο παρακάτω σχήμα περιγράφεται από τον μαθηματικό τύπο $x^2/12 + y^2/3 = 1$. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στο κέντρο Ο της έλλειψης (αρχή των αξόνων) και λαμβάνει ένα ηχητικό σήμα λόγω μιας σημειακής πηγής A που βρίσκεται στο μέσο του οριζόντιου θετικού ημιάξονα. Αφού παύσει η A, μια δεύτερη πηγή B ίσης ισχύος με την A τίθεται σε λειτουργία η οποία βρίσκεται στο ένα τέταρτο (1/4) του κατακόρυφου θετικού ημιάξονα. Να βρεθεί πόσα επιπλέον dB θα λάβει ο παρατηρητής στο Ο σε σχέση με πριν που λειτουργούσε μόνο η πηγή A. Χρήσιμη προσέγγιση: $5\log_{10}16 \approx 6$.



<u>Λύση</u>: Έστω ότι η ισχύς της πηγής Α είναι ίση με P. Ο ορισμός της έντασης I είναι ισχύς ανά επιφάνεια. Θεωρώντας σφαιρικά μέτωπα κύματος με ακτίνα r, τότε η ένταση επάνω σε αυτά ισούται με

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

όπου $4\pi r^2$ είναι το εμβαδό της σφαίρας. Έστω r_A η απόσταση ΟΑ. Σύμφωνα με την εξίσωση της έλλειψης, ο οριζόντιος ημιάξονάς της έχει μήκος $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ και αφού το Α βρίσκεται στο μέσο του, τότε $r_A = \sqrt{3}$ και άρα η ένταση που λαμβάνει ο παρατηρητής στο Ο είναι ίση με

$$I_A = \frac{P}{12\pi}$$

Το αντίστοιχο επίπεδο έντασης σε dB είναι ίσο με

$$\beta_A = 10\log_{10}\left(\frac{I_A}{I_0}\right)$$

όπου I_0 η ένταση του ορίου ακοής. Όσον αφορά τον κατακόρυφο ημιάξονα, αυτός έχει μήκος $\sqrt{3}$ και άρα η απόσταση ΟΒ είναι ίση με $r_B = \sqrt{3}/4$. Η αντίστοιχη ένταση στο Ο είναι ίση με

$$I_B = \frac{4^2 P}{12\pi} = 16 I_A$$

ενώ το επίπεδο έντασης σε dB είναι ίσο με

$$\beta_B = 10\log_{10}\left(\frac{I_B}{I_0}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{16 I_A}{I_0}\right) = 10\log_{10}(16) + 10\log_{10}\left(\frac{I_A}{I_0}\right)$$

Ο δεύτερος όρος είναι το β_A και έτσι η ζητούμενη διαφορά είναι η

$$\beta_B - \beta_A = 10\log_{10}(16)$$

Με τη βοήθεια της δεδομένης προσέγγισης, το παραπάνω απλοποιείται σε

$$\beta_B - \beta_A = 2 \times 6 = 12 \ \ dB$$

13.7 Ένα ηχείο εκπέμπει ήχο με ισχύ $P_1 = 120\ W$ αλλά αργότερα αυτή η ισχύ αυξάνει σε $P_2 = 180\ W$. Ποια είναι η διαφορά σε dB των αντίστοιχων εντάσεων (τελική – αρχική) σε κάποια σταθερή απόσταση από το ηχείο;

<u>Λύση</u>:

Από τον ορισμό του επιπέδου έντασης

$$\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Παίρνοντας διαφορές

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log_{10}\left(\frac{I_2}{I_0}\right) - 10 \log_{10}\left(\frac{I_1}{I_0}\right)$$

Από τις ιδιότητες των λογαρίθμων

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log_{10}\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$$

Από την εξάρτηση της έντασης με την απόσταση έχουμε

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

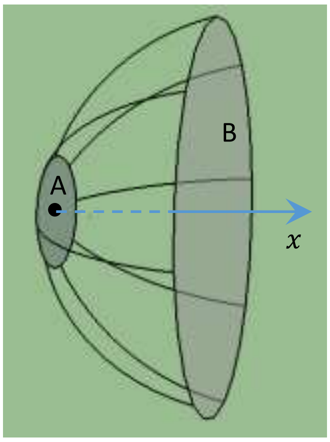
οπότε

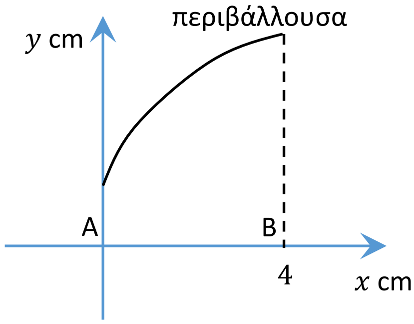
$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log_{10}\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

Αντικαθιστώντας

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log_{10}\left(\frac{180}{120}\right) = 1.76\ dB$$

13.8 Το αντηχείο ενός μεγαφώνου ενός περιπολικού της αστυνομίας το οποίο κινείται με $50\ km/h$ κυνηγώντας ένα ποδήλατο που οδηγεί ένας κλέφτης με ταχύτητα $35\ km/h$, έχει το παρακάτω σχήμα "γαβάθας" με κυκλική διατομή και περιβάλλουσα που δίνεται από την σχέση $y = a + \sqrt{bx}$ όπου $a = 2\ cm$ και $b = 4\ cm$ και τα x και y είναι σε cm. Στο σημείο A υπάρχει πηγή ήχου που εκπέμπει με σταθερή ισχύ και συχνότητα $2.2\ kHz$. Μέσα στο μεγάφωνο δεν υπάρχουν απώλειες. Εάν η ένταση του ήχου στο σημείο A είναι ίση με $100\ W/cm^2$, να βρεθεί η αντίστοιχη ένταση στη βάση B όπου $x = 4\ cm$. Επίσης να βρεθεί η συχνότητα του παραγόμενου ήχου που ακούει ο κλέφτης εάν η καταδίωξη γίνεται μια κρύα ημέρα του χειμώνα με θερμοκρασία $8\ \mathrm{C}^0$.





<u>Λύση</u>:

<u>Λύση</u>: Στα σημεία A και B η ακτίνα της γαβάθας ισούται με

$$r_A = y(0) = a = 2\ cm$$

$$r_B = y(4) = a + \sqrt{4 \times 4} = 2 + 4 = 6\ cm$$

Εφόσον δεν υπάρχουν απώλειες, η ισχύς στα δυο σημεία είναι σταθερή

$$P_A = P_B$$

Η ισχύς όμως ισούται με *Ένταση x Επιφάνεια* και έτσι

$$I_A \pi {r_A}^2 = I_B \pi {r_B}^2 => I_B = I_A \frac{{r_A}^2}{{r_B}^2} = 100 \frac{2^2}{6^2} = \frac{100}{9}\ W/cm^2$$

Ταχύτητα του ήχου

$$V = 331 \sqrt{\frac{\theta + 273}{273}} = 331 \sqrt{\frac{8 + 273}{273}} = 335.8\ m/s$$

Φαινόμενο Doppler, ταχύτητα πηγής και παρατηρητή

$$v_S = 50 \frac{km}{h} = \frac{50}{3.6} = 13.9 \frac{m}{s}$$

$$v_O = -35 \frac{km}{h} = -\frac{35}{3.6} = -9.7 \frac{m}{s}$$

(+ πλησιάζει) και (- απομακρύνεται)

$$f = \frac{V + v_0}{V - v_S} f_S = \frac{333.5 - 9.7}{333.5 - 13.9} 2.2 = \ 2.23\ \text{kHz}$$

$$P_1 = P_2 => IA = I'A' => x'^2 = \frac{I}{I'}x^2 => (\Delta E) = \sqrt{\frac{I_{B\Gamma}}{I_{\Delta E}}}\,(B\Gamma)$$

13.9 Δυο υπάλληλοι του ΟΣΕ διαθέτουν συσκευές μέτρησης της συχνότητας του ήχου και έχουν εντολή να μετρήσουν την συχνότητα της σειρήνας ενός τραίνου καθώς αυτό τους πλησιάζει, με το τραίνο να διατηρεί σταθερή ταχύτητα επάνω σε μια διαδρομή. Ο ένας υπάλληλος μετράει μέσα σε μια παγωμένη σήραγγα με $0^0\ C$ και βρίσκει συχνότητα f_Π ενώ ο άλλος υπάλληλος μετράει σε μια ηλιόλουστη τοποθεσία την τιμή $f_Z = \kappa f_\Pi$, όπου ο κ είναι ένας καθαρός αριθμός. Εάν δίνεται ο λόγος $\lambda = T_Z/T_\Pi$ όπου T_Z και T_Π οι θερμοκρασίες σε βαθμούς Κέλβιν στην ηλιόλουστη τοποθεσία και στη σήραγγα αντίστοιχα, να βρεθεί η ταχύτητα του τραίνου.

Λύση:

Αφού για την ταχύτητα του ήχου ισχύει η πρακτική σχέση

$$v = 331\sqrt{T/273}$$

τότε στην παγωμένη σήραγγα όπου $\theta_\Pi = 0^0 C$ και άρα $T_\Pi = 273\ K$, η ταχύτητα του ήχου θα είναι ίση με $v_\Pi = 331\ m/s$. Από την ίδια σχέση παίρνοντας λόγους,

$$\frac{v_Z}{v_\Pi} = \sqrt{\frac{T_Z}{T_\Pi}} = \sqrt{\lambda}$$

δηλαδή

$$v_Z = \sqrt{\lambda} v_\Pi = 331\sqrt{\lambda}$$

Σύμφωνα με το φαινόμενο Doppler, ισχύει για τις δυο συχνότητες:

$$f_Z = \frac{v_Z + v_O}{v_Z - v_S} f_S = \frac{v_Z}{v_Z - v_S} f_S$$

και

$$f_\Pi = \frac{v_\Pi + v_O}{v_\Pi - v_S} f_S = \frac{v_\Pi}{v_\Pi - v_S} f_S$$

όπου λάβαμε $v_O = 0$ αφού και οι δυο παρατηρητές είναι ακίνητοι, v_S είναι η ταχύτητα του τραίνου ενώ f_S είναι η συχνότητα της σειρήνας του τραίνου όπως την ακούει ο οδηγός του τραίνου. Παίρνοντας λόγους:

$$\frac{f_Z}{f_\Pi} = \frac{v_Z}{v_\Pi}\frac{v_\Pi - v_S}{v_Z - v_S}$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$\kappa = \sqrt{\lambda}\frac{331\sqrt{\lambda} - v_S}{331 - v_S}$$

Λύνοντας

$$v_S = 331\frac{\lambda - \kappa}{\sqrt{\lambda} - \kappa}$$

13.10 Ένα αγαπημένο παιχνίδι ενός φοιτητή είναι να προκαλεί αντίλαλο παράγοντας με τη φωνή του δυνατούς ήχους οι οποίοι ανακλώνται σε ένα κτίριο απέναντί του. Ο φοιτητής στήνει ένα πείραμα το οποίο καταγράφει τη διαφορά χρόνου από τη στιγμή που παράγεται ένας σύντομος ήχος μέχρι και τη στιγμή που επιστρέφει αυτός ο ήχος πίσω. Παρατηρεί ότι σε μια παγωμένη ημέρα με θερμοκρασία $\theta_0 = 20^0$ οι ήχοι επιστρέφουν σε χρόνο Δt_0 ενώ σε μια άλλη ζεστή ημέρα επιστρέφουν σε χρόνο $\Delta t = t_0/\kappa$ όπου $\kappa = 1.2$. Θεωρώντας ότι ο ήχος ταξιδεύει μόνο οριζόντια, να βρεθεί η θερμοκρασία της ζεστής ημέρας σε βαθμούς Κέλβιν.

Λύση:

Για την ταχύτητα του ήχου ισχύει η πρακτική σχέση

$$v = 331\sqrt{T/273}$$

και

$$v_0 = 331\sqrt{T_0/273}$$

όπου T και T_0 η υψηλή και η χαμηλή θερμοκρασία σε βαθμούς Κέλβιν αντίστοιχα. Παίρνοντας λόγους και υψώνοντας στο τετράγωνο:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{v^2}{v_0^2}$$

Η ταχύτητα όμως για μια δεδομένη απόσταση είναι αντιστρόφως ανάλογη του χρόνου. Κάνοντας χρήση και της μετατροπής της θερμοκρασίας της κρύας ημέρας από Κελσίου σε Κέλβιν οδηγεί στο

$$\frac{T}{\theta_0 + 273} = \left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2 = \kappa^2$$

Επομένως

$$T = (\theta_0 + 273)\kappa^2 = (20 + 273)1.2^2 = 422\ K$$