ΦΥΣΙΚΗ Ι

ΜΗΧΑΝΙΚΗ – ΚΥΜΑΤΙΚΗ

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ – Π. ΠΕΤΡΙΔΗΣ

Περιεχόμενα

1. ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΗ – ΥΛΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την απλούστερη περίπτωση κίνησης που είναι η ευθύγραμμη κίνηση ενός υλικού σημείου, ενός κινητού δηλαδή που δεν έχει διαστάσεις. Σε επόμενα κεφάλαια θα μελετήσουμε πιο πολύπλοκες κινήσεις όπως π.χ. κίνηση υλικού σημείου σε δυο και τρεις διαστάσεις και περιστροφή στερεού σώματος γύρω από σταθερό άξονα. Η πιο σύνθετη κίνηση από όλες, αυτή του στερεού στις τρεις διαστάσεις, θα μελετηθεί σε ένα από τα τελευταία κεφάλαια της Μηχανικής. Μπορεί εκ πρώτης όψεως το υλικό σημείο να μοιάζει σαν μια υπεραπλούστευση αλλά είναι πραγματικά μια πολύ καλή προσέγγιση σε πολλές περιπτώσεις όπως: (α) Ένα σώμα που κινείται σε ένα μεγάλο χώρο, π.χ. ένα πλοίο που εκτελεί ένα δρομολόγιο από Πειραιά στα Δωδεκάνησα. Στο χάρτη το πλοίο φαίνεται ως μια μικρή κουκίδα και μπορούμε κάλλιστα να μελετήσουμε την ρότα του πλοίου με μια τέτοια θεώρηση. (β) Όταν ένα στερεό εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση (χωρίς περιστροφές) τότε όλα τα σημεία του έχουν την ίδια ταχύτητα και επιτάχυνση. Επομένως η μελέτη ενός οποιοδήποτε σημείου του σώματος αρκεί για να περιγράψουμε και την κίνηση των υπόλοιπων σημείων. (γ) Τέλος ακόμα και μια σύνθετη κίνηση ενός στερεού σώματος, μπορούμε να την ξεχωρίσουμε σε καθαρά μεταφορική ενός ειδικού του σημείου, γνωστού ως το "κέντρο μάζας" συν μια περιστροφή γύρω από αυτό. Επομένως στα τρία παραπάνω παραδείγματα που καλύπτουν ένα πολύ μεγάλο αριθμό πραγματικών περιπτώσεων, πάντα υπάρχει η ανάγκη για την μελέτη της κίνησης ενός σημείου.

Ορισμός της στιγμιαίας ταχύτητας

Όλοι μας γνωρίζουμε ότι στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, η ταχύτητα ενός υλικού σημείου δίνεται από την σχέση

$$v = \frac{x}{t}$$		(1.1)

όπου x είναι η απόσταση του σημείου από την αρχή των συντεταγμένων (γνωστή ως "απομάκρυνση") και t ο χρόνος. Από εδώ και στο εξής θα ονομάζουμε το κινητό σημείο απλά ως "το κινητό" και θα χρησιμοποιούμε για μονάδες του x και του t τα μέτρα m και δευτερόλεπτα s αντίστοιχα εκτός και εάν αναφερθεί κάτι άλλο όπως π.χ. cm ή ms (microseconds). Η παραπάνω σχέση γράφεται και ως $x = vt$ από την οποία φαίνεται αμέσως ότι στο $t = 0$ το κινητό βρίσκεται στο $x = 0$. Εάν το κινητό ξεκινάει την χρονική στιγμή $t = t_0$ από μια αρχική θέση η οποία βρίσκεται σε απόσταση x_0 από την αρχή των συντεταγμένων, τότε η παραπάνω σχέση γενικεύεται στην

$$v = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$	ΟΜΑΛΗ ΚΙΝΗΣΗ	(1.2)

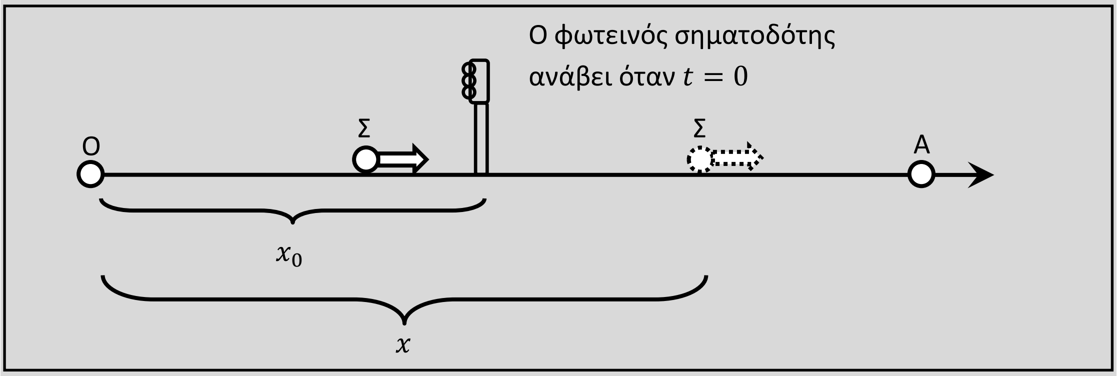
Η ποσότητα Δx είναι γνωστή ως "μετατόπιση" (από την αρχική θέση x_0).

Παράδειγμα 1.1

Στο παρακάτω σχήμα, το όχημα Σ περιμένει να ανάψει ένας φωτεινός σηματοδότης ο οποίος βρίσκεται σε απόσταση $150\ m$ από το σημείο Ο το οποίο θεωρείται η αρχή του συστήματος των συντεταγμένων. Το ρολόι του οχήματος είναι συγχρονισμένο με το σηματοδότη και δείχνει μηδέν όταν αυτός γίνει πράσινος αλλά ο ο οδηγός περνάει τον σηματοδότη την χρονική στιγμή $5\ s$. Έστω ότι πριν από τον σηματοδότη ο οδηγός επιταχύνει για να τον περάσει αλλά αφού τον περάσει, κινείται με σταθερή ταχύτητα. Να βρεθεί η ταχύτητα του οχήματος Σ στη θέση $x = 250\ m$ εάν το ρολόι του οχήματος εκεί δείχνει $15\ s$.

Λύση: Γνωρίζουμε τις τιμές της απόστασης και του χρόνου όταν ο οδηγός φτάσει στον σηματοδότη. Επομένως οι αρχικές συνθήκες είναι $x_0 = 150\ m$ και $t_0 = 5\ s$. Το όχημα φτάνει στο σημείο Α όπου $x = 250\ m$ στο $t = 15\ s$ και άρα η ταχύτητα του οχήματος ισούται με:

$$v = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{250 - 150}{15 - 5} = 10\ m/s$$



Η Εξίσωση 1.2 ισχύει μόνο για ευθύγραμμη ομαλή κίνηση (σταθερή ταχύτητα) ή όταν θέλουμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή της ταχύτητας. Π.χ. ένα αυτοκίνητο μεταβαίνει από την Πάτρα στην Αθήνα και ενδιάμεσα κάνει δυο πεντάλεπτες στάσεις, επιταχύνει αρκετές φορές για να προσπεράσει φορτηγά, και επιβραδύνει όταν πυκνώνει η κίνηση ή όταν ο δρόμος έχει έργα. Σε καμιά περίπτωση η κίνηση του δεν είναι ομαλή. Πλην όμως, εάν έχει διανύσει συνολικά $200\ km$ μέσα σε 2 ώρες, μπορούμε να πούμε ότι κατά μέσο όρο το αυτοκίνητο κινήθηκε με ταχύτητα[1]

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{200}{2} = 100\ km/h$$

[1] Οι φυσικοί επέλεξαν να ορίσουν την ταχύτητα ως $\Delta x/\Delta t$ και όχι ως $\Delta t/\Delta x$ επειδή το μέγεθος "ταχύτητα" πρέπει να είναι μεγάλο όταν αυξάνει η απόσταση. Αντιθέτως οι γεωλόγοι οι οποίοι μελετάνε αργές διαδικασίες όπως π.χ. κινήσεις τευτονικών πλακών, ορίζουν τη λεγόμενη "βραδύτητα" ως $\Delta t/\Delta x$ η οποία παίρνει μεγάλες τιμές όταν ο αντίστοιχος χρόνος Δt στον αριθμητή γίνει μεγάλος.

(η γραμμή πάνω από το v συμβολίζει τη μέση τιμή). Ποια είναι όμως η φυσική σημασία της μέσης ταχύτητας; Είναι η ταχύτητα που θα είχε ένα δεύτερο ιδεατό όχημα το οποίο θα κινούταν με ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και το οποίο εάν ξεκινούσε μαζί με το όχημα το οποίο εκτελεί την παραπάνω τυχαία κίνηση, τότε θα έφτανε στον ίδιο προορισμό την ίδια ακριβώς χρονική στιγμή. Π.χ. στο παραπάνω ταξίδι Πάτρας – Αθήνας, φανταστείτε μια αμαξοστοιχία ταχείας η οποία κάνει την διαδρομή αυτή χωρίς ενδιάμεση στάση και κινείται με σταθερή ταχύτητα. Εάν η αμαξοστοιχία αυτή ξεκινήσει το ταξίδι της ταυτόχρονα με το αυτοκίνητο και κινείται με ταχύτητα $100\ km/h$, τότε σε κάποια σημεία της διαδρομής που το αυτοκίνητο επιταχύνει, το αυτοκίνητο θα αφήνει πίσω της την αμαξοστοιχία ενώ όταν κάνει τις πεντάλεπτες στάσεις, η αμαξοστοιχία θα το ξεπερνάει. Τελικά όμως και τα δυο οχήματα θα φτάσουν στην Αθήνα την ίδια ακριβώς χρονική στιγμή.

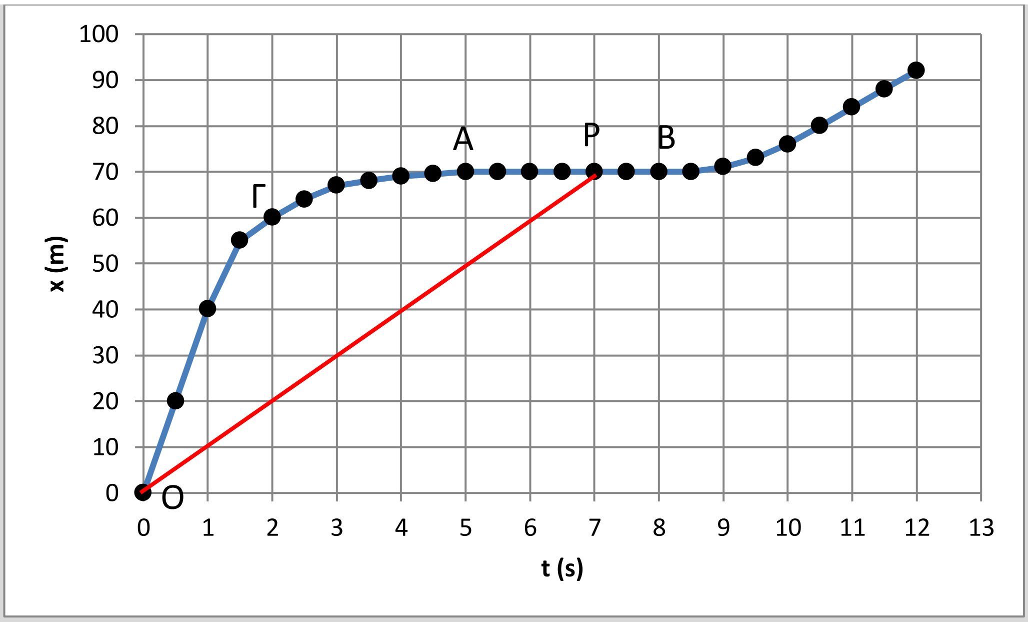
Πως όμως μπορούμε να υπολογίσουμε την στιγμιαία ταχύτητα του αυτοκινήτου σε κάθε ενδιάμεσο σημείο της διαδρομής; Π.χ. όταν αυτό βρίσκεται σε πεντάλεπτη στάση, πρέπει αναγκαστικά να έχουμε $v = 0$. Μπορούμε και πάλι να χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση 1.2 αλλά τώρα το Δt πρέπει να είναι απειροστά μικρό, δηλαδή

$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$	ΣΤΙΓΜΙΑΙΑ ΤΑΧΥΤΗΤΑ	(1.3)

Σε αυτόν τον ορισμό τα t_0 και x_0 της Εξ. 1.2 δεν έχουν πια την σημασία των αρχικών τιμών αλλά τιμών πολύ κοντά και πριν από τα t και x που είναι ο τρέχων χρόνος και η τρέχουσα απομάκρυνση αντίστοιχα του κινητού.

<u>Παράδειγμα 1.2</u>

Ένας φοιτητής μέτρησε τα δεδομένα $x - t$ της παρακάτω γραφικής παράστασης (τα σημεία που συμβολίζονται με συμπαγείς κύκλους) που απεικονίζουν την απομάκρυνση x ενός αυτοκινήτου (από κάποια αρχή) συναρτήσει του χρόνου t. Από την αρχική κλίση φαίνεται ότι ο οδηγός ξεκίνησε με μεγάλη ταχύτητα στο $t = 0$ αλλά μετά ελάττωσε ταχύτητα και σταδιακά σταμάτησε στο $x = 70\ m$ για περίπου 3.5 δευτερόλεπτα (τμήμα APB) και ακολούθως συνέχισε και πάλι την πορεία του αυξάνοντας αργά την ταχύτητά του για να προσαρμοσθεί στις ανάγκες της κυκλοφορίας.



Για την ταχύτητα στο σημείο P θα πάρουμε λάθος αποτέλεσμα εάν διαλέξουμε $t_0 = 0$ και $x_0 = 0$ του σημείου O αφού η Εξ. (2) δίνει

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{70 - 0}{7 - 0} = 10\ m/s$$

και όχι μηδέν όπως θα αναμέναμε (αυτή η τιμή είναι στην ουσία η κλίση του ευθύγραμμου τμήματος OP). Εάν αντί για το O$(0\ , 0)$ ως αρχικό σημείο, επιλέγαμε το σημείο Γ$(2\ , 60)$ τότε θα είχαμε

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{70 - 60}{7 - 2} = 2\ m/s$$

το οποίο είναι και πάλι λάθος αποτέλεσμα αλλά βέβαια πλησιέστερα στο πραγματικό. Αντιθέτως το A$(5, 70)$ είναι μια καλή επιλογή γιατί παίρνουμε το σωστό αποτέλεσμα

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{70 - 70}{7 - 5} = 0\ m/s$$

Επομένως όσο πιο κοντά επιλέγουμε τα δυο σημεία, τόσο καλύτερη προσεγγίζουμε την τιμή της ταχύτητας. Θεωρητικά τα δυο σημεία πρέπει να είναι απειροστά κοντά, δηλαδή $\Delta t \to 0$.

Στο παραπάνω παράδειγμα είχαμε ως δεδομένα κάποια σημεία (x, t) τα οποία ήταν τοποθετημένα επάνω στη γραφική παράσταση $x - t$. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτά τα σημεία βρίσκονται επάνω σε μια συνεχή καμπύλη. Γιατί συνεχής; Επειδή ένα κινητό δεν μπορεί ξαφνικά να εξαφανιστεί και να εμφανιστεί σε κάποιο άλλο σημείο του χώρου και άρα μια γραφική παράσταση $x - t$ δεν παρουσιάζει ποτέ ασυνεχή άλματα. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το x είναι μια μαθηματική συνάρτηση του χρόνου και θα το γράφουμε συχνά ως $x(t)$ για να τονίζουμε αυτό το γεγονός. Με αυτή τη θεώρηση, η Εξ. 1.3 γίνεται

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = x'(t)$$	ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ-ΤΑΧΥΤΗΤΑ	(1.4)

που συμπίπτει με τον ορισμό της παραγώγου στα Μαθηματικά (ο τόνος στα επόμενα θα συμβολίζει την πράξη της παραγώγισης). Επομένως ισχύει το εξής:

Στιγμιαία ταχύτητα = Παράγωγος της απομάκρυνσης ως προς το χρόνο

Βέβαια ισχύει και το αντίστροφο. Από τα Μαθηματικά γνωρίζουμε ότι η αντίστροφη σχέση της Εξ. 1.4 είναι η

$$x(t) = \int v(t)dt$$	ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ-ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ	(1.5)

Απομάκρυνση = Ολοκλήρωση της Στιγμιαίας ταχύτητας ως προς το χρόνο

Το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι αόριστο οπότε πρέπει όταν το χρησιμοποιούμε να συμπεριλαμβάνουμε και σταθερές ολοκλήρωσης, δείτε τα παραδείγματα παρακάτω. Οι Εξισώσεις 1.4 και 1.5 χρησιμοποιούνται κατά δυο τρόπους. Εάν γνωρίζουμε την συνάρτηση της απομάκρυνσης $x(t)$ μπορούμε να την παραγωγίσουμε άμεσα και να υπολογίσουμε την στιγμιαία ταχύτητα η οποία εν γένει θα είναι και αυτή μια συνάρτηση του χρόνου $v(t)$ (και βέβαια και αντίστροφα από την $v(t)$ μπορούμε με ολοκλήρωση να βρούμε το $x(t)$). Ο άλλος τρόπος είναι να μας δοθούν δεδομένα $x - t$ όπως στην παραπάνω γραφική παράσταση και να επιλέξουμε όσο το δυνατό μικρότερο Δt για να υπολογίσουμε την ταχύτητα ως $\Delta x/\Delta t$. Πρακτικά παίρνουμε το Δt όσο μικρότερο μας επιτρέπει η μέτρηση, π.χ. εάν χρησιμοποιούμε χρονόμετρο με ακρίβεια $0.01\ s$ τότε αναγκαστικά $\Delta t = 0.01\ s$.

<u>Παράδειγμα 1.3</u>

Χρησιμοποιώντας την Εξ. 1.4, να βρεθεί η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού κατά τη χρονική στιγμή $t = 1\ s$ εάν η απομάκρυνσή του δίνεται από την έκφραση (α) $x(t) = at^4 - bt^2$ και (β) $x(t) = aln(t/b)$ όπου a και b κατάλληλες σταθερές ώστε τα x και t να είναι σε m και s αντίστοιχα.

Περίπτωση (α). Από την Εξ. 1.4 παίρνουμε με παραγώγιση $v(t) = x'(t) = a(b/t)(1/b)$ δηλαδή $v(t) = a/t$. Κατά τη χρονική στιγμή $t = 1\ s$ έχουμε $v(1) = a$.

<u>Παράδειγμα 1.4</u>

Ένας φοιτητής κατέγραψε τα εξής δεδομένα για την κίνηση ενός κινητού. Να βρεθεί η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού κατά την χρονική στιγμή $t = 2.6$ s

$t(s)$	$x(m)$
2.0	9.49
2.1	9.13

2.2	8.70
2.3	7.50
2.4	7.23
2.5	6.20
2.6	5.42
2.7	4.91
2.8	3.99
2.9	2.64
3.0	1.83
3.1	1.21
3.2	−0.22

Λύση: Στο παρόν παράδειγμα δεν μας δίνεται μια συνάρτηση $x(t)$ και επομένως δεν μπορούμε να παραγωγίσουμε αλλά αντ' αυτού έχουμε μια σειρά από διακριτές τιμές. Κρίνοντας από το βήμα του χρόνου στα παραπάνω δεδομένα, το ρολόι του φοιτητή μετρούσε κάθε $0.1\, s$ και έτσι το μικρότερο $\Delta t \to 0$ που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι προσεγγιστικά το $0.1\, s$. Έτσι διαλέγουμε τις τιμές $t = 2.6\, s$ και $x = 5.42\, m$ από την αντίστοιχη γραμμή του πίνακα και τις τιμές $t_0 = 2.5\, s$, $x = 6.20\, m$ από την προηγούμενη γραμμή και χρησιμοποιούμε προσεγγιστικά την Εξ. 1.2 αντί της Εξ. 1.4 για να υπολογίσουμε την στιγμιαία ταχύτητα ως εξής:

$$v \approx \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{5.42 - 6.20}{2.6 - 2.5} = -\,7.8\, m/s$$

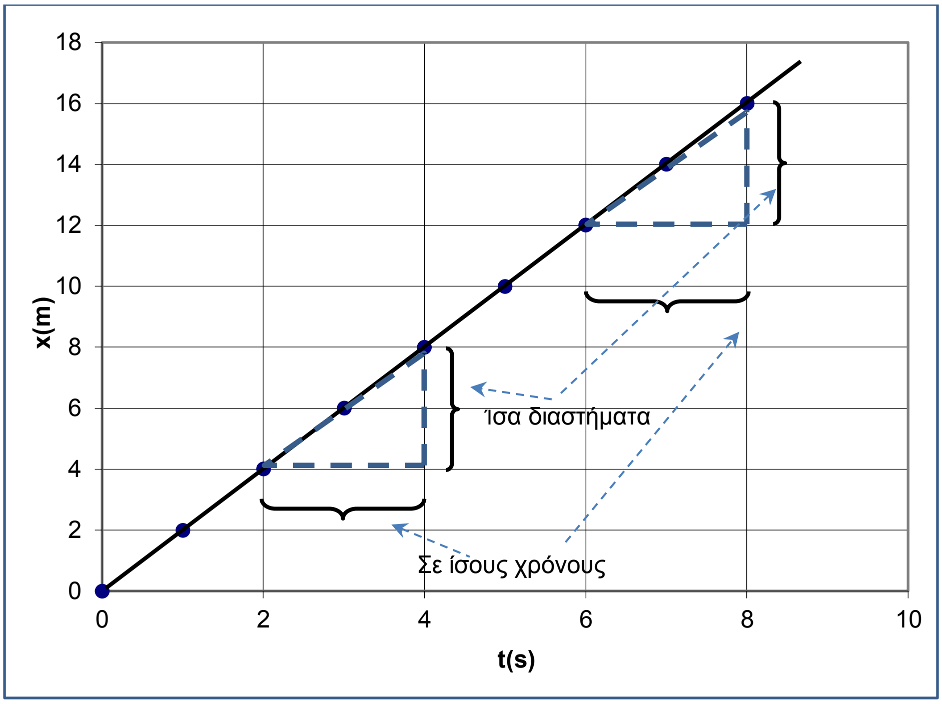
Προσέξτε το τεράστιο σφάλμα που θα έκανε κάποιος εάν χρησιμοποιούσε κατά λάθος την Εξ. 1 αντί της Εξ. 2.

Γραφική ερμηνεία της ταχύτητας

Θα δούμε σε αυτό το εδάφιο ότι:

Σε μια γραφική παράσταση του x συναρτήσει του t, η στιγμιαία ταχύτητα v σε κάποιο σημείο της ισούται με την κλίση της γραφικής παράστασης στο σημείο αυτό.

Έστω ότι ένα αυτοκίνητο βρίσκεται την χρονική στιγμή $t = 0$ s στο σημείο $x = 0$ m και κινείται με ευθύγραμμη ομαλή κίνηση δηλαδή με σταθερή ταχύτητα. Αυτό σημαίνει ότι σε ίσα χρονικά διαστήματα, διανύει ίσες αποστάσεις, επομένως το διάγραμμα $x - t$ πρέπει να είναι μια ευθεία γραμμή όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1:

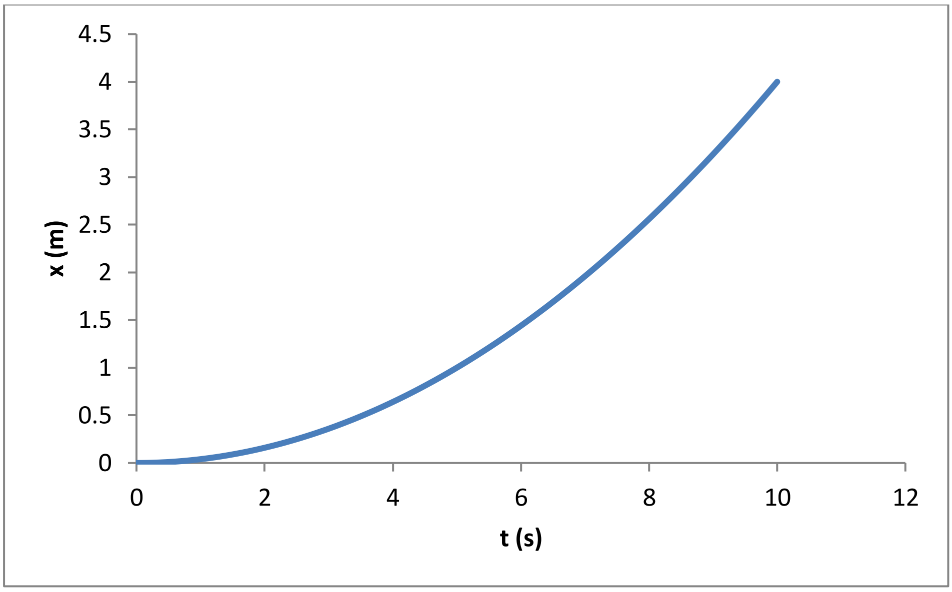


Σχήμα 1.1: Γραφική παράσταση x-t για ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

Όπως είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο, στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα υ χρησιμοποιώντας την σχέση $\upsilon = \Delta x/\Delta t = (x - x_0)/(t - t_0)$ με αρχικές συνθήκες $t_0 = 0$ και $x_0 = 0$ αφού το κινητό ξεκινάει από την αρχή των αξόνων. Έτσι π.χ. στο $t = 4$ s όπου $x = 8$ m, έχουμε

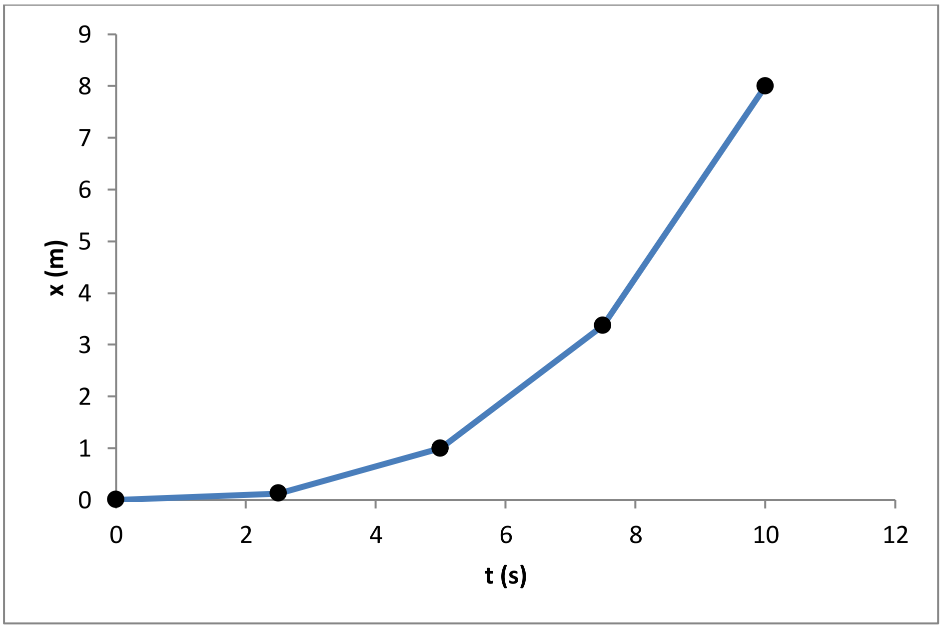
$$\upsilon = \Delta x/\Delta t = 8/4 = 2\ m/s$$

Αυτή είναι και η κλίση της ευθείας του γραφήματος. Άρα αποδείξαμε τον αρχικό ισχυρισμό, ότι στη γραφική παράσταση $x - t$, η ταχύτητα ισούται με την κλίση. Τι γίνεται όμως στην περίπτωση όπου το κινητό αυξομειώνει την ταχύτητά του; Θεωρήστε για παράδειγμα τη παρακάτω γραφική παράσταση $x - t$ στο Σχήμα 2.1 ενός κινητού που προφανώς δεν κινείται με ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.



Σχήμα 1.2: Γραφική παράσταση x-t για τυχαία ευθύγραμμη κίνηση

Φανταστείτε τώρα ότι επιλέγουμε μόνο ορισμένα σημεία από την παραπάνω καμπύλη και τα απεικονίζουμε ως συμπαγείς κύκλους σε μια νέα γραφική παράσταση στο παρακάτω Σχήμα 1.3 και ότι ενώνουμε τα σημεία μεταξύ τους διαδοχικά με ευθύγραμμα τμήματα.

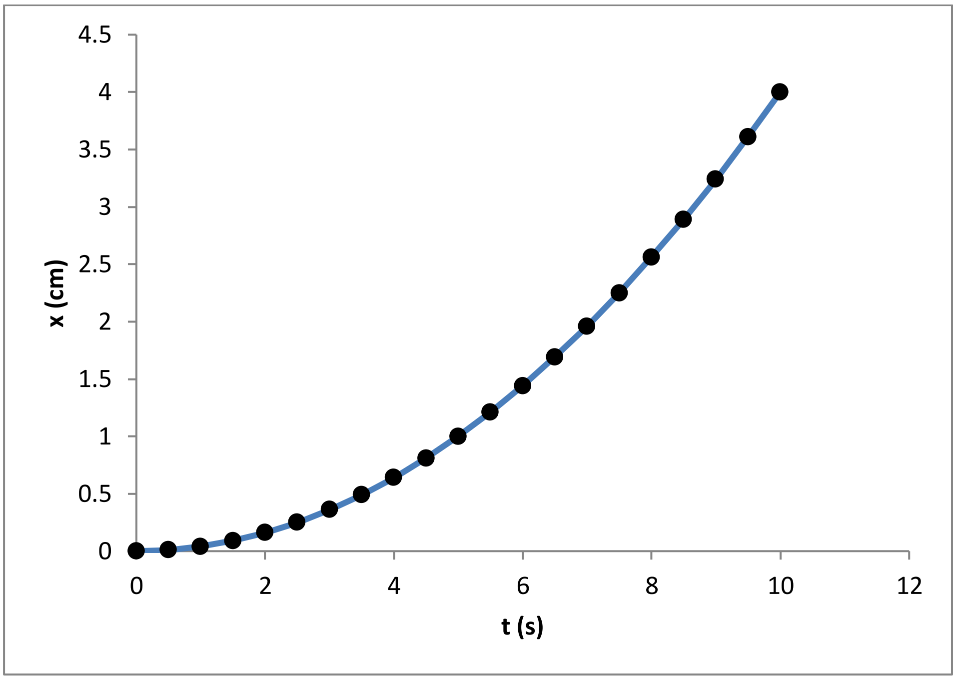


Σχήμα 1.3: Επιλογή λίγων σημείων από την γραφική παράσταση του Σχήματος 1.2

Τα ευθύγραμμα τμήματα είναι μια πρώτη προσέγγιση της καμπύλης, όχι βέβαια και τόσο καλή. Η κλίση ενός ευθύγραμμου τμήματος που έχει ως πέρας το σημείο (x, t) ισούται με

$$\frac{x - x_0}{t - t_0}$$

όπου (x_0, t_0) είναι το προηγούμενο σημείο. Εάν πυκνώσουμε τα σημεία της καμπύλης, όπως στην παρακάτω γραφική παράσταση του Σχήματος 1.4, δυο πράγματα συμβαίνουν:



Σχήμα 1.4: Επιλογή περισσότερων σημείων από την γραφική παράσταση του Σχήματος 1.2

Παρατηρούμε ότι πρώτον τα ευθύγραμμα τμήματα φαίνονται σαν να είναι η ίδια η καμπύλη, επομένως τώρα η προσέγγιση της καμπύλης ως σύνολο ευθύγραμμων τμημάτων είναι πολύ καλύτερη. Κατά δεύτερο, η προηγούμενη έκφραση της κλίσης $(x - x_0)/(t - t_0)$ προσεγγίζει την

$$\lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

η οποία όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, είναι ίση με την στιγμιαία ταχύτητα του κινητού. Εάν συνεχίσουμε την κατάτμηση της καμπύλης σε ένα άπειρο αριθμό σημείων, τότε η παραπάνω προσέγγιση γίνεται ίση με το όριο. Επομένως αποδείχθηκε ο ισχυρισμός μας ότι η κλίση είναι ίση με την ταχύτητα.

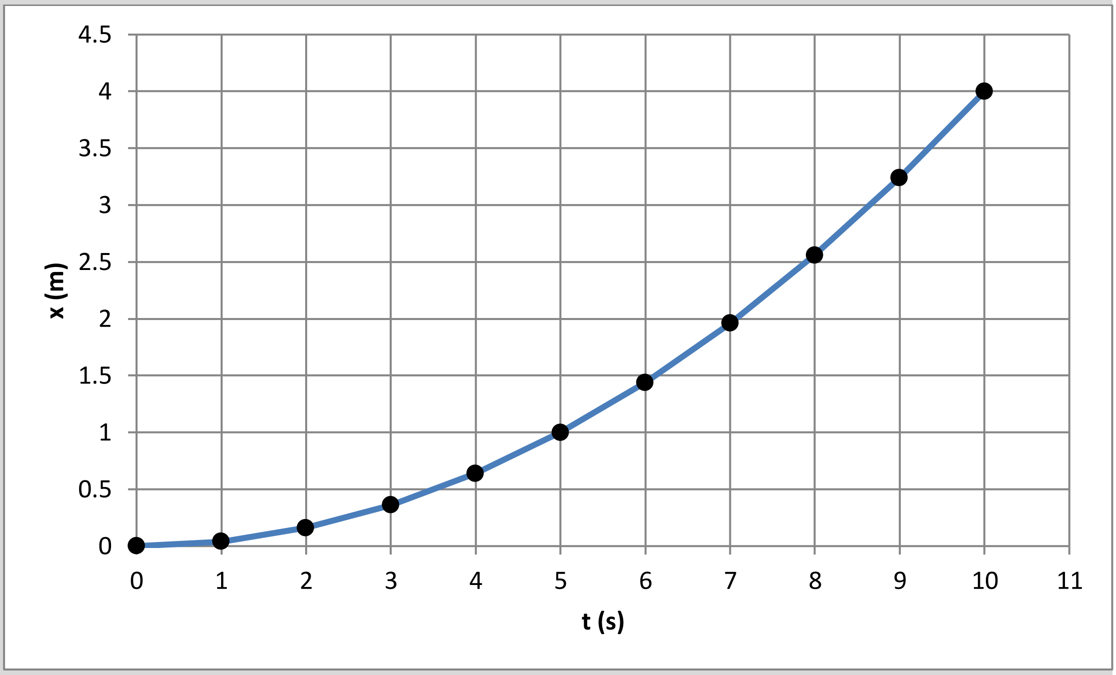
Παράδειγμα 1.5

Στη παρακάτω γραφική παράσταση, τα κυκλικά σημεία αναπαριστάνουν τις μετρήσεις $x - t$ που πήρε ένας φοιτητής για ένα κινητό. Εάν υποθέσουμε ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε μια καμπύλη $x(t)$, να βρεθούν (α) προσεγγιστικά η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού στο $t = 7\ s$, εκτιμώντας τις συντεταγμένες του ευθύγραμμου τμήματος μεταξύ $t = 6$ και $t = 7\ s$, και (β) η ακριβής στιγμιαία ταχύτητα στο $t = 7$ s εάν γνωρίζουμε ότι το $x(t)$ είναι ανάλογο του τετραγώνου του t.

Λύση:

(α) Από την γραφική παράσταση μπορούμε να πούμε προσεγγιστικά ότι στο $t = 7\ s$ έχουμε $x = 2\ m$ ενώ στο προηγούμενο σημείο $t_0 = 6\ s$ έχουμε $x_0 = 1.4\ m$. Επομένως

$$v \approx \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{2 - 1.4}{7 - 6} = 0.6\, m/s$$



(β) Αφού η καμπύλη περνάει από το $(0{,}0)$ τότε είναι της μορφής $x(t) = \alpha t^2$ με α: σταθερά. Από ένα εύκολο σημείο όπως το $(10{,}4)$, μπορούμε να δούμε άμεσα ότι η σταθερά είναι ίση με $\alpha = 1/25\, ms^{-2}$ (προσέξτε ότι η σταθερά πρέπει να έχει κατάλληλες μονάδες ώστε να είναι το x σε m). Από την $v(t) = x'(t)$ παίρνουμε $v = 2\alpha t$ και έτσι στο $t = 7\, s$ έχουμε

$$v = 2 \times \frac{1}{25} 7 = 0.56\, m/s$$

Βλέπουμε ότι οι δυο τρόποι υπολογισμού της ταχύτητας οδηγούν σε κοντινά αποτελέσματα.

Η Έννοια Του Διαφορικού

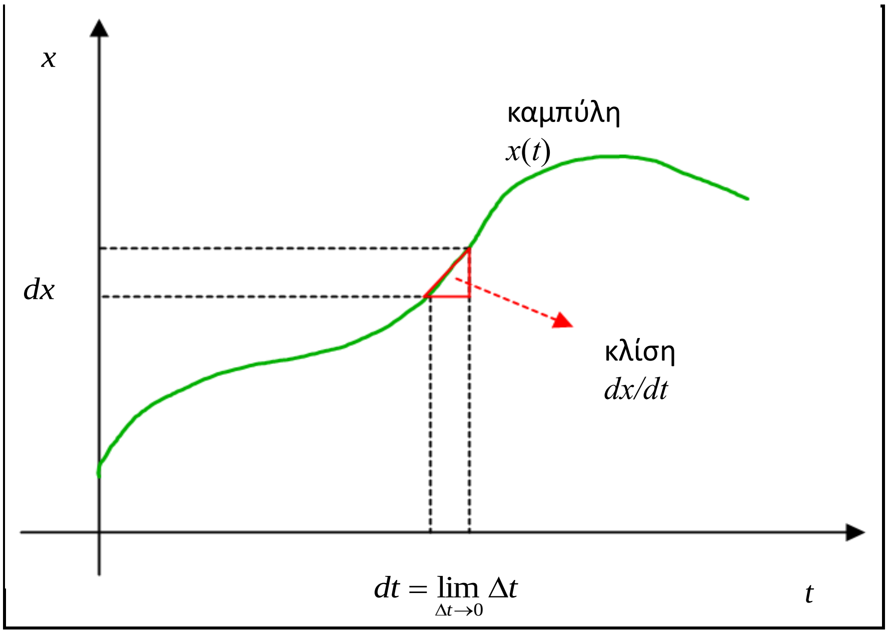
Οι Φυσικοί κουράζονται να κουβαλάνε συνεχώς τον ορισμό του ορίου διότι οι παράγωγοι εμφανίζονται τακτικώς στην Φυσική. Για τον λόγο αυτό ορίζουν το λεγόμενο "διαφορικό του χρόνου" dt ως

$$dt = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta t$$	ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΧΡΟΝΟΥ	(1.6)

το οποίο στην ουσία είναι ένας απειροελάχιστος χρόνος. Ο χρόνος θεωρείται ως η ανεξάρτητη μεταβλητή. Το αντίστοιχο διαφορικό του x, το οποίο είναι η εξαρτημένη μεταβλητή, ορίζεται από την

$$dx = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta x$$	ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ	(1.7)

Προσέξτε ότι το όριο είναι $\Delta t \to 0$ (και όχι $\Delta x \to 0$ όπως ίσως θα αναμενόταν) παρότι που μιλάμε για το διαφορικό του x. Αυτό γίνεται επειδή η t είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και έτσι όταν παίρνουμε μια απειροστή ποσότητά της dt, η αντίστοιχη ποσότητα dx δεν μπορεί να ορισθεί ανεξάρτητα αλλά μέσω της καμπύλης $x(t)$ όπως φαίνεται και στο παρακάτω Σχήμα 1.5.



Σχήμα 1.5: Ορισμός του διαφορικού της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής.

Έτσι ο ορισμός της στιγμιαίας ταχύτητας γράφεται και ως

$$\upsilon(t) = x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$	ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ-ΤΑΧΥΤΗΤΑ	(1.8)

Στο παραπάνω Σχήμα 1.5 φαίνεται καθαρά ότι η ταχύτητα $\upsilon = dx/dt$ σε ένα τυχαίο σημείο της καμπύλης $x(t)$ ισούται με την κλίση σε αυτό το σημείο. Από την τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι

$$dx = x'(t)dt = vdt$$	ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ	(1.9)

Δηλαδή το διαφορικό της εξαρτημένης μεταβλητής ισούται με την παράγωγο αυτής της μεταβλητής επί το διαφορικό της ανεξάρτητης μεταβλητής. Αυτό είναι ένα γενικότερο αποτέλεσμα στα Μαθηματικά. Επειδή το διαφορικό είναι ανάλογο της παραγώγου, τότε ακολουθεί τους γνωστούς κανόνες παραγώγισης όπως θα δούμε στα παρακάτω παραδείγματα.

<u>Παράδειγμα 1.6</u>

Να βρεθεί το διαφορικό των παρακάτω συναρτήσεων (α) $x(t) = \alpha t^3$ και (β) $x(t) = \alpha cos(\beta t)$

Λύση:

(α) Χρησιμοποιώντας την Εξ. 1.9 παραπάνω, έχουμε

$$dx = x'(t)dt = 3\alpha t^2 dt$$

(β) Ομοίως

$$dx = x'(t)dt = -\alpha\beta sin(\beta t)dt$$

<u>Παράδειγμα 1.7</u>

Ένας φοιτητής μελετάει έναν αρμονικό ταλαντωτή ο οποίος περιγράφεται από τη σχέση $x(t) = Asin(\omega t)$ με $A = 0.25\ m$ και $\omega = 6.28\ rad/s$. Λόγω της ακρίβειας του ρολογιού του, μπορεί να παίρνει μετρήσεις κάθε $0.01\ s$. Να βρεθεί πόσο μεταβάλλεται το x μέσα σε αυτό το χρονικό διάστημα $0.01\ s$ όταν $t = 0$ και όταν $t = 0.35\ s$.

<u>Λύση</u>:

Η ακριβής μεταβολή του $x(t)$ στο $t = 0$ κατά το χρονικό διάστημα $0.01\ s$ ισούται με

$$x(0.01) - x(0) = 0.25\, sin(6.28\times 0.01) - 0.25\, sin(0) = 0.01569\ m$$

Επειδή όμως το $\Delta t = 0.01\ s$ είναι μικρή ποσότητα, μπορούμε προσεγγιστικά να το λάβουμε ως το διαφορικό του χρόνου $dt \approx 0.01$ s και να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 1.9 παραπάνω και να έχουμε

$$dx = x'(t)dt = A\omega\, cos(\omega t)\, dt = 0.25\times 6.28\times \cos(0)\times 0.01 = 0.01570\ m$$

που είναι εκπληκτικά κοντά στην παραπάνω τιμή. Ομοίως στο $t = 0.35\ s$ η ακριβής διαφορά είναι ίση με

$$x(0.36) - x(0.35) = 0.25\, sin(6.28\times 0.36) - 0.25\, sin(6.28\times 0.35) = -0.00961\ m$$

Η μέθοδος του διαφορικού δίνει

$$dx = x'(t)dt = A\omega\, cos(\omega t)\, dt = 0.25\times 6.28\times\, cos(6.28\times 0.35)\times 0.01 = -0.00921\ m$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι για μικρές μεταβολές μπορούμε να χρησιμοποιούμε προσεγγιστικά το διαφορικό με την βοήθεια της Εξ 1.9.

Παράδειγμα 1.8

Η στιγμιαία ταχύτητα και η απομάκρυνση ενός κινητού κατά την χρονική στιγμή $t = 4\, s$ είναι αντίστοιχα $v = 15\, m/s$ και $x = 5.5\, m$. Να βρεθεί η απομάκρυνση του κινητού μετά από $2\, ms$ (mili-seconds).

Λύση:

Σε αυτό το παράδειγμα δεν είναι γνωστή η συνάρτηση $x(t)$ και έτσι δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την ακριβή διαφορά $x(4 + 0.002) - x(4)$ και έτσι αναγκαστικά θα καταφύγουμε στην χρήση του διαφορικού όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα. Από την Εξίσωση 1.9 έχουμε

$$dx = vdt \approx 15 \times 0.002 = 0.03\, m$$

Αυτή είναι η μεταβολή του x που αντιστοιχεί στη μεταβολή του χρόνου κατά $2\, ms$. Η νέα απομάκρυνση του κινητού είναι ίση με

$$x + dx = 5.5 + 0.03 = 5.53\, m$$

Ορισμός της στιγμιαίας επιτάχυνσης

Η επιτάχυνση εξ' ορισμού είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του κινητού. Βέβαια στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση η ταχύτητα δεν μεταβάλλεται και η επιτάχυνση είναι μηδέν. Σε όλες τις άλλες κινήσεις όμως, η επιτάχυνση είναι διάφορη του μηδενός. Όπως ορίσαμε την στιγμιαία ταχύτητα, έτσι και σε αυτό το εδάφιο θα ορίσουμε την στιγμιαία επιτάχυνση ως

$a = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{dv}{dt} = v'(t)$	ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ	(1.10)

Επομένως βλέπουμε ότι:

Στιγμιαία επιτάχυνση = Παράγωγος της ταχύτητας ως προς το χρόνο

Βέβαια αφού και η στιγμιαία ταχύτητα είναι ίση με την παράγωγο του x, μπορούμε να συνδυάσουμε τις δυο και να πούμε επίσης ότι:

Στιγμιαία επιτάχυνση = 2^{η} Παράγωγος της απομάκρυνσης ως προς το χρόνο

Η αντίστροφη σχέση της Εξ. 1.10 είναι η

$v(t) = \int a(t)dt$	ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ-ΤΑΧΥΤΗΤΑ	(1.11)

Στιγμιαία ταχύτητα = Ολοκλήρωση της Επιτάχυνσης ως προς το χρόνο

Όπως με το διάγραμμα $x - t$, έτσι και σε διάγραμμα $v - t$ η επιτάχυνση σε κάθε σημείο ισούται με την κλίση της γραφικής παράστασης στο σημείο αυτό. Παρακάτω θα συνδυάσουμε τις Εξισώσεις 1.9 και 1.10, δηλαδή τις $v = dx/dt$ και $a = dv/dt$ για να μελετήσουμε κάποιες απλούστερες κινήσεις στη μια διάσταση:

Περίπτωση 1, Ακίνητο σώμα

Σε αυτή την περίπτωση $v = 0$ και $a = 0$. Εάν ίσχυε μόνο η πρώτη συνθήκη, δηλαδή η $v = 0$ ενώ $a \neq 0$ τότε το σώμα θα ήταν μόνο στιγμιαία ακίνητο αφού από την Εξ. 1.10 παίρνουμε $dv = adt \neq 0$ και άρα υπάρχει μεταβολή ταχύτητας dv και έτσι το κινητό μετά από χρόνο dt θα αποκτήσει ταχύτητα $0 + dv$ και θα αρχίσει να κινείται. Για παράδειγμα η ταχύτητα μιας πέτρας που εκτοξεύεται προς τα πάνω μειώνεται συνεχώς λόγω της βαρύτητας. Κάποια στιγμή η πέτρα σταματάει και αναστρέφει την πορεία της. Εκείνη την στιγμή η ταχύτητά της είναι μηδενική. Γνωρίζουμε όμως ότι η πέτρα δεν θα μείνει εκεί αλλά θα επιστρέψει στο σημείο εκτόξευσης. Αυτό γίνεται επειδή στην πέτρα δρα συνεχώς η βαρύτητα η οποία της προσδίδει επιτάχυνση $a = -g$ προς τα κάτω. Επομένως

$v = 0$ και $a = 0$	ΑΠΟΛΥΤΩΣ ΑΚΙΝΗΤΟ ΣΩΜΑ	(1.12)

ενώ

$v = 0$ και $a \neq 0$	ΣΤΙΓΜΙΑΙΩΣ ΑΚΙΝΗΤΟ ΣΩΜΑ	(1.13)

Περίπτωση 2, Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

Σε αυτή την περίπτωση v: σταθερό και από την Εξ. 1.10 με παραγώγιση παίρνουμε $a = 0$. Ολοκληρώνοντας την Εξ. 1.9 με v: σταθερό οδηγεί στην $x = c + vt$. Η c είναι η σταθερά ολοκλήρωσης και η φυσική της σημασία φαίνεται εάν θέσουμε $t = 0$ που οδηγεί στην $x(0) = c + 0 => c = x(0)$ δηλαδή η c είναι ίση με την αρχική απομάκρυνση $x(0)$ την οποία συνήθως εν συντομία την γράφουμε ως x_0. Έτσι για σταθερή ταχύτητα (ομαλή κίνηση)

$x = x_0 + vt$	ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΟΜΑΛΗ ΚΙΝΗΣΗ	(1.14)

Λύνοντας ως προς v καταλήγουμε στην Εξ. 1.2 όπως αναμένεται (θεωρούμε εδώ ότι $t_0 = 0$)

Περίπτωση 3, Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

Σε αυτή την περίπτωση a: σταθερό. Από την Εξ. 1.10 ολοκληρώνοντας με a: σταθερό παίρνουμε $v = c + at$ όπου η σταθερά ολοκλήρωσης c είναι όπως και προηγουμένως ίση με την αρχική ταχύτητα v_0. Επομένως έχουμε

$v = v_0 + at$	ΕΠΙΤΑΧ. ΚΙΝΗΣΗ	(1.15)

Ολοκληρώνοντας ακόμη μια φορά παίρνουμε:

$x = x_0 + v_0 t + 1/2at^2$	ΕΠΙΤΑΧ. ΚΙΝΗΣΗ	(1.16)

Όπως και προηγουμένως, η σταθερά ολοκλήρωσης x_0 είναι ίση με την αρχική μετατόπιση. Απαλείφοντας τον χρόνο από τις Εξισώσεις 1.15 και 1.16 και μετά από λίγες πράξεις, καταλήγουμε στην

$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2$	ΕΠΙΤΑΧ. ΚΙΝΗΣΗ	(1.17)

Επίσης η Εξ. 1.15 μπορεί να λυθεί ως προς το a καταλήγοντας στην

$a = \dfrac{v - v_0}{t}$	ΕΠΙΤΑΧ. ΚΙΝΗΣΗ	(1.18)

Επομένως στην ειδική περίπτωση που το a: σταθερό, δεν χρειάζεται να καταφύγουμε στην παραγώγιση για να υπολογίσουμε την επιτάχυνση, απλά χρησιμοποιούμε την παραπάνω σχέση. Αυτές οι τέσσερις είναι οι βασικές εξισώσεις της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης.

Περίπτωση 4, Αρμονικός ταλαντωτής

Όπως θα δούμε σε μεταγενέστερο κεφάλαιο, η πιο γενική περίπτωση αρμονικού ταλαντωτή είναι αυτή που περιγράφεται από τη σχέση $x(t) = x_M cos(\omega t + \varphi)$ όπου x_M το πλάτος της ταλάντωσης σε m, ω η κυκλική συχνότητα σε rad/s και φ η αρχική φάση σε rad. Από την Εξ. 1.9 $v = dx/dt$ έχουμε $v(t) = -x_M \omega sin(\omega t + \varphi)$ ή $v(t) = -v_M sin(\omega t + \varphi)$ όπου θέσαμε $v_M = x_M \omega$ το οποίο είναι το πλάτος της ταχύτητας. Από την Εξ. 1.10 $a = dv/dt$ έχουμε ότι $a(t) = -x_M \omega^2 cos(\omega t + \varphi)$ ή $a(t) = -a_M sin(\omega t + \varphi)$ όπου $a_M = x_M \omega^2$ το πλάτος της επιτάχυνσης. Συνοψίζοντας:

$x(t) = x_M cos(\omega t + \varphi)$ $v(t) = -v_M sin(\omega t + \varphi)$ με $v_M = \omega x_M$ $a(t) = -a_M sin(\omega t + \varphi)$ με $a_M = \omega^2 x_M$	ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ	(1.19)

Περισσότερο σύνθετες κινήσεις

Οι παραπάνω τέσσερις περιπτώσεις είναι οι απλούστερες κινήσεις στην 1 διάσταση ενός κινητού που έχει την μορφή ενός υλικού σημείου. Όπως θα δούμε και παρακάτω, αυτές οι κινήσεις ισχύουν και στην περίπτωση ενός στερεού όταν ως υλικό σημείο επιλέξουμε το κέντρο μάζας του κινητού. Στα παρακάτω παραδείγματα θα μελετήσουμε και πιο σύνθετες κινήσεις:

Παράδειγμα 1.9

Ένα υλικό σημείο κινείται στη μια διάσταση έτσι ώστε η απομάκρυνσή του να περιγράφεται από την εξίσωση $x(t) = x_m(1 - e^{-bt})$ όπου x_m και b σταθερές σε μονάδες m και s^{-1} αντίστοιχα. (α) Να βρεθεί η στιγμιαία ταχύτητα και επιτάχυνση του κινητού. (β) Να σχεδιασθεί η γραφική παράσταση $x - t$. (γ) Να σχολιασθεί εάν η κλίση της γραφικής παράστασης συμφωνεί με την στιγμιαία ταχύτητα που βρήκατε παραπάνω. (δ) Να σχολιασθεί το είδος της κίνησης για $t \to \infty$.

Λύση:

(α) Παραγωγίζοντας διαδοχικά δυο φορές το $x(t)$ παίρνουμε

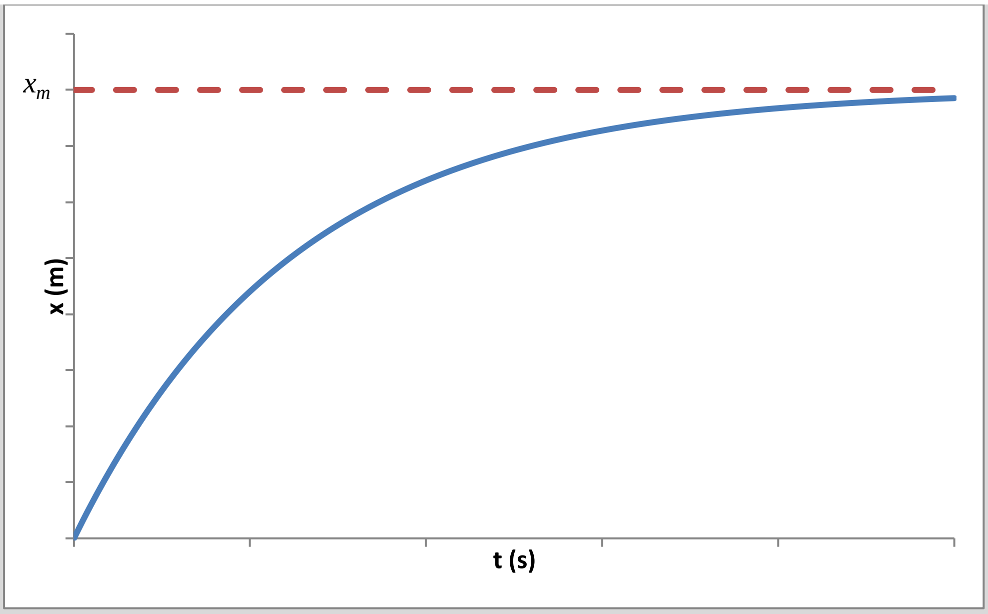
$$v(t) = x'(t) = bx_m e^{-bt} = v_m e^{-bt}$$

και

$$a(t) = v'(t) = -b^2 x_m e^{-bt} = -a_m e^{-bt}$$

όπου $v_m = bx_m$ και $a_m = b^2 x_m$.

(β) Η γραφική παράσταση $x - t$ είναι όπως η παρακάτω: Για μεγάλους χρόνους το x τείνει στο x_m ενώ για μικρούς χρόνους η καμπύλη είναι σχεδόν ευθεία γραμμή.



(γ) Η κλίση της γραφικής παράστασης φαίνεται να είναι μέγιστη στο $t = 0$ και σταδιακά να μειώνεται έως το $t \to \infty$ όπου και γίνεται μηδέν. Αυτό είναι σε πλήρη συμφωνία με την έκφραση $v(t) = v_m e^{-bt}$ που βρήκαμε παραπάνω η οποία είναι μια εκθετικά φθίνουσα συνάρτηση και άρα είναι μέγιστη στο $t = 0$ με ταχύτητα $v(0) = v_m$ και μηδέν στο $t \to \infty$.

(δ) Όταν $t \to \infty$ τόσο $v = 0$ όσο και $a = 0$ και άρα το κινητό έρχεται σε πλήρη ακινησία.

Παράδειγμα 1.10

Ένα υλικό σημείο κινείται στη μια διάσταση έτσι ώστε η ταχύτητα του να περιγράφεται από την εξίσωση $v(t) = bt - dt^3$ όπου b και d σταθερές σε μονάδες ms^{-2} και ms^{-4} αντίστοιχα. Εάν η αρχική θέση του κινητού στο $t = 0$ είναι $2\ m$, να βρεθεί η απομάκρυνση και η στιγμιαία επιτάχυνση του κινητού.

Λύση:

Από την $v(t)$ ολοκληρώνοντας έχουμε

$$x(t) = \int v(t)\, dt = b\frac{t^2}{2} - d\frac{t^4}{4} + c$$

όπου c είναι η σταθερά ολοκλήρωσης αφού το ολοκλήρωμα σε αυτές τις σχέσεις είναι αόριστο. Εφαρμόζουμε την αρχική συνθήκη $x(0) = 2$ για να πάρουμε

$$2 = 0b - 0d + c => c = 2$$

Επομένως

$$x(t) = b\frac{t^2}{2} - d\frac{t^4}{4} + 2$$

Από την $v(t)$ παραγωγίζοντας έχουμε

$$a(t) = v'(t) = b - 3dt^2$$

Παράδειγμα 1.11

Μια μικρή πέτρα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Μετά από χρόνο $1.5\ s$ βρίσκεται στο υψηλότερο σημείο. Εάν θεωρήσουμε ότι πάνω της δρα μόνο η βαρύτητα οπότε της προσδίδει αρνητική επιτάχυνση $g = 9.8\ ms^{-2}$ (προς τα κάτω), να βρεθούν (α) η ταχύτητα της πέτρας στο σημείο αυτό, (β) η ταχύτητα της πέτρας $0.01\ s$ αργότερα και (γ) Το μέγιστο ύψος που φτάνει η πέτρα.

Λύση:

(α) Στο υψηλότερο σημείο η πέτρα σταματάει προσωρινά και άρα $v = 0$

(β) Υπάρχουν δυο τρόποι να λυθεί το πρόβλημα, με ακριβή λύση και με προσεγγιστική λύση. Κατά την ακριβή λύση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση $v(t) = v_0 + at$ της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης με επιτάχυνση $a = -g$ και να έχουμε

$$v(t) = v_0 - gt$$

Για να βρούμε το v_0 χρησιμοποιούμε τα δεδομένα στο υψηλότερο σημείο:

$$0 = v_0 - 9.8\times1.5 => v_0 = 14.7\ m/s$$

Εφαρμόζοντας την ίδια σχέση $0.01\ s$ αργότερα, δηλαδή στο $t = 1.5 + 0.01 = 1.51\ s$ έχουμε

$$v(t) = v_0 - gt => v(1.51\ ) = 14.7\ - 9.8\times1.51 = -0.098\ m/s$$

Η ταχύτητα είναι αρνητική όπως αναμένεται αφού μετά το μέγιστο σημείο, η πέτρα κινείται προς τα κάτω. Η εναλλακτική προσεγγιστική λύση είναι η εξής: Από την

$$a = \frac{dv}{dt}$$

μπορούμε να λύσουμε ως προς το διαφορικό της ταχύτητας

$$dv = adt$$

Επειδή το χρονικό διάστημα των $0.01\ s$ είναι σχετικά μικρό, μπορούμε προσεγγιστικά να το εκλάβουμε ως το διαφορικό του χρόνου δηλαδή $dt \approx 0.01$ s. Με $a = -g$ έχουμε

$$dv = -gdt \approx -9.8\times0.01 = -0.098\ m/s$$

Αυτή είναι η μεταβολή της ταχύτητας μετά το υψηλότερο σημείο της τροχιάς. Η ταχύτητα ισούται με

$$v + dv = 0 - 0.098 = -0.098\ m/s$$

Οι δυο λύσεις δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. Αυτό έγινε επειδή η ταχύτητα μεταβάλλεται γραμμικά με τον χρόνο. Εν γένει η λύση του διαφορικού είναι κοντά στην πραγματική λύση αλλά όχι βέβαια η ακριβής λύση.

(γ) Χρησιμοποιούμε την εξίσωση $x(t) = x_0 + v_0 t + 1/2at^2$ της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης με επιτάχυνση $a = -g$ και έχουμε

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Επιλέγουμε αυθαίρετα $x_0 = 0$ για το αρχικό ύψος. Κατά την χρονική στιγμή $t = 1.5\ s$ η πέτρα έρχεται στο μέγιστο ύψος το οποίο από την παραπάνω σχέση είναι ίσο με

$$h = x(1.5) = 14.7\times1.5 - \frac{1}{2}\times9.8\times1.5^2 = 11.0\ m$$

Προβλήματα

<u>Ορισμός της στιγμιαίας ταχύτητας</u>

1.1 Ένα υλικό σημείο κινείται επάνω σε μια ευθεία έτσι ώστε η απομάκρυνση του να δίνεται από την εξίσωση $x(t) = At^3 - Bt^2$ όπου $A = 0.2\ m/s^3$ και $B = 0.6\ m/s^2$ αντίστοιχα. Το κινητό ακινητοποιείται στιγμιαία σε χρόνο $t_1 > 0$. Να βρεθεί η απομάκρυνσή του κινητού σε χρόνο $\Delta t = 0.2\ s$ μετά από αυτή τη χρονική στιγμή της στιγμιαίας ακινητοποίησης.

<u>Απάντηση</u>: $-0.7744\ m$

1.2 Ένας αρμονικός ταλαντωτής κινείται έτσι ώστε η απομάκρυνσή του συναρτήσει του χρόνου να δίνεται από την έκφραση $x(t) = Asin(\omega t)$ όπου $A = 2\ m$ και $\omega = \pi\ rad/s$. Να βρεθεί η αντίστοιχη έκφραση της στιγμιαίας ταχύτητας του ταλαντωτή.

1.3 Ένας αρμονικός ταλαντωτής κινείται έτσι ώστε η απομάκρυνσή του συναρτήσει του χρόνου να δίνεται από την έκφραση $x(t) = Acos(\omega t) + x_0$ όπου $A = 3\ m$, $\omega = 2.0\ rad/s$ και $x_0 = 1.2\ m$. Να βρεθεί η αντίστοιχη έκφραση της στιγμιαίας ταχύτητας του ταλαντωτή.

1.4 Ένας αρμονικός ταλαντωτής κινείται έτσι ώστε η απομάκρυνσή του συναρτήσει του χρόνου να δίνεται από την έκφραση $x(t) = Asin(\omega t + \varphi)$ όπου $A = 3\ m$, $\omega = \pi\ rad/s$ και $\varphi = \pi/4$. Να βρεθεί η αντίστοιχη έκφραση της στιγμιαίας ταχύτητας του ταλαντωτή.

1.5 Ένα κινητό διαγράφει ευθύγραμμη τροχιά υπό την επίδραση κάποιας μεταβλητής δύναμης που το αναγκάζει να κινείται έτσι ώστε η απομάκρυνσή του ανά πάσα στιγμή να δίνεται από την $x(t) = at^4 - bt^2$ όπου $a = 0.2\, m/s^4$ και $b = 0.6\, m/s^2$ αντίστοιχα. Να βρεθεί σε ποιες χρονικές στιγμές το κινητό ακινητοποιείται στιγμιαία.

Απάντηση: $\pm 1.225\, s$

1.6 Ένα κινητό διαγράφει ευθύγραμμη τροχιά υπό την επίδραση κάποιας μεταβλητής δύναμης που το αναγκάζει να κινείται έτσι ώστε η στιγμιαία του ταχύτητα ανά πάσα στιγμή να δίνεται από την $v(t) = at^2 - bt$ όπου $a = 0.3\, m/s^3$ και $b = 0.4\, m/s^2$. Εάν την χρονική στιγμή $t = -1\, s$ η απομάκρυνση του κινητού είναι ίση με $x = 1/5\, m$, να βρεθεί η απομάκρυνσή του την χρονική στιγμή $t = 1\, s$.

Απάντηση: $0.4\, m$

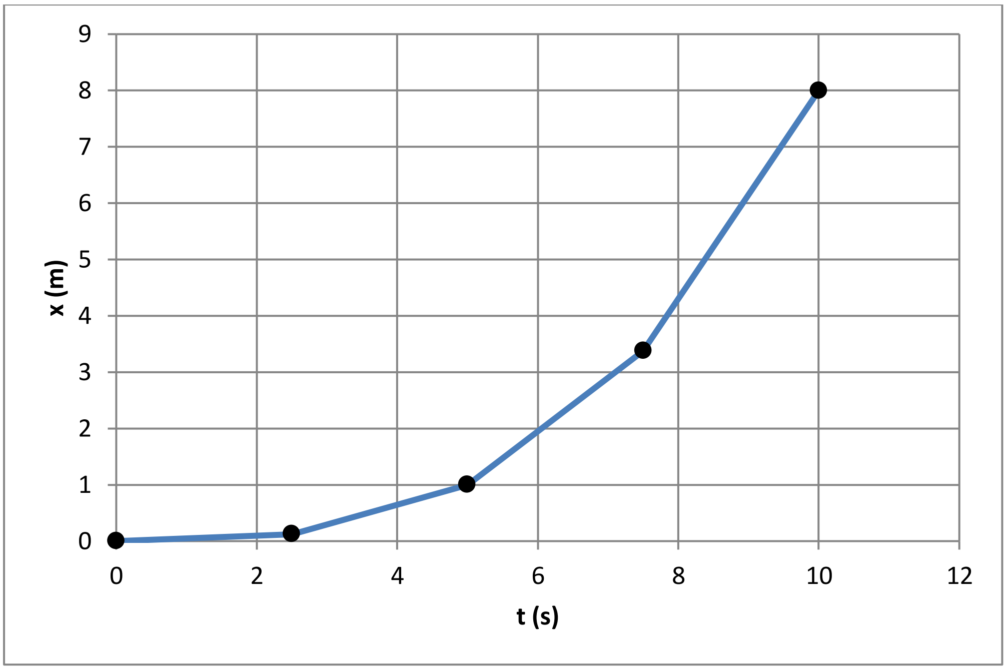
1.7 Ένας φοιτητής κατέγραψε τα εξής δεδομένα για την κίνηση ενός κινητού. Να βρεθεί η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού την χρονική στιγμή $t = 2.3\, s$.

$t(s)$	$x(m)$
2.0	9.49
2.1	9.13
2.2	8.70
2.3	7.50
2.4	7.23
2.5	6.20
2.6	5.42
2.7	4.91
2.8	3.99
2.9	2.64
3.0	1.83
3.1	1.21
3.2	0.22

Απάντηση: $-\ 12\, m/s$

Γραφική ερμηνεία της ταχύτητας

1.8 Στο παρακάτω σχήμα τα κυκλικά σημεία απεικονίζουν κάποιες μετρήσεις $x - t$ που πήρε ένας φοιτητής για ένα κινητό. Τα σημεία ενώνονται μεταξύ τους με ευθύγραμμα τμήματα. Από την κλίση αυτών των τμημάτων να υπολογισθεί προσεγγιστικά η ταχύτητα του κινητού στους χρόνους των 4 τελευταίων σημείων.



<u>Απάντηση</u>: $0.048, 0.352, 0.96$ και $1.84\ m/s$

1.9 Στην παραπάνω άσκηση να βρεθούν οι ακριβείς τιμές της ταχύτητας στα πειραματικά σημεία εάν γνωρίζουμε ότι αυτά ανήκουν σε μια καμπύλη $x(t)$ η οποία είναι ανάλογη του t^3.

<u>Απάντηση</u>: $0, 0.15, 0.60, 1.35$ και $2.40\ m/s$

1.10 Ένα υλικό σημείο κινείται επάνω σε μια ευθεία έτσι ώστε η απομάκρυνση του να δίνεται από την $x(t) = A + Bsin(\omega t)$ όπου $A = 2\ m$, $B = 0.5\ m$ και $\omega = \pi\ rad/s$. (α) Να γίνει η γραφική παράσταση $x - t$ για χρόνους από 0 έως $3\ s$, (β) Από τη γραφική παράσταση να βρεθούν τα χρονικά διαστήματα όπου η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι θετική, αρνητική, μηδέν και μέγιστη (κατ' απόλυτη τιμή).

<u>Η έννοια του Διαφορικού</u>

1.11 Να βρεθεί το διαφορικό των παρακάτω συναρτήσεων (α) $x(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ και (β) $x(t) = \alpha e^{-\beta t}$ όπου α, β και γ είναι σταθερές με κατάλληλες μονάδες ώστε τα x να είναι σε m.

1.12 Η στιγμιαία ταχύτητα και η απομάκρυνση ενός κινητού στο $t = 5.2\ s$ είναι αντίστοιχα $v = 12.5\ m/s$ και $x = 3.0\ m$. (α) Να βρεθεί προσεγγιστικά η απομάκρυνση του κινητού μετά από χρόνο 3 ms με τη χρήση της μεθόδου του διαφορικού. (β) Πως αλλάζει το παραπάνω αποτέλεσμα εάν η στιγμιαία ταχύτητα είναι μηδέν; Να ερμηνευτεί το αποτέλεσμα.

<u>Ορισμός της στιγμιαίας επιτάχυνσης</u>

1.13 Ένα υλικό σημείο κινείται στη μια διάσταση έτσι ώστε η απομάκρυνσή του να περιγράφεται από την εξίσωση $x(t) = x_m e^{-bt} cos(\omega t)$ όπου $x_m = 2\ m, b = 0.5\ s^{-1}$ και $\omega = 2\pi\ rad/s$ αντίστοιχα. (α) Να βρεθεί η στιγμιαία ταχύτητα και επιτάχυνση του κινητού. (β) Να σχεδιασθεί η γραφική παράσταση $x - t$ για χρόνους από 0 έως 5 s. (γ) Από την κλίση της γραφικής παράστασης να βρεθεί το πρόσημο της ταχύτητας του κινητού στα 3 πρώτα μηδενικά της γραφικής παράστασης. (δ) Να επαληθευτεί το προηγούμενο αποτέλεσμα από την έκφραση της στιγμιαίας ταχύτητας που βρήκατε στο β παραπάνω. (ε) Να σχολιασθεί το είδος της κίνησης για $t \to \infty$.

1.14 Ένα υλικό σημείο κινείται στη μια διάσταση έτσι ώστε η επιτάχυνσή του να περιγράφεται από την εξίσωση $a(t) = a_m e^{-bt}$ όπου $a_m = 2\ ms^{-2}$ και $b = 0.5\ s^{-1}$ αντίστοιχα. (α) Να βρεθεί η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού εάν η αρχική ταχύτητα στο $t = 0$ είναι μηδέν. (β) Να σχεδιασθούν ξεχωριστά οι γραφικές παραστάσεις $v - t$ και $a - t$. (γ) Να ερμηνευτεί η μορφή της γραφικής παράστασης $v - t$ με την βοήθεια της γραφικής παράστασης $a - t$. (δ) Να σχολιασθεί το είδος της κίνησης για $t \to \infty$.

1.15 Σημειακό σώμα Α κινείται με σταθερή ταχύτητα $v = -5\ m/s$ για $t \leq 0$. Στο $t = 0$ και ενώ το κινητό βρίσκεται στο $x = 0$ εφαρμόζεται επιτάχυνση $a = 2\pi cos(c_1 t)$ όπου $c_1 = \pi\ rad/s$. Να βρεθεί η απομάκρυνση του Α την χρονική στιγμή $t = 2\ s$.

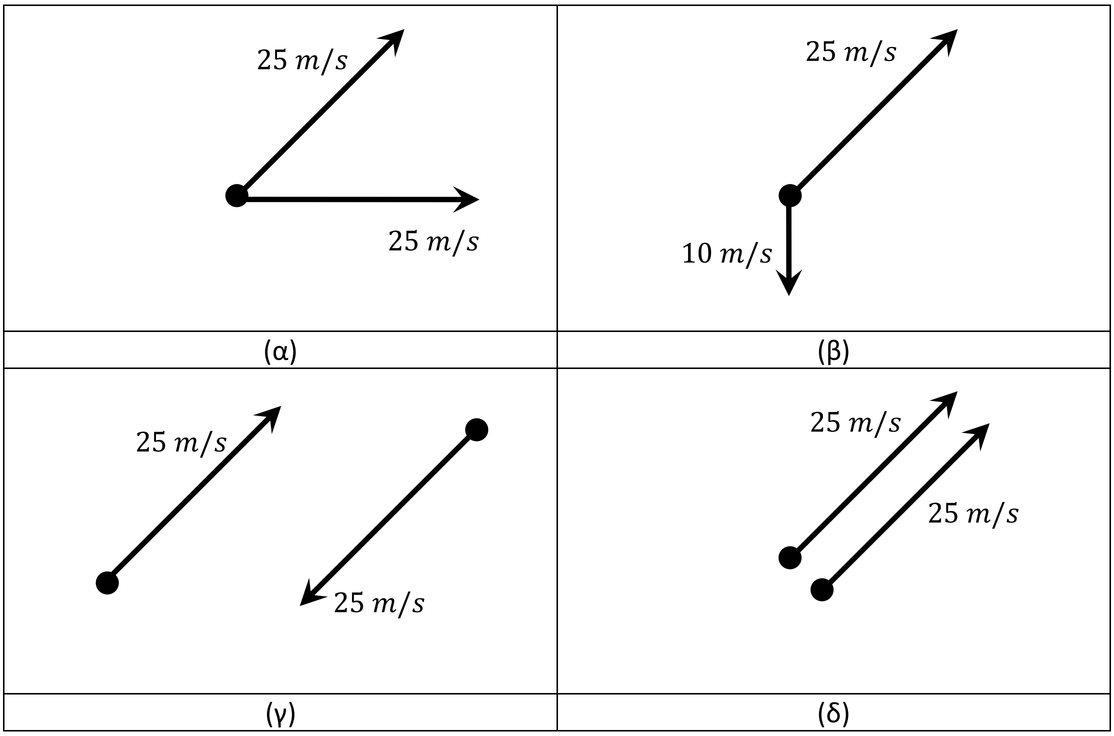
<u>Απάντηση</u>: $-10\ m$

2. ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ – ΥΛΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ

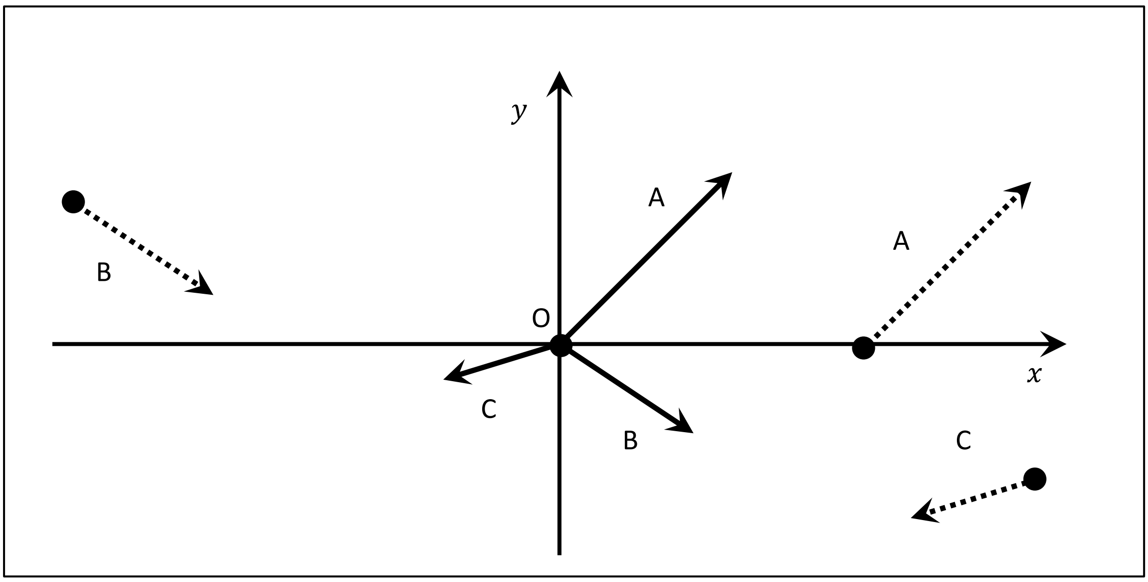
Σε αυτό το κεφάλαιο, θα γενικευτεί η ευθύγραμμη κίνηση του υλικού σημείου που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο σε δυο διαστάσεις. Στην κίνηση στο επίπεδο, όλες οι φυσικές ποσότητες έχουν δυο συνιστώσες. Επομένως τα Μαθηματικά εργαλεία που απαιτούνται είναι τα δισδιάστατα διανύσματα και έτσι το κεφάλαιο θα ξεκινήσει με μια γρήγορη επανάληψη στα διανύσματα.

Διανύσματα σε επίπεδο

Εισαγωγή. Οι μεταβλητές που μελετήσαμε στη μια διάσταση όπως οι x, v κ.τ.λ. εκφράζουν ποσότητα, για παράδειγμα η $v_1 = 25\ m/s$ είναι πολύ μεγαλύτερη ταχύτητα από μια άλλη ταχύτητα $v_2 = 10\ m/s$. Στην κίνηση στο επίπεδο αυτή η πληροφορία από μόνη της δεν είναι αρκετή. Για παράδειγμα εάν οι v_1 και v_2 ήταν ταχύτητες του ανέμου σε δυο διαφορετικές ημέρες, θα θέλαμε να γνωρίζουμε και προς τα που έπνεε ο άνεμος αυτές τις δυο ημέρες. Ήταν π.χ. οι άνεμοι αυτοί βορειο-ανατολικοί, ήταν βοριάδες ή βορειοδυτικοί; Το διάνυσμα είναι μια μαθηματική οντότητα που μας δείχνει ταυτόχρονα και ποσότητα αλλά και διεύθυνση στο επίπεδο. Συμβολίζεται με ένα βέλος. Το μήκος του βέλους εκφράζει την ποσότητα και ονομάζεται μέτρο ενώ ο προσανατολισμός του στο επίπεδο δείχνει την κατεύθυνση (δηλαδή διεύθυνση και φορά μαζί). Για παράδειγμα στο παρακάτω Σχήμα 2.1, στην περίπτωση (α), τα δυο διανύσματα έχουν το ίδιο μέτρο αλλά διαφορετική κατεύθυνση. Έτσι π.χ. θα μπορούσαν να περιγράφουν δυο ανέμους με την ίδια ταχύτητα $25\ m/s$ αλλά ο ένας με κατεύθυνση ανατολική ενώ ο άλλος βορειο-ανατολική. Αντιθέτως στην περίπτωση (β) οι δυο άνεμοι διαφέρουν και σε μέτρο και σε κατεύθυνση. Ο άνεμος με κατεύθυνση νότια είναι $10\ m/s$ ενώ ο βορειο-ανατολικός άνεμος $25\ m/s$. Στην περίπτωση (γ) του ίδιου σχήματος, τα δυο διανύσματα έχουν το ίδιο μέτρο $25\ m/s$ αλλά αντίθετη κατεύθυνση ενώ στην περίπτωση (δ) έχουν τόσο το ίδιο μέτρο όσο και την ίδια κατεύθυνση, επομένως περιγράφουν το ίδιο φυσικό φαινόμενο. Θα μπορούσε π.χ. η περίπτωση δ να περιγράφει δυο διαφορετικές μετρήσεις του ίδιου ανέμου σε δυο διαφορετικές αλλά κοντινές τοποθεσίες. Τα δυο αυτά διανύσματα θεωρούνται ίσα και θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί οποιοδήποτε από αυτά τα δυο για να περιγράψει τον άνεμο. Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε με ένα από αυτά, επειδή είναι π.χ. αυτό που μετρήσαμε, να το διαγράψουμε και σχεδιάσουμε ένα δεύτερο σε κοντινή τοποθεσία, ίσο σε μέτρο και με την ίδια κατεύθυνση με το πρώτο διάνυσμα. Επομένως τα διανύσματα στα Μαθηματικά αλλά και στη Φυσική μπορούν να μετατοπισθούν παράλληλα σε όποια θέση επιθυμούμε, αρκεί να μη μεταβάλλουμε το μέτρο τους. Αυτό όπως θα δούμε παρακάτω ισχύει μόνο για τη μεταφορική κίνηση αφού στην περιστροφική κίνηση το σημείο εφαρμογής της δύναμης παίζει μεγάλο ρόλο και έτσι δεν μπορούμε να μεταφέρουμε μια δύναμη σε αυτή την περίπτωση. Προς το παρόν μελετούμε μόνο υλικό σημείο που αναγκαστικά εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση και έτσι έχουμε την ευχέρεια να μεταφέρουμε ένα διάνυσμα όπου επιθυμούμε. Για το λόγο αυτό, επιλέγουμε την αρχή των συντεταγμένων Ο ως ένα κοινό σημείο αναφοράς και μεταφέρουμε όλα τα διανύσματα έτσι ώστε η αρχή τους να είναι το Ο όπως στο παρακάτω Σχήμα 2.2 όπου με διακεκομμένες γραμμές φαίνονται τα διανύσματα A, B και C στις αρχικές τους θέσεις και με έντονες γραμμές στην τελική τους θέση ώστε η αρχή τους να συμπίπτει με το Ο

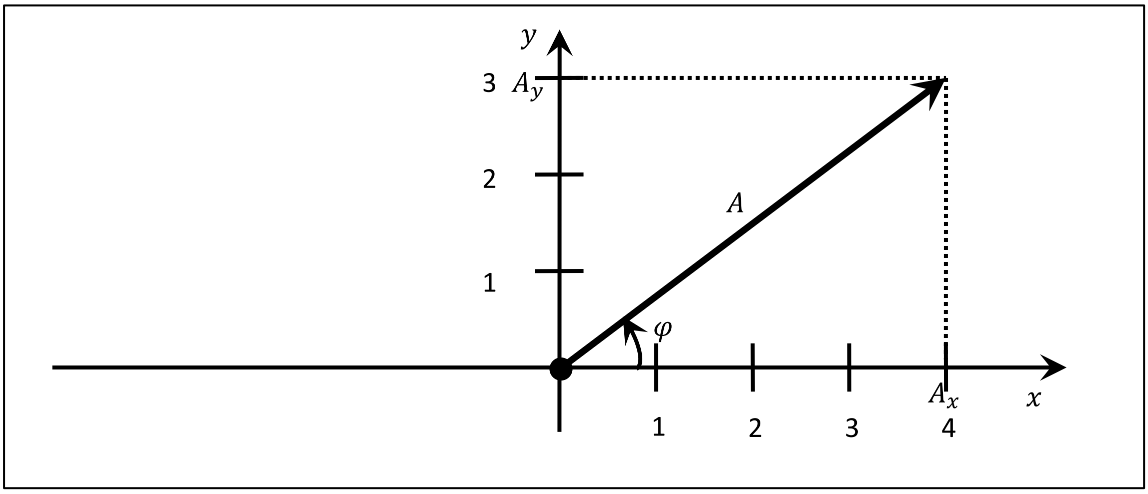


Σχήμα 2.1. Διανύσματα που αναπαριστάνουν διαφορετικούς ανέμους.



Σχήμα 2.2. Μεταφορά τριών διανυσμάτων ώστε να έχουν ως κοινή αρχή την αρχή των συντεταγμένων Ο.

Όταν μεταφέρουμε ένα διάνυσμα κατά αυτό τον τρόπο ώστε αρχή του να συμπίπτει με την αρχή των συντεταγμένων O, τότε λέμε ότι το διάνυσμα έχει συντεταγμένες A_x και A_y όπου τα A_x και A_y είναι οι προβολές του διανύσματος στους άξονες x και y αντίστοιχα, όπως στο παρακάτω Σχήμα 2.3 όπου το διάνυσμα A έχει συντεταγμένες 4 και 3. Οι συντεταγμένες του διανύσματος είναι ίσες με τις συντεταγμένες του σημείου στο πέρας (τέλος) του διανύσματος.



Σχήμα 2.3. Τυχαίο διάνυσμα A με συντεταγμένες $(4{,}3)$.

Για να συμβολίσουμε ένα διάνυσμα όπως το A στο παραπάνω σχήμα, βάζουμε ένα βέλος από πάνω του, δηλαδή το γράφουμε ως $\vec{A}$. Εάν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες του τις γράφουμε σε παρένθεση, π.χ. στο παραπάνω σχήμα γράφουμε $\vec{A} = (4{,}3)$ (όπως ακριβώς γράφουμε και για μια απλή μεταβλητή π.χ. $x = 2$). Το μέτρο του διανύσματος, που το συμβολίζουμε ως $|\vec{A}|$ είναι ίσο με το μήκος του και είναι πάντοτε ένας θετικός αριθμός. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο Σχήμα 2.3 μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ισχύει το εξής:

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2}$$	ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ	(2.1)

Π.χ. στο συγκεκριμένο σχήμα έχουμε $|\vec{A}| = 5$. Επειδή ο συμβολισμός του μέτρου είναι κάπως δύσχρηστος, καμιά φορά το συμβολίζουμε και απλά ως A, δηλαδή το διάνυσμα χωρίς το βέλος από πάνω και χωρίς τις δυο κατακόρυφες γραμμές. Επίσης στη Φυσική το μέτρο έχει μονάδες που είναι οι μονάδες των x και y. Π.χ. στο παραπάνω σχήμα θα μπορούσαν οι άξονες να αναπαριστάνουν ταχύτητα σε δυο διαφορετικές διευθύνσεις και τα νούμερα να είναι σε m/s. Τότε και το μέτρο θα ήταν σε m/s. Η κατεύθυνση του διανύσματος περιγράφεται από την γωνία φ που σχηματίζει με τον άξονα x. Από τον ορισμό της εφαπτομένης στο χαμηλότερο από τα δυο τρίγωνα του Σχήματος 2.3 μπορούμε να δούμε εύκολα ότι

$\varphi = tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$	ΓΩΝΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ	(2.2)

Π.χ. στο συγκεκριμένο σχήμα $\varphi = 36.9^0$. Η συνάρτηση $tan^{-1}()$ είναι η αντίστροφη της εφαπτομένης, επίσης γνωστή και ως $arctan$. Η γωνία φ θεωρείται θετική όταν διαγράφεται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού, ξεκινώντας από τον άξονα x όπως στο Σχήμα 2.3. Αντιστρόφως, εάν γνωρίζουμε το μέτρο $|\vec{A}|$ και την γωνία φ ενός διανύσματος, μπορούμε από απλή τριγωνομετρία στο Σχήμα 2.3 να βρούμε τις συντεταγμένες του διανύσματος ως εξής:

$A_x = |\vec{A}|cos\varphi \;\&\; A_y = |\vec{A}|sin\varphi$	ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ	(2.3)

Παράδειγμα 2.1

Ένα διάνυσμα $\vec{B}$ έχει μέτρο 10 και συντεταγμένη x ίση με 8.66. Να βρεθεί η συντεταγμένη του y και η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x εάν γνωρίζετε ότι το $\vec{B}$ βρίσκεται στο 4ο τεταρτημόριο.

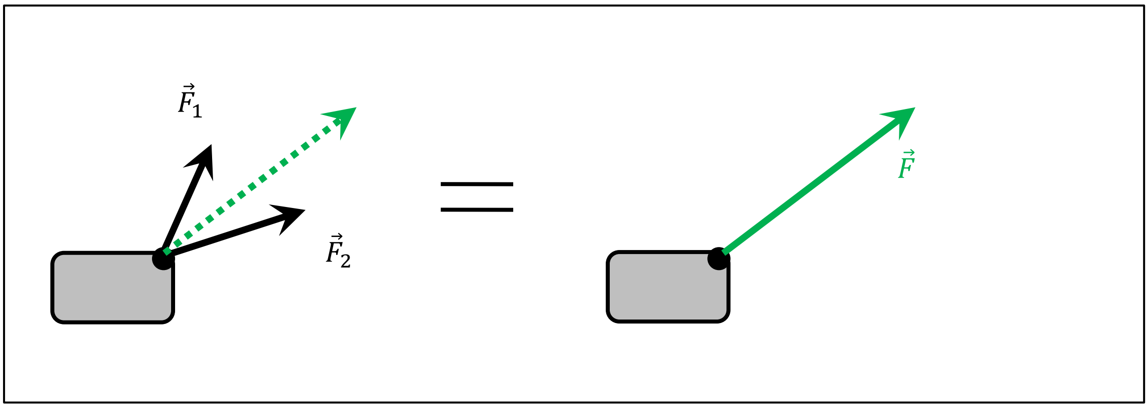
Λύση:

Από τον ορισμό του μέτρου Εξ. 2.1 έχουμε $B^2 = {B_x}^2 + {B_y}^2 \Rightarrow 10^2 = 8.66^2 + {B_y}^2$ από όπου βρίσκουμε $B_y = \pm 5$. Αφού το $\vec{B}$ βρίσκεται στο 4ο τεταρτημόριο τότε η y-συνιστώσα του πρέπει να είναι αρνητική και επομένως επιλέγουμε $B_y = -5$. Από την Εξ. (2)

$$\varphi = tan^{-1}\left(\frac{B_y}{B_x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{-5}{8.66}\right) = -30^0$$

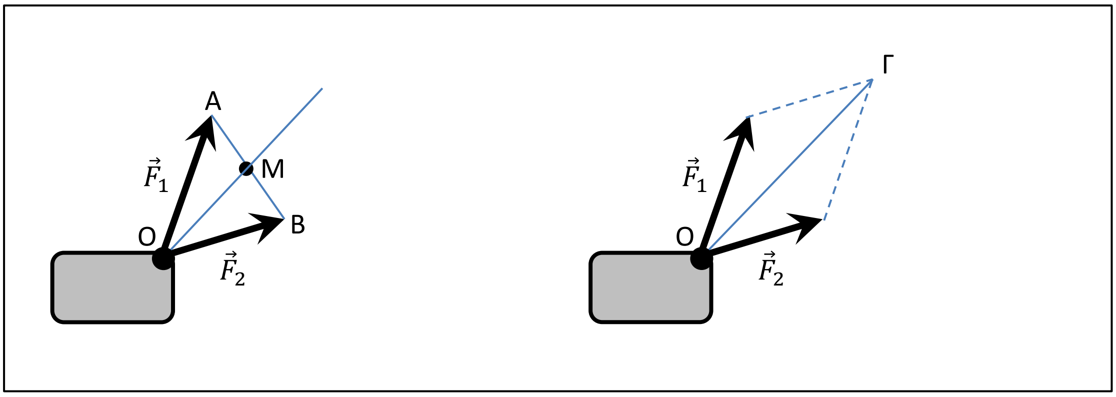
Προσοχή: Στις αριθμομηχανές τσέπης η λειτουργία "tan^{-1}" δίνει αποτελέσματα μόνο μεταξύ $\pm 90^0$. Εάν οι συντεταγμένες μας είναι στο 2^0 ή στο 3^0 τεταρτημόριο (αρνητικά x) πρέπει να προσθέσουμε 180^0 στο νούμερο της αριθμομηχανής, δείτε το επόμενο παράδειγμα.

Πρόσθεση Διανυσμάτων. Στη Φυσική μπορούμε να συνδυάσουμε δυο ή περισσότερα διανύσματα όπως π.χ. στο παρακάτω Σχήμα 2.3 όπου δρουν δυο διαφορετικές δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ στο ίδιο σώμα. Εάν δρούσε η $\vec{F}_1$ από μόνη της, τότε το σώμα θα κατευθυνόταν κατά μήκος της. Ομοίως εάν δρούσε η $\vec{F}_2$ από μόνη της, τότε το σώμα θα κατευθυνόταν κατά μήκος της. Τι γίνεται όμως όταν δρουν ταυτόχρονα και οι δυο δυνάμεις όπως στο παρακάτω σχήμα; Τότε περιμένουμε το σώμα να ακολουθήσει μια "μέση οδό", ανάμεσα στις δυο προαναφερθείσες κατευθύνσεις. Επομένως είναι σαν να δρα στο σώμα μια μόνο δύναμη η $\vec{F}$, γνωστή και ως η "συνισταμένη δύναμη" και το σώμα να ακολουθεί την κατεύθυνσή της που είναι η "μέση οδός".



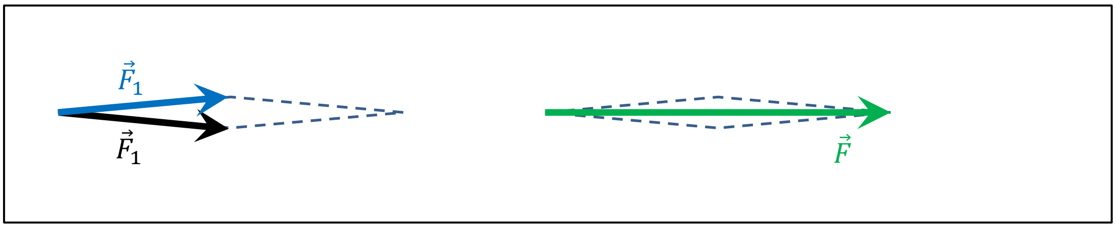
Σχήμα 2.3. Ταυτόχρονη εφαρμογή δυο μη συνευθύγραμμων δυνάμεων σε ένα σώμα.

Πως όμως βρίσκουμε την $\vec{F}$; Έστω στο παρακάτω Σχήμα 2.4 ότι το σημείο Α είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{F}_1$ και το Β το πέρας του $\vec{F}_2$ ενώ το Ο η κοινή αρχή τους. Τότε με λίγη σκέψη και συμμετρία καταλαβαίνουμε ότι η μέση κατεύθυνση μεταξύ των δυο διανυσμάτων είναι η ευθεία ΟΜ που περνάει από το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ. Εάν θυμηθούμε από τη γεωμετρία ότι οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται, τότε μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα παραλληλόγραμμο με τις δυο πλευρές να είναι τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$. Το συνιστάμενο διάνυσμα θα πρέπει να βρίσκεται επάνω στη διαγώνιο ΟΓ που διχοτομεί τα δυο διανύσματα.



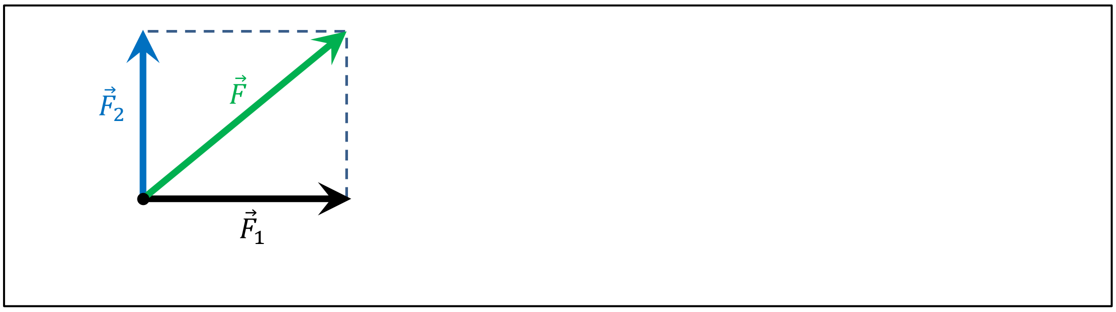
Σχήμα 2.4. Πρόσθεση διανυσμάτων.

Αυτό όμως ορίζει μόνο την κατεύθυνση του συνιστάμενου διανύσματος. Πόσο μεγάλο όμως πρέπει να είναι το διάνυσμα αυτό επάνω στην διαγώνιο του παραλληλογράμμου; Για να απαντήσουμε αυτό το ερώτημα, θα πάρουμε δυο οριακές περιπτώσεις: Στη μια περίπτωση τα δυο διανύσματα είναι πολύ κοντά το ένα στο άλλο και έχουν το ίδιο μέτρο F_1, όπως φαίνεται και στο παρακάτω Σχήμα 2.5. Τότε είναι σαν να έχουμε ταυτόχρονα δυο ανθρώπους να σπρώχνουν το ίδιο σώμα και περιμένουμε η συνισταμένη δύναμη να είναι διπλάσια, δηλαδή $F \cong 2F_1$ (το ίσον ισχύει όταν οι δυο δυνάμεις συμπίπτουν). Σε αυτή τη περίπτωση το παραλληλόγραμμο είναι πολύ επίμηκες και η μεγάλη διαγώνιος περίπου ίση με το διπλάσιο των πλευρών και άρα η συνισταμένη δύναμη πρέπει να έχει μέτρο ίσο με την διαγώνιο αυτή.



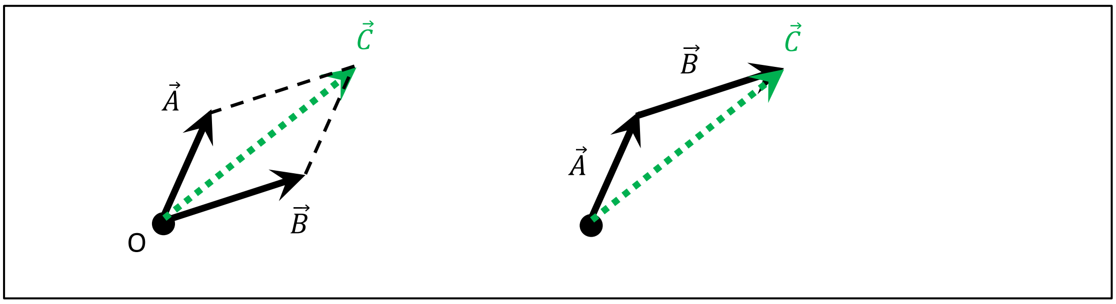
Σχήμα 2.5. Πρόσθεση δυο σχεδόν συνευθύγραμμων διανυσμάτων ίσου μέτρου.

Στην άλλη περίπτωση που φαίνεται στο Σχήμα 2.6, τα δυο διανύσματα $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ δεν έχουν το ίδιο μέτρο αλλά είναι κάθετα μεταξύ τους. Και σε αυτή τη περίπτωση περιμένουμε η συνισταμένη δύναμη να είναι η διαγώνιος του ορθογωνίου ώστε οι $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ να είναι οι συνιστώσες της $\vec{F}$.



Σχήμα 2.6. Πρόσθεση κάθετων διανυσμάτων.

Επομένως συμπεραίνουμε από τις παραπάνω δυο οριακές περιπτώσεις ότι η συνισταμένη δύναμη είναι κατά μήκος τη διαγωνίου και έχει μήκος ίσο με το μήκος της διαγωνίου. Αυτό ισχύει για όλα τα διανύσματα και είναι γνωστό ως ο "**κανόνας του παραλληλογράμμου**" σύμφωνα με τον οποίο για να βρούμε το συνιστάμενο διάνυσμα δυο διανυσμάτων με κοινή αρχή στο σημείο Ο όπως τα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ στο Σχήμα 2.7, τότε σχεδιάζουμε ένα παραλληλόγραμμο με τις δυο πλευρές να είναι τα δυο διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ και το συνιστάμενο διάνυσμα $\vec{C}$ να είναι η διαγώνιος που διχοτομεί τα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ με αρχή την κοινή αρχή τους Ο. Εφόσον τα διανύσματα μπορούν να μεταφερθούν όταν έχουμε να κάνουμε με υλικό σημείο, τότε μπορούμε να επινοήσουμε και ένα δεύτερο κανόνα για να βρούμε το συνιστάμενο διάνυσμα $\vec{C}$ γνωστός και ως ο "**κανόνας τέλους - αρχής**", σύμφωνα με τον οποίο φέρουμε την αρχή του δεύτερου διανύσματος $\vec{B}$ στο τέλος (μύτη) του πρώτου διανύσματος $\vec{A}$. Το συνιστάμενο διάνυσμα έχει αρχή την αρχή του $\vec{A}$ και πέρας το πέρας του $\vec{B}$.



Σχήμα 2.7. Κανόνας "παραλληλογράμμου" και κανόνας "τέλους - αρχής".

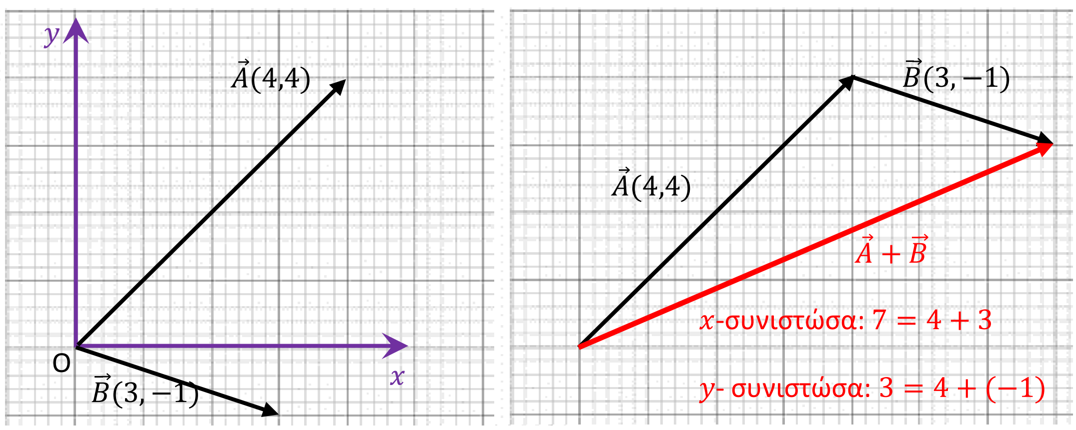
Παρόλο που στο παρόν εδάφιο θεωρήσαμε μόνο δυνάμεις ως διανύσματα για να μελετήσουμε την περίπτωση του συνδυασμού δυο ή και περισσότερων από αυτά, η παρούσα ανάλυση ισχύει για όλα τα διανύσματα όπως π.χ. η ταχύτητα που είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο. Το κλασσικό παράδειγμα είναι μια βάρκα η οποία εκτός από την ταχύτητα που έχει η ίδια λόγω προωθήσεως από τον κινητήρα της, θα έχει γενικά και μια δεύτερη ταχύτητα προς τυχαία διεύθυνση λόγω των ρευμάτων των νερών πάνω στα οποία επιπλέει. Έτσι, η βάρκα ακολουθεί μια ενδιάμεση συνιστάμενη ταχύτητα που δίνεται από τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Γενικά το συνιστάμενο διάνυσμα $\vec{C}$ δυο διανυσμάτων $\vec{A}$ και $\vec{B}$ λέμε ότι είναι το άθροισμά τους και το γράφουμε σε διανυσματική εξίσωση ως εξής:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

Γιατί θεωρούμε αυτό τον συνδυασμό διανυσμάτων ως άθροιση; Επειδή όπως θα δούμε παρακάτω, οι συνιστώσες του $\vec{C}$ είναι ένα απλό αριθμητικό άθροισμα των συνιστωσών των διανυσμάτων από τα οποία αποτελείται. Δηλαδή στη διανυσματική άθροιση, προσθέτουμε ανεξάρτητα τις x και y συνιστώσες των διανυσμάτων του αθροίσματος για να βρούμε τις συνιστώσες C_x και C_y του συνιστάμενου διανύσματος.

$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} => C_x = A_x + B_x \ \& \ C_y = A_y + B_y$	ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ	(2.4)

Ένα απλό παράδειγμα θα μας πείσει ότι ο "κανόνας τέλους - αρχής", όντως μας δίνει τις παραπάνω εξισώσεις αθροίσματος. Στο παρακάτω Σχήμα 2.8 στα αριστερά δίνονται δυο διανύσματα το $\vec{A}(4{,}4)$ και το $\vec{B}(3,-1)$ στην αρχική τους θέση πριν να μεταφερθούν. Στο κάτω δεξιά μέρος του σχήματος τα διανύσματα μεταφέρονται ώστε το πέρας του $\vec{A}$ να συμπίπτει με την αρχή του $\vec{B}$. Μπορούμε εύκολα να δούμε στο μιλιμετρέ χαρτί (κάθε εκατοστό αντιστοιχεί σε μια μονάδα) ότι οι συντεταγμένες του αθροίσματος $\vec{A} + \vec{B}$ ισούνται με $4 + 3 = 7$ και $4 + (-1) = 3$, όπως ακριβώς προβλέπουν οι Εξισώσεις 2.4.



Σχήμα 2.8. Απόδειξη των Εξ. 2.4 με τη βοήθεια ενός απλού παραδείγματος.

Είναι κοινό λάθος από φοιτητές είναι να προσθέτουν τα μέτρα των $\vec{A}$ και $\vec{B}$ για να βρουν το μέτρο του $\vec{C}$ το οποίο γενικά δεν είναι σωστό επειδή ισχύει μόνο για συγγραμμικά διανύσματα.

Παράδειγμα 2.2

Να βρεθεί το μέτρο και η κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ όπου $\vec{A} = (-3{,}4)$ και $\vec{B} = (1, -1)$.

Λύση: Από την Εξ. 2.4 βρίσκουμε το $\vec{C}$ αθροίζοντας τις συνιστώσες των $\vec{A}$ και $\vec{B}$:

$$C_x = -3 + 1 = -2$$

$$C_y = 4 - 1 = 3$$

Ακολούθως χρησιμοποιούμε τις Εξισώσεις 2.1 και 2.2:

$$\left|\vec{C}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = 3.61$$

$$\varphi = tan^{-1}\left(\frac{3}{-2}\right) = 123.7^0$$

Σημείωση: Όπως προαναφέρθηκε, στις αριθμομηχανές τσέπης η λειτουργία "tan^{-1}" δίνει αποτελέσματα μόνο μεταξύ $\pm 90^0$. Στο παραπάνω παράδειγμα η αριθμομηχανή έδωσε ως αποτέλεσμα -56.3^0 το οποίο προφανώς είναι λάθος αφού το πέρας του διανύσματος με συντεταγμένες $(-2{,}3)$ βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο (αρνητικό x και θετικό y) και όχι στο 4ο που ανήκει αυτή το αποτέλεσμα. Η αριθμομηχανή δεν μπορεί να ξεχωρίσει μεταξύ των δυο σημείων $(-2{,}3)$ και $(2, -3)$ που έχουν την ίδια εφαπτομένη. Έτσι προσθέσαμε 180^0 στο νούμερο της αριθμομηχανής για να είμαστε στο σωστό τεταρτημόριο[2].

Αντίθετο Διάνυσμα. Για κάθε διάνυσμα $\vec{A} = (A_x, A_y)$ ορίζεται το αντίθετό του $-\vec{A}$ με συντεταγμένες $(-A_x, -A_y)$ το οποίο όταν προστεθεί στο $\vec{A}$ δίνει το μηδενικό διάνυσμα (0,0). Το διάνυσμα $-\vec{A}$ έχει το ίδιο μέτρο με το $\vec{A}$ αλλά αντίθετη φορά. Διανυσματικά γράφουμε

$$\vec{A} + (-\vec{A}) = 0$$

Με την βοήθεια του αντίθετου διανύσματος, μπορούμε να ορίσουμε την αφαίρεση δυο διανυσμάτων ως την άθροιση με το αντίθετο διάνυσμα, δηλαδή

$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$	ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ	(2.5)

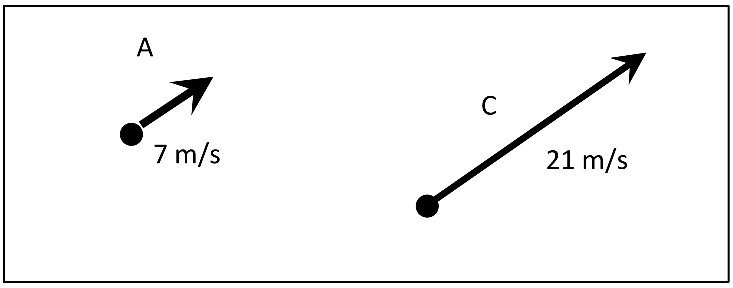
[2] Ο λόγος αυτού του περιορισμού στις αριθμομηχανές είναι ότι η συνάρτηση $tan^{-1}(x)$ είναι μιας μεταβλητής οπότε παίρνοντας λόγους όπως οι $3/(-2)$ ή $(-3)/2$ χάνεται η πληροφορία των προσήμων ενώ αντιθέτως στα υπολογιστικά πακέτα χρησιμοποιείται η συνάρτηση $tan^{-1}(x, y)$ δυο μεταβλητών η οποία δίνει το σωστό αποτέλεσμα σε όλες τις περιπτώσεις

Όπως και με την άθροιση, οι συνιστώσες της αφαίρεσης δίνονται από ένα πολύ απλό κανόνα:

Στη διανυσματική αφαίρεση, αφαιρούμε ανεξάρτητα τις x και y συνιστώσες των διανυσμάτων της διαφοράς

$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} => C_x = A_x - B_x \ \& \ C_y = A_y - B_y$	ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΦΑΙΡΕΣΗ	(2.6)

Πολλαπλασιασμός Διανύσματος με Αριθμό. Μπορούμε επίσης να πολλαπλασιάσουμε ένα διάνυσμα $\vec{A}$ με ένα αριθμό β. Το νέο διάνυσμα $\vec{C} = \beta\vec{A}$ έχει την ίδια ακριβώς κατεύθυνση όπως το $\vec{A}$ αλλά το μέτρο του είναι ίσο με β-φορές το μέτρο του $\vec{A}$. Για παράδειγμα στο παρακάτω Σχήμα 2.9 δείχνει τον άνεμο σε δυο διαφορετικές ώρες της ημέρας. Προφανώς η κατεύθυνση του ανέμου δεν άλλαξε, μεταβλήθηκε όμως η έντασή του. Συγκρίνοντας τα δυο μέτρα μπορούμε να πούμε ότι $\vec{C} = 3\vec{A}$ δηλαδή το διάνυσμα $\vec{C}$ είναι ίσο με τρεις φορές το διάνυσμα $\vec{A}$.



Σχήμα 2.9. Παράδειγμα πολλαπλασιασμού διανύσματος επί αριθμό .

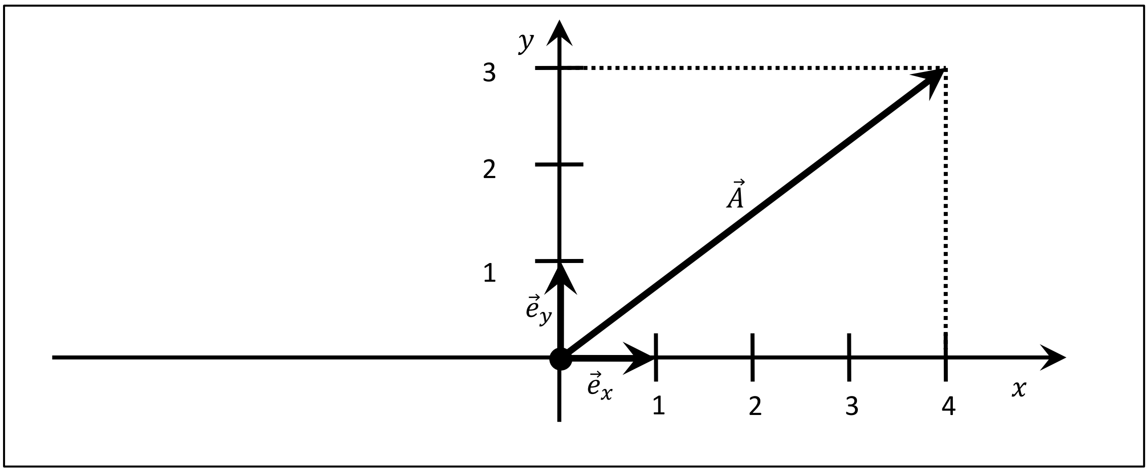
Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι για να είναι ίδια η κατεύθυνση ενός διανύσματος $\vec{A}$ και ενός πολλαπλάσιού του $\vec{C} = \beta\vec{A}$, πρέπει και οι συντεταγμένες τους να έχουν την ίδια πολλαπλασιαστική αναλογία, δηλαδή

$\vec{C} = \beta\vec{A} => C_x = \beta A_x \ \& \ C_y = \beta A_y$	ΠΟΛ/ΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ	(2.7)

Όταν πολλαπλασιάζουμε ένα διάνυσμα με ένα αριθμό, τότε πολλαπλασιάζονται και οι συνιστώσες του με τον ίδιο αριθμό.

Μπορούμε επίσης να πολλαπλασιάσουμε ένα διάνυσμα με ένα αρνητικό αριθμό, για παράδειγμα $\vec{C} = -\beta\vec{A}$ όπου $\beta > 0$. Τότε με τη βοήθεια του αντίθετου διανύσματος $-\vec{A}$, η παραπάνω σχέση γράφεται $\vec{C} = \beta(-\vec{A})$ και επομένως το προκύπτουν διάνυσμα $\vec{C}$ είναι κατά μήκος του $-\vec{A}$ και β φορές μεγαλύτερο.

<u>Μοναδιαία Διανύσματα</u>. Ιδιαίτερη σημασία στη Φυσική έχουν διανύσματα τα οποία έχουν μέτρο μονάδα και βρίσκονται επάνω στους άξονες των συντεταγμένων. Π.χ. στο παρακάτω Σχήμα 2.10 το $\vec{e}_x = (1{,}0)$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τον άξονα-x και το $\vec{e}_y = (0{,}1)$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τον άξονα-y.



Σχήμα 2.10. Μοναδιαία διανύσματα $\vec{e}_x$ και $\vec{e}_y$.

Η σημασία των μοναδιαίων διανυσμάτων είναι ότι όλα τα άλλα διανύσματα μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει αυτών. Π.χ. κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της άθροισης και του πολλαπλασιασμού των διανυσμάτων, το τυχαίο διάνυσμα $\vec{A} = (4{,}3)$ μπορεί να γραφεί ως

$$\vec{A} = (4{,}3) = (4{,}0) + (0{,}3) = 4\times(1{,}0) + 3\times(0{,}1) = 4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε αυτό τον κανόνα και να πούμε ότι κάθε διάνυσμα $\vec{A}$ με συνιστώσες A_x και A_y μπορεί να γραφεί ως

$\vec{A} = \left(A_x, A_y\right) = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y$	ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕ ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ	(2.8)

Σημείωση: Σε πολλά βιβλία, τα μοναδιαία διανύσματα το $\vec{e}_x$και $\vec{e}_y$ συμβολίζονται ως $\vec{\imath}$ και $\vec{\jmath}$.

<u>Παράδειγμα 2.3</u>

Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{A} = 6\vec{e}_x - 8\vec{e}_y$

<u>Λύση</u>: Σύμφωνα με την Εξ. 2.8, οι συνιστώσες του διανύσματος είναι οι 6 και -8 επομένως το μέτρο του διανύσματος είναι το

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$$

Εσωτερικό Γινόμενο. Σε πολλές εφαρμογές στη Φυσική που έχουν να κάνουν με δυο διανυσματικές ποσότητες $\vec{A}$ και $\vec{B}$, εμφανίζεται συχνά ο όρος $|\vec{A}||\vec{B}|cos\theta$ όπου θ είναι η μεταξύ τους γωνία. Αυτός ο όρος είναι αριθμός και όχι διάνυσμα και οι Φυσικοί του δίνουν ένα ξεχωριστό όνομα, το ονομάζουν "**εσωτερικό γινόμενο**" και το συμβολίζουν ως $\vec{A}\cdot\vec{B}$, δηλαδή με μια έντονη τελεία μεταξύ των δυο διανυσμάτων. Με άλλα λόγια, εξ' ορισμού

$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|cos\theta$	ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ	(2.9)

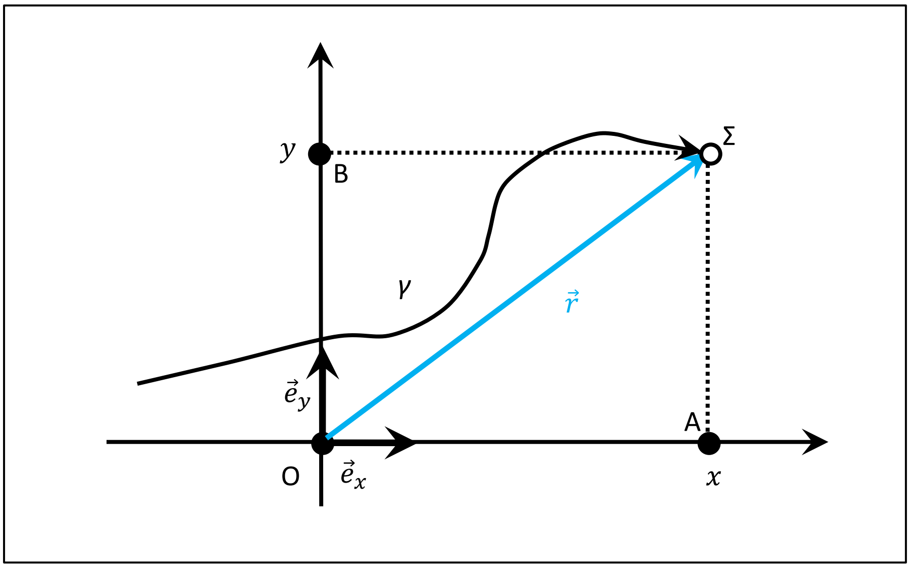
Εάν είναι γνωστές οι συντεταγμένες A_x και A_y του $\vec{A}$, καθώς και B_x και B_y του $\vec{B}$, τότε αποδεικνύεται από τα Μαθηματικά ότι το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να γραφτεί και ως:

$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y$	ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ	(2.10)

Από τις δυο τελευταίες εξισώσεις μπορούμε πολύ εύκολα να υπολογίσουμε την γωνία θ μεταξύ δυο διανυσμάτων.

Διανύσματα Θέσης, Ταχύτητας και Επιτάχυνση στο επίπεδο

Τώρα που ολοκληρώθηκε η επανάληψη στα διανύσματα, έχουμε στη διάθεσή μας όλα τα απαραίτητα εφόδια για να μελετήσουμε την κίνηση στις δυο διαστάσεις. Όπως και στο Κεφ. 1, έτσι και εδώ θα θεωρήσουμε ως σώμα ένα υλικό σημείο όπως το Σ στο Σχήμα 2.11 το οποίο κινείται στο επίπεδο και διαγράφει μια τυχαία τροχιά γ. Έστω ότι την χρονική στιγμή t το σημείο Σ έχει συντεταγμένες x και y.



Σχήμα 2.11. Κίνηση υλικού σημείου στις 2 διαστάσεις.

Το διάνυσμα $\vec{r}$ που συνδέει την αρχή των αξόνων Ο με το σημείο Σ ονομάζεται “διάνυσμα θέσης” ή “επιβατική ακτίνα” και φυσικά έχει ως συνιστώσες τις συντεταγμένες του Σ δηλαδή τις x και y.

$\vec{r} = (x, y) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$	ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΘΕΣΗΣ	(2.11)

Θεωρήστε τώρα το παρακάτω Σχήμα 2.12 όπου το υλικό σημείο βρίσκεται την χρονική στιγμή t στη θέση Σ με διάνυσμα θέσης $\vec{r} = (x, y)$ και λίγο αργότερα σε χρόνο $t' = t + dt$ έχει μετακινηθεί στη θέση Σ’ με διάνυσμα θέσης $\vec{r}' = (x', y')$. Κατά τη διάρκεια του απειροστού χρόνου dt το υλικό σημείο μετακινείται κατά $d\vec{r}$ το οποίο είναι γνωστό και ως "**διάνυσμα στοιχειώδους μετατόπισης**". Αφού τα $\vec{r}$ και $d\vec{r}$ είναι σε σχηματισμό "τέλους-αρχής", τότε από τη διανυσματική άθροιση γνωρίζουμε ότι ισχύει $\vec{r}' = \vec{r} + d\vec{r}$ και άρα

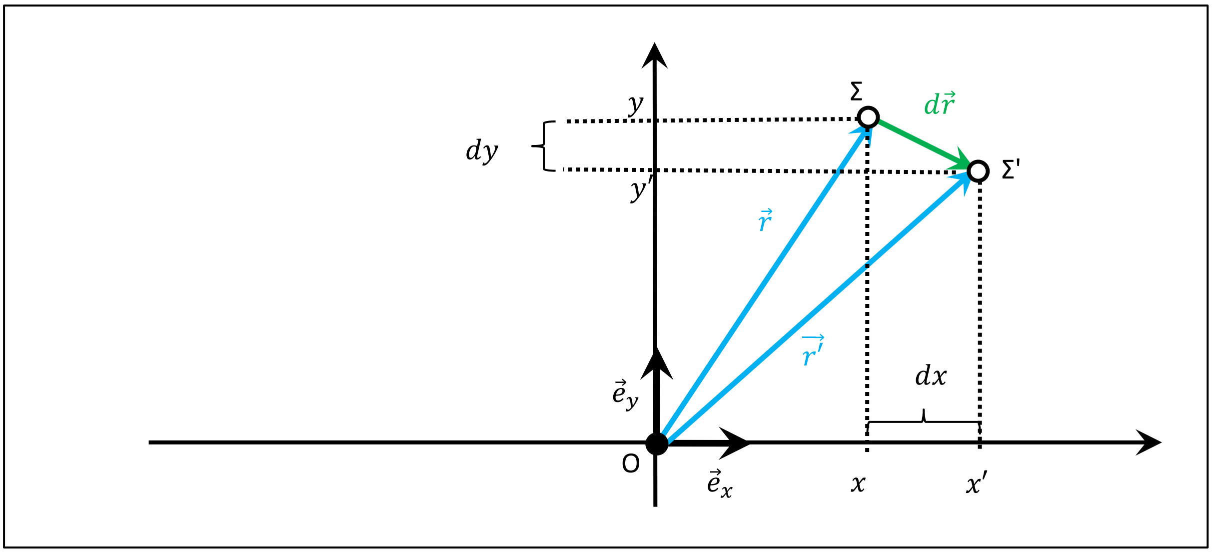
$d\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$	ΑΠΕΙΡΟΣΤΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ	(2.12)

Σε χρόνο dt το κινητό καλύπτει την απόσταση ΣΣ’ που είναι ίση με το dr που είναι το μέτρο του διανύσματος $d\vec{r}$. Σε αναλογία με την κίνηση στη μια διάσταση, περιμένουμε η ταχύτητα του κινητού ως μέτρο να ισούται με

$v = \dfrac{dr}{dt}$	ΜΕΤΡΟ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ	(2.13)

Όμως στις δυο διαστάσεις το μέτρο δεν είναι αρκετό αλλά απαιτείται και κατεύθυνση, π.χ. μια μετατόπιση dr μπορεί να είναι πάνω, κάτω, δεξιά ή αριστερά κτλ. Επομένως για να περιγράψουμε τόσο το μέτρο όσο και την στιγμιαία κατεύθυνση του κινητού, ορίζουμε την "**διανυσματική ταχύτητα**" $\vec{v}$ ως

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$	ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ	(2.14)



Σχήμα 2.12. Στοιχειώδης μετατόπιση υλικού σημείου στις 2 διαστάσεις.

Ποιες όμως είναι οι συνιστώσες v_x κα v_y του $\vec{v}$; Σύμφωνα με την Εξ. 2.12 οι συντεταγμένες του $d\vec{r}$ ισούνται με $dx = x' - x$ και $dy = y' - y$ και έτσι έχουμε:

$v_x = \dfrac{dx}{dt} = x'(t)$	ΤΑΧΥΤΗΤΑ Χ-ΣΥΝΙΣΤΩΣΑ	(2.15α)
$v_y = \dfrac{dy}{dt} = y'(t)$	ΤΑΧΥΤΗΤΑ Υ-ΣΥΝΙΣΤΩΣΑ	(2.15β)

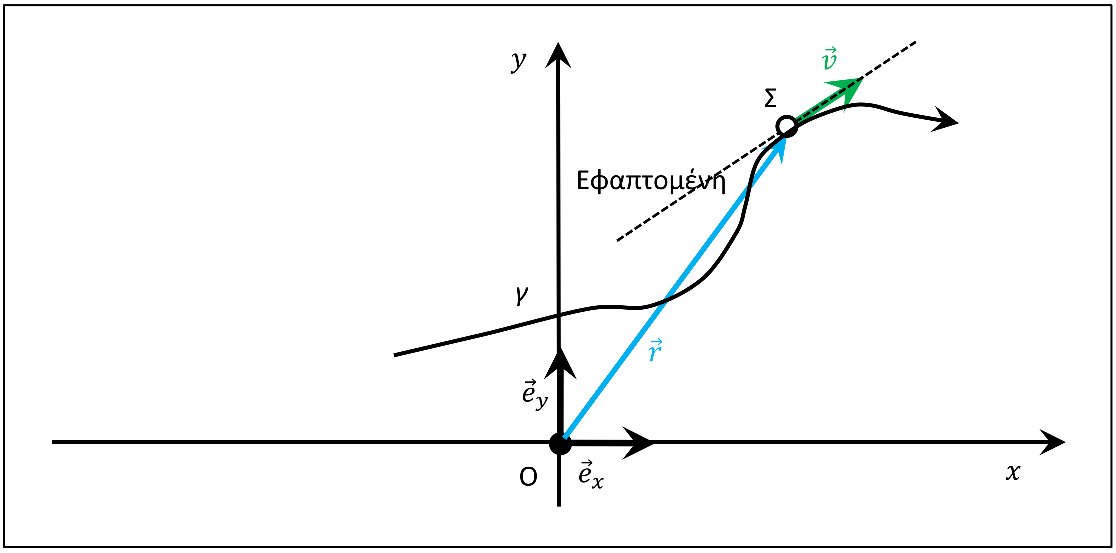
Ποια είναι η φυσική σημασία των v_x κα v_y; Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.11, το υλικό σημείο Σ έχει δυο προβολές στους άξονες συντεταγμένων, τα σημεία Α και Β τα οποία ακολουθούν το Σ εκτελώντας ευθύγραμμη κίνηση το καθένα με ταχύτητες v_x κα v_y αντίστοιχα. Από τις v_x κα v_y, μπορούμε να βρούμε το μέτρο της ταχύτητας ως

$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$	ΜΕΤΡΟ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ	(2.16)

και την γωνία της $\vec{v}$ ως

$\varphi = tan^{-1}\left(\dfrac{v_y}{v_x}\right)$	ΓΩΝΙΑ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ	(2.17)

Όπως φαίνεται και στο παρακάτω Σχήμα 2.13, το διάνυσμα της ταχύτητας είναι παντού εφαπτόμενο στην τροχιά που διαγράφει το κινητό.



Σχήμα 2.13. Εφαπτομένη της τροχιάς ενός υλικού σημείου στις 2 διαστάσεις.

Με τη βοήθεια των μοναδιαίων διανυσμάτων, η διανυσματική ταχύτητα γράφεται και ως

$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y$	ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ	(2.18)

Όπως και στην κίνηση στη μια διάσταση, ορίζουμε την επιτάχυνση ως

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ	(2.19)

Παραγωγίζοντας την Εξ. 2.18, οδηγεί στην

$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y$	ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ	(2.20)

όπου a_x και a_y είναι οι στιγμιαίες επιταχύνσεις των προβολών σε κάθε άξονα

$\alpha_x = \frac{dv_x}{dt} = v_x'(t)$ & $\alpha_y = \frac{dv_y}{dt} = v_y'(t)$	ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ	(2.21)

<u>Παράδειγμα 2.4</u>

Ένα υλικό σημείο κινείται έτσι ώστε οι συντεταγμένες του συναρτήσει του χρόνου να δίνονται από τις εκφράσεις $x(t) = b + ct$ και $y(t) = kt$ όπου $b = 3\ m$, $c = 0.6\ m/s$ και $k = 1.2\ m/s$. Να βρεθούν (α) Το διάνυσμα και το μέτρο της ταχύτητας του κινητού για κάθε χρονική στιγμή

t (β) Το διάνυσμα και το μέτρο της επιτάχυνσης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t και (γ) Το είδος της τροχιάς που διαγράφει το κινητό.

Λύση:

(α) Από τις Εξισώσεις 2.15α και 2.15β έχουμε

$$v_x = x'(t) = c = 0.6\ m/s$$

$$v_y = y'(t) = k = 1.2\ m/s$$

Δηλαδή το διάνυσμα της ταχύτητας είναι το $\vec{v} = (0.6, 1.2)\ m/s$ και από την Εξ. 2.16 το μέτρο της είναι ίσο με

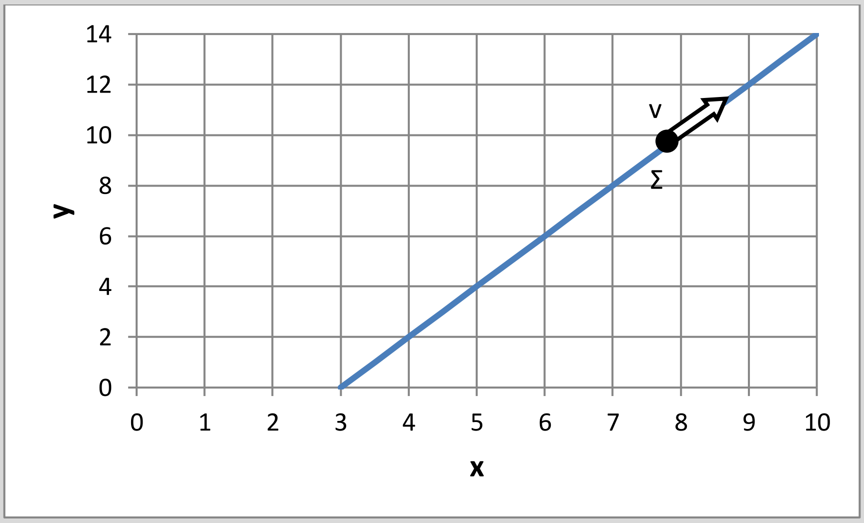
$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{0.6^2 + 1.2^2} = 1.34\ m/s$$

(β) Αφού οι v_x και v_y είναι σταθερές, τότε η παραγώγιση τους δίνει μηδέν. Έτσι από την Εξ. 2.21 έχουμε $a_x = a_y = 0$. Άρα το διάνυσμα της επιτάχυνσης είναι το μηδενικό $(0,0)$ και έχει φυσικά μέτρο 0.

(γ) Από τις $x(t) = b + ct$ και $y(t) = kt$ απαλείφοντας το t έχουμε

$$x = b + c\frac{y}{k} => y = \frac{k}{c}(x - b) => y = 2(x - 3)$$

Αυτή είναι η εξίσωση μιας ευθείας όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα. Αυτή η τροχιά αναμένεται εφόσον όπως είδαμε παραπάνω, οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι σταθερές και άρα η ταχύτητα είναι ένα σταθερό διάνυσμα. Στην ουσία δηλαδή το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.



Παράδειγμα 2.5

Στο παραπάνω παράδειγμα, να δειχθεί ότι η κλίση της ευθείας σε μοίρες είναι ίση με την γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας με τον άξονα x.

Λύση: Αφού η εξίσωση της παραπάνω ευθείας είναι $y = 2(x - 3)$ τότε η κλίση είναι ίση με 2 δηλαδή $tan\theta = 2 => \theta = 63.4^0$. Από την άλλη το διάνυσμα της ταχύτητας είδαμε ότι είναι το $\vec{v} = (0.6, 1.2)$ και άρα από την Εξ. (2) σχηματίζει γωνία (ως προς τον x-άξονα) ίση με:

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = 63.4^0$$

Παράδειγμα 2.6

Ένα υλικό σημείο Σ εκτελεί αρμονική ταλάντωση πλάτους x_m και κυκλικής συχνότητας ω ως προς x (δείτε Εξ. 1.21) και ελεύθερη πτώση ως προς y. Εάν την χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και η κατακόρυφη ταχύτητά του είναι μηδέν, να βρεθούν (α) Οι συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας του κινητού κάθε χρονική στιγμή t, (β) Οι συνιστώσες του διανύσματος της επιτάχυνσης του κινητού κάθε χρονική στιγμή t και (γ) Η τροχιά που διαγράφει το κινητό στην περίπτωση που $x_m = 0.2\ m$ και $\omega = 3.14\ rad/s$. Έστω $g = 10\ ms^{-2}$ για ευκολία.

Λύση:

(α) Από τις Εξ. 1.19 η αρμονική ταλάντωση περιγράφεται γενικά από τη σχέση

$$x = x_m sin(\omega t + \varphi)$$

Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη $x = 0$ στο $t = 0$ παίρνουμε $0 = x_m sin(0 + \varphi)$ οπότε $\varphi = 0$. Επομένως $x = x_m sin(\omega t)$. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε για την οριζόντια ταχύτητα

$$v_x = \omega x_m cos(\omega t)$$

Ως προς y, το κινητό κινείται υπό την επίδραση της βαρύτητας και άρα με σταθερή επιτάχυνση $a_y = -g$. Από την Εξ. 1.16 η απομάκρυνση του δίνεται από την

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

όπου τα y_0 και v_0 είναι η αρχική απομάκρυνση και αρχική ταχύτητα αντίστοιχα. Από τις αρχικές συνθήκες παίρνουμε $y_0 = 0$ και $v_0 = 0$ και επομένως $y = -1/2gt^2$. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε για την κατακόρυφη ταχύτητα

$$v_y = -gt$$

(β) Παραγωγίζοντας τις συνιστώσες της ταχύτητας παίρνουμε:

$$a_x = -\omega^2 x_m sin(\omega t)$$

και

$$a_y = -g$$

όπως αναμένεται (για την a_y).

(γ) Από την $y = -1/2gt^2$ μπορούμε να εκφράσουμε τον χρόνο t συναρτήσει του y

$$t = \sqrt{-2y/g}$$

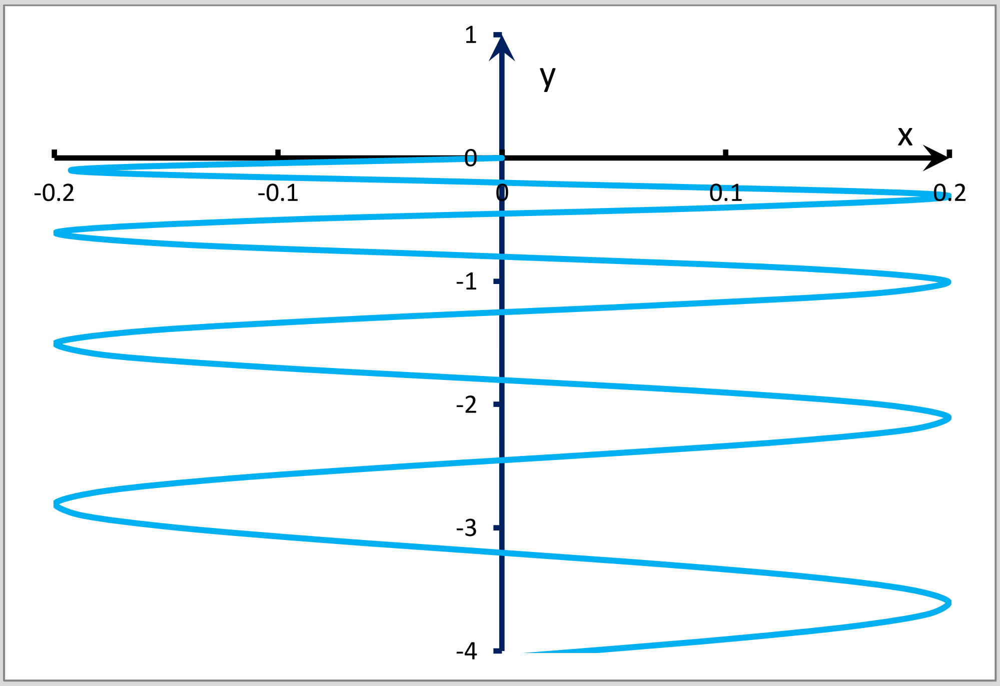
Το μείον στο ριζικό δεν είναι πρόβλημα επειδή το y είναι αρνητικό αφού το κινητό ξεκίνησε από το $(0,0)$ και εκτέλεσε ελεύθερη πτώση προς τα κάτω. Απαλείφοντας τον χρόνο στο x παίρνουμε

$$x = x_m sin(\omega\sqrt{-2y/g})$$

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα

$$x = 0.2sin(3.14\sqrt{-y/5})$$

Μπορούμε να λύσουμε την παραπάνω σχέση ως προς y αλλά το αποτέλεσμα είναι σχετικά πολύπλοκο. Είναι πιο εύκολο να θεωρήσουμε το y ως την ανεξάρτητη μεταβλητή, να κάνουμε τη γραφική παράσταση του x συναρτήσει του y και μετά να αναστρέψουμε τους άξονες. Με τη βοήθεια υπολογιστικών πακέτων όπως π.χ. το Excel, η γραφική παράσταση έχει ως εξής:



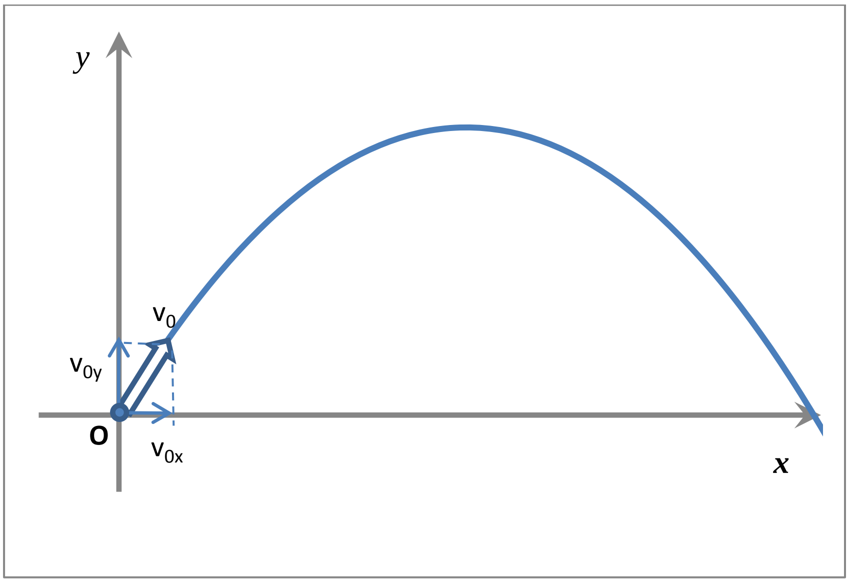
Στο γράφημα φαίνονται καθαρά η ταλάντωση του κινητού ως προς x αλλά και η προς τα κάτω επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας.

Εφαρμογή: Βολές

Η βολή είναι μια από τις πιο αντιπροσωπευτικές κινήσεις στις δυο διαστάσεις μια που την συναντάμε σε καθημερινή βάση, π.χ. όταν παιδιά εκτοξεύουν μικρές πέτρες ή όταν πετάμε ένα μικροαντικείμενο στον κάλαθο σκουπιδιών. Η τροχιά μιας τέτοιας βολής φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 2.14. Στην ιδανική βολή, στο κινητό δρα μόνο η δύναμη της βαρύτητας και τυπικά το σώμα εκτοξεύεται από την αρχή των αξόνων με μια αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$ με συντεταγμένες v_{0x} και v_{0y}. Επειδή υπάρχει δύναμη μόνο στον κατακόρυφο άξονα, η οριζόντια κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή και η ταχύτητα είναι η ίδια κατά τον άξονα x, δηλαδή σε όλες τις χρονικές στιγμές η ταχύτητα είναι σταθερή και ίση με $v_x(t) = v_{0x}$. Ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$x(t) = v_{0x}t + x_0$$

όπου x_0 η αρχική απομάκρυνση. Εάν το κινητό ξεκινάει από την αρχή των συντεταγμένων, όπως στο παρακάτω σχήμα, τότε $x_0 = 0$.



Σχήμα 2.14. Τροχιά βολής ενός υλικού σημείου μέσα σε βαρυτικό πεδίο.

Αντιθέτως στον y-άξονα υπάρχει σταθερή επιτάχυνση προς τα κάτω $a_y = -g$. Ολοκληρώνοντας, βρίσκουμε για την ταχύτητα $v_y(t) = -gt + c$, όπου c η σταθερά ολοκλήρωσης. Θέτοντας $t = 0$ παίρνουμε $c = v_y(0)$ δηλαδή το c ισούται με τη y-συνιστώσα της αρχικής ταχύτητας, v_{0y}. Έτσι

$$v_y(t) = v_{0y} - gt$$

Ολοκληρώνοντας ακόμα μια φορά παίρνουμε

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

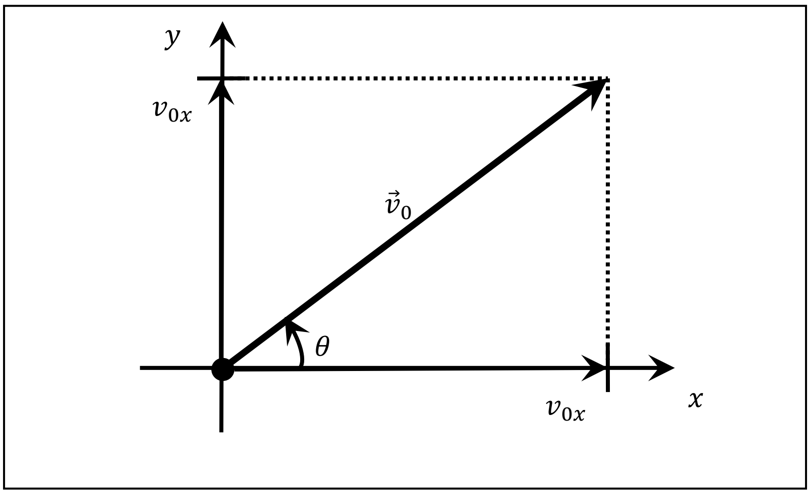
όπου y_0 η αρχική απομάκρυνση. Εάν το κινητό ξεκινάει από την αρχή των συντεταγμένων, όπως στο παραπάνω σχήμα, τότε $y_0 = 0$. Συνοψίζοντας:

	Άξονας x	**Άξονας y**
Κίνηση	Ομαλή	Ομαλά επιταχυνόμενη
Επιτάχυνση $\vec{a}$	0	$-g$
Αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$	v_{0x}	v_{0y}
Ταχύτητα $\vec{v}(t)$	$v_x = v_{0x}$	$v_y = v_{0y} - gt$
Μετατόπιση	$x(t) = v_{0x}t$	$y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$

Πίνακας 2.1: Εξισώσεις βολής

Οι παραπάνω εκφράσεις εμπεριέχουν τις συνιστώσες της αρχικής ταχύτητας v_{0x} και v_{0y} τις οποίες μπορούμε εύκολα να βρούμε από την αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$ εάν γνωρίζουμε το μέτρο της v_0 και την αρχική γωνία θ όπως στο παρακάτω Σχήμα 2.15. Με τη βοήθεια της τριγωνομετρίας μπορούμε εύκολα να δούμε ότι:

$v_{0x} = v_0 cos\theta \;\;\&\;\; v_{0y} = v_0 sin\theta$	ΑΡΧΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ	(2.22)



Σχήμα 2.15. Αρχική ταχύτητα εκτόξευσης κατά τη βολή μέσα σε βαρυτικό πεδίο.

Παράδειγμα 2.7

Μικρή πέτρα εκτοξεύεται από το έδαφος με αρχική ταχύτητα $10\ m/s$ και γωνία 30^0 ως προς τον ορίζοντα. Να βρεθούν: (α) Ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει η πέτρα στο υψηλότερο σημείο, (β) Το ύψος του σημείου αυτού (σε σχέση με το σημείο εκτόξευσης), (γ) Το μέτρο της ταχύτητας στο σημείο αυτό. Έστω $g = 10\ ms^{-2}$ για ευκολία.

Λύση:

(α) Από τις Εξ. (22) έχουμε

$$v_{0x} = |\vec{v}_0| cos\theta = 10\, cos(30^0) = 8.66\, m/s$$

$$v_{0y} = |\vec{v}_0| sin\theta = 10\, sin(30^0) = 5.00\, m/s$$

Στο υψηλότερο σημείο η πέτρα σταματάει στιγμιαία την κατακόρυφη κίνησή της επομένως $v_y = 0$. Από τον Πίνακα 1 έχουμε $v_y = v_{0y} - gt$. Θέτοντας ίσο με μηδέν και λύνοντας ως προς τον χρόνο

$$t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{5}{10} = 0.5\, s$$

(β) Από τον Πίνακα 2.1 έχουμε $y(t) = v_{0y}t - 1/2gt^2$. Αντικαθιστώντας τον χρόνο του παραπάνω υπο-ερωτήματος έχουμε

$$y(t) = 5.00 \times 0.5 - 1/2 \times 10 \times 0.5^2 = 1.25\, m$$

(γ) Όπως προαναφέρθηκε, $v_y = 0$. Από τον Πίνακα 2.1 έχουμε $v_x = v_{0x}$ όλες τις χρονικές στιγμές, δηλαδή $v_x = 8.66\, m/s$. Επομένως το μέτρο της ταχύτητας ισούται με

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{{v_x}^2 + 0} = 8.66\, m/s$$

Η κατεύθυνση της ταχύτητας στο υψηλότερο σημείο είναι οριζόντια αφού δεν υπάρχει κατακόρυφη συνιστώσα.

Παράδειγμα 2.8

Για την ίδια πέτρα όπως στο προηγούμενο παράδειγμα αλλά για το σημείο όπου η πέτρα προσκρούει στο έδαφος, να βρεθούν: (α) Ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει η πέτρα στο σημείο αυτό, (β) η οριζόντια απόσταση εν σχέση με το σημείο εκτόξευσης (αυτή η απόσταση είναι γνωστή και ως “βεληνεκές”), (γ) το μέτρο της ταχύτητας στο σημείο αυτό. Υποθέστε ότι το έδαφος είναι τελείως λείο και οριζόντιο.

Λύση:

(α) Όπως είδαμε, η αρχική ταχύτητα έχει συνιστώσες $v_{0x} = 8.66\, m/s$ και $v_{0y} = 5.00\, m/s$. Η πέτρα ξεκινάει από μηδενικό ύψος και όταν ξαναεπιστρέφει στο έδαφος, το ύψος της γίνεται και πάλι μηδέν. Από τον Πίνακα 2.1 έχουμε

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = t(v_{0y} - \frac{1}{2}gt)$$

Θέτοντας $y = 0$ παίρνουμε είτε $t = 0$ που είναι ο αρχικός χρόνος ή

$$v_{0y} - \frac{1}{2}gt = 0 => t = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2 \times 5}{10} = 1\, s$$

που είναι ο επιθυμητός χρόνος.

(β) Από τον Πίνακα 2.1 έχουμε

$$x = v_{0x}t = 8.66 \times 1 = 8.66\, m$$

(γ) Στις βολές η οριζόντια ταχύτητα είναι σταθερή $v_x = v_{0x} = 8.66\, m/s$. Από τον Πίνακα 2.1 έχουμε $v_y = v_{0y} - gt = 5.00 - 10\times 1 = -5.00\, m/s$. Το αρνητικό πρόσημο είναι φυσικό επειδή η πέτρα κινείται προς τα κάτω όταν προσκρούει στο έδαφος. Επομένως το μέτρο της ταχύτητας λίγο πριν την πρόσκρουση ισούται με

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{8.66^2 + (-5)^2} = 10.0\, m/s$$

Δηλαδή η σφαίρα επιστρέφει στο έδαφος με την ίδια ταχύτητα με την οποία εκτοξεύτηκε. Αυτό είναι συνέπεια της αρχής της διατήρησης της ενέργειας όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο.

Παράδειγμα 2.9

Για την πέτρα των παραπάνω παραδειγμάτων, να γραφούν σε διανυσματική μορφή (α) η επιτάχυνση κατά την διάρκεια της τροχιάς, (β) η ταχύτητα στο ψηλότερο σημείο και (γ) η ταχύτητα και η επιβατική ακτίνα όταν η πέτρα προσκρούει στο έδαφος. Οι απαντήσεις να γραφούν με την βοήθεια των μοναδιαίων διανυσμάτων

Λύση:

(α) Στην ιδανική βολή δεν υπάρχει οριζόντια συνιστώσα της επιτάχυνσης και άρα $a_x = 0$, ενώ στον κατακόρυφο άξονα $a_y = -g$. Επομένως το διάνυσμα της επιτάχυνσης είναι το

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y = -g\vec{e}_y$$

(β) Όπως είδαμε, στο υψηλότερο σημείο δεν υπάρχει κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας, δηλαδή $v_y = 0$, ενώ η οριζόντια είναι πάντα σταθερή και ίση με $v_x = 8.66\, m/s$. Επομένως το διάνυσμα της ταχύτητας στο υψηλότερο σημείο είναι το

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y = 8.66\vec{e}_x\, m/s$$

γ) Αντιθέτως, στο σημείο που προσκρούει η πέτρα είδαμε ότι και οι δυο συνιστώσες της ταχύτητας είναι διάφορες του μηδενός με τιμές $v_x = 8.66\, m/s$ και $v_y = -10\, m/s$. Επομένως το διάνυσμα της ταχύτητας σε αυτό το σημείο είναι το

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y = 8.66\vec{e}_x - 10.0\vec{e}_y\, m/s$$

Οι συντεταγμένες της πέτρας σε αυτό το σημείο είναι $x = 8.66\, m$ και $y = 0$ επομένως η επιβατική ακτίνα είναι ίση με

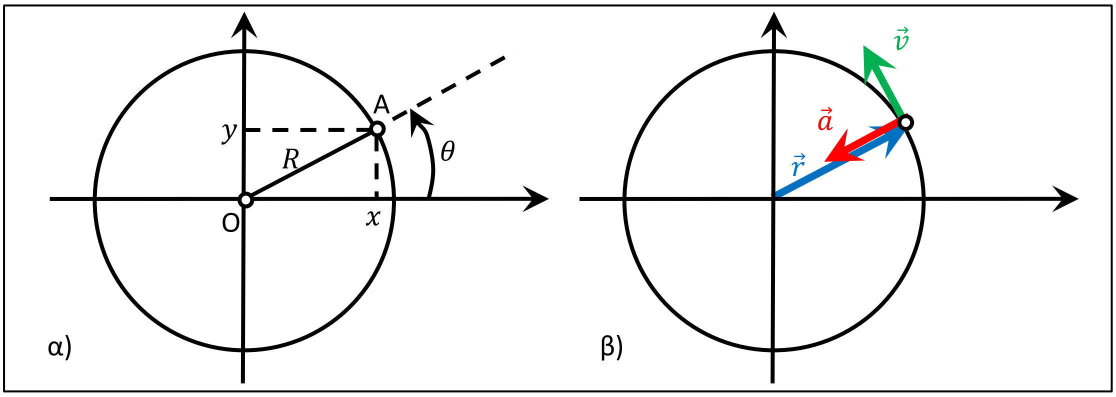
$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = 8.66\vec{e}_x\, m$$

Εφαρμογή: Διανύσματα στη Κυκλική κίνηση

Έστω ένα υλικό σημείο Α όπως αυτό του παρακάτω Σχήματος 2.16α (στα αριστερά) που εκτελεί κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας R. Έστω και ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με αρχή Ο το κέντρο του κύκλου. Όπως το Α κινείται επάνω στον κύκλο, οι καρτεσιανές συντεταγμένες του ισούνται με:

$x = Rcos\theta$	x-ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΗ	(2.23α)
$y = Rsin\theta$	y-ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΗ	(2.23β)

Αυτές οι συντεταγμένες μεταβάλλονται επειδή μεταβάλλεται και η γωνία θ η οποία είναι εν γένει μια συνάρτηση του χρόνου.



Σχήμα 2.16. Κυκλική κίνηση ενός υλικού σημείου.

Θα δούμε στο κεφάλαιο "ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ" ότι η απλούστερη των κυκλικών κινήσεων είναι η <u>ομαλή κυκλική κίνηση</u> όπου η γωνία αυξάνει γραμμικά με το χρόνο $\theta = \omega t$, με το ω μια σταθερά την οποία θα μελετήσομε αργότερα. Οι Εξισώσεις 2.23α και 2.23β γίνονται:

$x = Rcos\omega t$	x-ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΘΕΣΗΣ	(2.24α)
$y = Rsin\omega t$	y- ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΘΕΣΗΣ	(2.24β)

Αυτές είναι και οι συντεταγμένες του διανύσματος θέσης (δείτε Εξ. 2.9). Για να βρούμε τις συντεταγμένες v_x και v_y του διανύσματος της ταχύτητας, παραγωγίζουμε τις παραπάνω δυο εξισώσεις ως προς το χρόνο. Δεδομένου ότι το R είναι σταθερό, η παραγώγιση οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$v_x = -\omega Rsin\omega t$	x-ΤΑΧΥΤΗΤΑ	(2.25α)
$v_y = \omega Rcos\omega t$	y-ΤΑΧΥΤΗΤΑ	(2.25β)

Ξανα-παραγωγίζοντας ακόμα μια φορά, παίρνουμε τις συνιστώσες του διανύσματος της επιτάχυνσης

$a_x = -\omega^2 R cos\omega t$	x-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ	(2.26α)
$a_y = -\omega^2 R sin\omega t$	y- ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ	(2.26β)

Τα τρία διανύσματα θέσης $\vec{r}$, ταχύτητας $\vec{v}$ και επιτάχυνσης $\vec{a}$ φαίνονται στο παραπάνω Σχήμα 2.16β (στα δεξιά). Όπως αναμένεται, το $\vec{r}$ είναι κατά μήκος της ακτίνας του κύκλου ενώ όπως αποδεικνύεται στο Παράδειγμα 2.11, το $\vec{v}$ είναι εφαπτόμενο στον κύκλο και άρα κάθετο στο $\vec{r}$ και το $\vec{a}$ έχει αντίθετη φορά από το $\vec{r}$. Η επιτάχυνση $\vec{a}$ είναι προς το κέντρο του κύκλου και για αυτό ονομάζεται ονομάζεται "κεντρομόλος επιτάχυνση". Είναι αλληλένδετη με την κυκλική κίνηση η οποία θα μελετηθεί σε ξεχωριστό κεφάλαιο αργότερα λόγω της σπουδαιότητάς της. Μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας αλλά και της κεντρομόλου επιτάχυνσης παίρνοντας την τετραγωνική ρίζα του ${v_x}^2 + {v_y}^2$ και ${a_x}^2 + {a_y}^2$ αντίστοιχα, τα οποία με την βοήθεια της θεμελιώδους τριγωνομετρικής ταυτότητας $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$, οδηγούν στα αποτελέσματα:

$v = \omega R$	ΜΕΤΡΟ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ	(2.27)

$a = \omega^2 R = \dfrac{v^2}{R}$	ΚΕΝΤΡΟΜΟΛΟΣ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ	(2.28)

<u>Παράδειγμα 2.10</u>

Ένα υλικό σημείο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση επάνω σε κύκλο ακτίνας $0.5\, m$ με $\omega = \pi\, rad/s$ (οι μονάδες θα εξηγηθούν στο κεφάλαιο "ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ"). Εάν στο $t = 0$ η γωνία του κινητού είναι $\theta = 0$, να βρεθούν τα διανύσματα θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης κατά τους χρόνους α) $t = 0$, β) $t = 1/2\, s$ και γ) $t = 1\, s$.

<u>Λύση</u>:

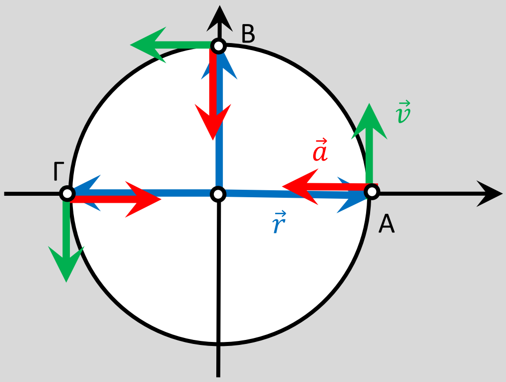
(α) Η γωνία του κινητού δίνεται από την $\theta = \omega t$ η οποία είναι συνεπής με την αρχική συνθήκη στο $t = 0$. Οι Εξισώσεις 2.24, 2.25 και 2.26 για $\omega t = 0$ δίνουν:

$$\vec{r} = (x, y) = (R, 0) = (0.5, 0)$$

$$\vec{v} = \left(v_x, v_y\right) = (0, \omega R) = (0, \pi/2)$$

$$\vec{a} = \left(a_x, a_y\right) = (-\omega^2 R, 0) = (-\pi^2/2, 0)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι τα $\vec{r}$ και $\vec{a}$ είναι οριζόντια με κατεύθυνση έξω και μέσα αντίστοιχα ενώ αντιθέτως το $\vec{v}$ είναι κατακόρυφο και άρα κάθετο στο $\vec{r}$. Τα διανύσματα αυτά φαίνονται στο σημείο Α στο παρακάτω σχήμα.



β) Όταν ο χρόνος γίνει $t = 0.5\ s$, η γωνία του κινητού ισούται με $\theta = \omega t = \pi/2$. Οι Εξισώσεις 2.24, 2.25 και 2.26 δίνουν:

$$\vec{r} = (x, y) = (0, R) = (0, 0.5)$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y) = (-\omega R, 0) = (-\pi/2, 0)$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y) = (0, -\omega^2 R) = (0, -\pi^2/2)$$

Τώρα το $\vec{v}$ είναι οριζόντιο με κατεύθυνση αριστερά και κάθετο στα $\vec{r}$ και $\vec{a}$ τα οποία είναι κατακόρυφα με κατεύθυνση πάνω και κάτω αντίστοιχα. Τα διανύσματα αυτά φαίνονται στο σημείο Β στο παραπάνω σχήμα.

γ) Τώρα η γωνία ισούται με $\theta = \omega t = \pi$. Τα αντίστοιχα διανύσματα φαίνονται στο σημείο Γ στο παραπάνω σχήμα.

Παράδειγμα 2.11

Στο προηγούμενο παράδειγμα εξετάσαμε τρία σημεία της τροχιάς και είδαμε ότι τα τρία διανύσματα $\vec{r}$, $\vec{v}$ και $\vec{a}$ διαφέρουν διαδοχικά κατά 90^0 ως προ της κατεύθυνσή τους. Να αποδειχθεί μαθηματικώς ότι σε οποιαδήποτε γωνία (α) τα $\vec{r}$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα μεταξύ τους και (β) τα $\vec{r}$ και $\vec{a}$ είναι αντι-παράλληλα μεταξύ τους.

Λύση:

(α) Η γωνία του $\vec{r}$ είναι προφανώς $\theta = \omega t$. Για να υπολογίσουμε την γωνία φ του $\vec{v}$ χρησιμοποιούμε την Εξ. 2.2 και τις Εξ. 2.25α και 2.25β:

$$tan\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\omega R cos\omega t}{-\omega R sin\omega t} = -\frac{1}{tan\omega t} = -\frac{1}{tan\theta} => tan\varphi \cdot tan\theta = -1$$

Από την τριγωνομετρία γνωρίζουμε ότι όταν δυο ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους, τότε το γινόμενο των αντίστοιχων κλίσεων τους - και άρα οι εφαπτόμενες των γωνιών τους - ισούται με -1 όπως και στην παραπάνω σχέση. Άρα η θ και η φ έχουν διαφορά 90^0 και άρα τα $\vec{r}$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα μεταξύ τους

Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το εσωτερικό γινόμενο, Εξισώσεις 2.9 και 2.10 που συναντήσαμε στο εδάφιο με τα διανύσματα $\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|cos\theta_{AB}$, όπου θ_{AB} η γωνία μεταξύ των $\vec{A}$ και $\vec{B}$, ή εναλλακτικά $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y$. Η $2^η$ έκφραση δίνει:

$$\vec{r}\cdot\vec{v} = -R^2\omega cos\theta sin\theta + R^2\omega sin\theta cos\theta = 0$$

Άρα και η πρώτη έκφραση $\vec{r}\cdot\vec{v} = |\vec{r}||\vec{v}|cos\theta_{rv}$ θα πρέπει να είναι μηδέν και αφού τα μέτρα $|\vec{r}|$ και $|\vec{v}|$ δεν είναι μηδέν, τότε αναγκαστικά $cos\theta_{rv} = 0$ (όπου θ_{rv} η γωνία μεταξύ $\vec{r}$ και $\vec{v}$) που σημαίνει ότι $\theta_{rv} = 90^0$δηλαδή τα δυο διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους.

(β) Από τις Εξισώσεις 2.24α, 2.24β, 2.26α και 2.26β βλέπουμε ότι ισχύει

$$a_x = -\omega^2 x$$

$$a_y = -\omega^2 y$$

Δηλαδή οι συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{r}$ είναι ανάλογες μεταξύ τους με την ίδια σταθερά αναλογίας ω^2. Σύμφωνα με αυτό που είπαμε για τον πολλαπλασιασμό διανύσματος με αριθμό, Εξίσωση 2.7, βλέπουμε ότι και τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{r}$ είναι ανάλογα μεταξύ τους με την ίδια σταθερά αναλογίας:

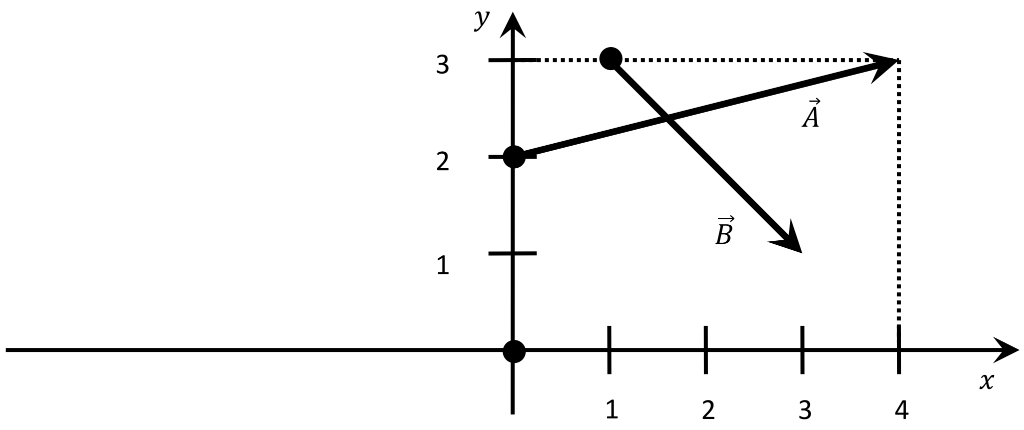
$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$$

Λόγω του αρνητικού προσήμου στην παραπάνω σχέση, τα δυο διανύσματα έχουν αντίθετη φορά.

Προβλήματα

<u>Διανύσματα σε επίπεδο</u>

2.1 Να βρεθούν οι συντεταγμένες των παρακάτω διανυσμάτων $\vec{A}$ και $\vec{B}$ εάν είναι γνωστό ότι οι συντεταγμένες είναι ακέραιοι αριθμοί



2.2 Να βρεθούν το μέτρο και η διεύθυνση σε μοίρες των διανυσμάτων $\vec{A}$ και $\vec{B}$ του προηγούμενου Προβλήματος 2.1

Απάντηση: 4.12, 2.83, $14\ ^0$ και $-45\ ^0$

2.4 Να βρεθούν το μέτρο και η διεύθυνση σε μοίρες του διανύσματος $-\vec{B}$ του προηγούμενου Προβλήματος 2.1

Απάντηση: 2.83 και $135\ ^0$

2.4 Να βρεθούν το μέτρο και η διεύθυνση των διανυσμάτων $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ και $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ του προηγούμενου Προβλήματος 2.1

Απάντηση: 6.08, 3.61, $-9.46\ ^0$ και $56.3\ ^0$

2.5 Να εκφραστούν τα διανύσματα $\vec{C}' = 4\,\vec{C}$ και $\vec{D}' = \pi\vec{D}$ συναρτήσει των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{e}_x$ και $\vec{e}_y$ όπου $\vec{C}$ και $\vec{D}$ τα διανύσματα του προηγούμενου Προβλήματος 2.3

Διανύσματα Θέσης, Ταχύτητας και Επιτάχυνση στο επίπεδο

2.6 Δυο κινητά περιγράφονται από τα διανύσματα θέσης $\vec{r}_1 = (at^2, bt)$ και $\vec{r}_2 = (ct^3, bt)$ όπου $a = 10\ m/s^2$, $b = 6\ m/s$ και $c = 2\ m/s^3$ Να βρεθεί η γωνία σε μοίρες μεταξύ των δυο διανυσμάτων σε απόλυτη τιμή κατά τη χρονική στιγμή $t = 1\ s$.

Απάντηση: 40.5^0

2.7 Η κίνηση ενός σημειακού σώματος περιγράφεται από τις εξισώσεις: $x = \alpha(1 - t/t_0)^2$ και $y = \beta t^2$ όπου $\alpha = 12\ m, \beta = 0.3\ s^{-2}$ και $t_0 = 4\ s$. Να βρεθεί η γωνία φ που σχηματίζει η επιτάχυνσή του σώματος με τον άξονα των x σε κάθε χρονική στιγμή.

Απάντηση: $21.8\ ^0$

2.8 Ένα υλικό σημείο που τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται σε στιγμιαία ακινησία, κινείται με επιτάχυνση με συνιστώσες $\alpha_x(t) = bsin(\omega t)$ και $\alpha_y(t) = dcos(\omega t)$ όπου $b = 3\ m/s^2$, $d = 2m/s^2$ και $\omega = 4\ rad/s$. Να βρεθεί η γωνία θ σε μοίρες (μεταξύ 0 και 360^0) που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας με τον άξονα x κατά τη χρονική στιγμή $t = 0.2\ s$.

Απάντηση: $68.4\ ^0$

2.9 Ένα υλικό σημείο κινείται έτσι ώστε οι συντεταγμένες του να δίνονται από τις $x(t) = bsin(\omega t)$ και $y(t) = dsin(\omega t)$ όπου b και d σταθερές σε m και $\omega = \pi/8\ rad/s$. Να βρεθούν (α) Το μέτρο του διανύσματος θέσης $\vec{r}$ ανά πάσα στιγμή. (β) Η διεύθυνση του διανύσματος θέσης ανά πάσα στιγμή. (γ) Σε διάγραμμα $x - y$ να σχεδιασθούν τα σημεία της τροχιάς για $t = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\ s$ για την περίπτωση που $b = d = 0.5\ m$. (δ) Η μαθηματική εξίσωση $y(x)$ της τροχιάς. (ε) Το μέτρο και η διεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας $\vec{v}$. (στ) Να συγκριθεί η διεύθυνση του $\vec{r}$ με αυτή του $\vec{v}$ και να σχολιασθεί το αποτέλεσμα της σύγκρισης.

Απάντηση: (δ) Ευθεία, (ε) διεύθυνση 45^0, (στ) ίδιες, ευθύγραμμη κίνηση

2.10 Σημειακό σώμα Α που βρίσκεται στο $t = 0$ σε ηρεμία στο Ο(0,0), δέχεται επιτάχυνση $\vec{a} = c_1 t\vec{e}_x + c_2 t^2\vec{e}_y$ όπου $c_1 = 6\ m/s^3$ και $c_2 = 12\ m/s^4$. Να βρεθεί η απόσταση ΟΑ την χρονική στιγμή $t = 1\ s$.

Απάντηση: $1.41\ m$

2.11 Σημειακό σώμα Α κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v} = -\vec{e}_y\ m/s$ για $t \leq 0$. Στο $t = 0$ και ενώ το σώμα βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων, εφαρμόζεται επιτάχυνση $\vec{a} = 2\pi cos(c_1 t)\vec{e}_x + \pi sin(c_1 t)\vec{e}_y$ όπου $c_1 = \pi\ rad/s$. Να βρεθεί η απόσταση του Α από την αρχή των αξόνων κατά την χρονική στιγμή $t = 1/4$.

Απάντηση: $0.292\ m$

2.12 Ένα υλικό σημείο κινείται στο επίπεδο με επιτάχυνση η οποία έχει συνιστώσες που δίνονται από τις $\alpha_x(t) = bsin(\omega t)$ και $\alpha_y(t) = dcos(\omega t)$ όπου οι b, d και ω είναι σταθερές μεγαλύτερες του μηδενός. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κινητό κινείται προς τον αρνητικό άξονα x με ταχύτητα μέτρου $|v| = b/\omega$ και περνάει από την αρχή των αξόνων. Να σχεδιασθεί όσο το δυνατό πιο λεπτομερώς η τροχιά του κινητού για $t > 0$.

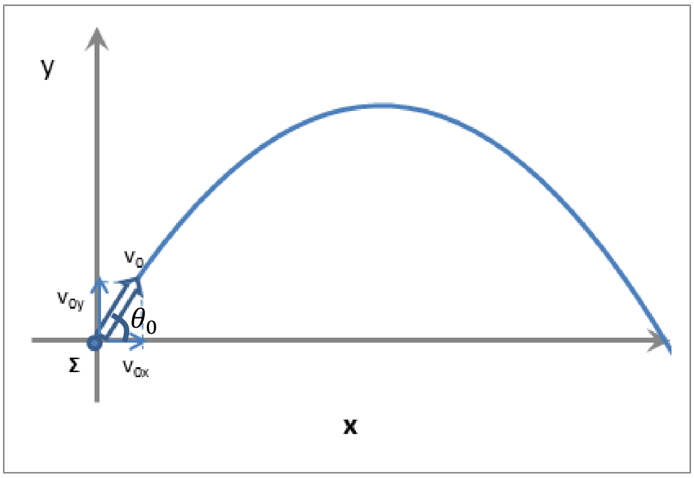
<u>Απάντηση</u>: Έλλειψη, μήκη ημιαξόνων x_0 και y_0, κέντρο $(0, y_0)$

2.13 Σημειακό σώμα Α που βρίσκεται στο $t = 0$ σε ηρεμία στο σημείο $B(1,1)$, δέχεται ξαφνικά επιτάχυνση ώστε η ταχύτητα του να αποκτήσει συνιστώσες $v_x = c_1 t$ και $v_y = c_2 t^2$ όπου $c_1 = 1\, m/s^2$) και $c_2 = 0.3\, m/s^3$) Να βρεθεί η απόστασή του από το $O(0,0)$ την χρονική στιγμή $t_0 = 2\, s$.

<u>Απάντηση</u>: $3.50\, m$

<u>Βολές</u>

Σημείωση: Στις βολές να χρησιμοποιηθεί σε όλες τις ασκήσεις το παρακάτω διάγραμμα



2.14 Μικρή πέτρα εκτοξεύεται από το έδαφος με αρχική ταχύτητα $8\, m/s$ και γωνία 35^0 ως προς τον ορίζοντα. Να βρεθούν (α) Ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει η πέτρα στο υψηλότερο σημείο, (β) Το ύψος της πέτρας σε σχέση με το σημείο εκτόξευσης την χρονική στιγμή $0.2\, s$ πριν να φτάσει στο υψηλότερο σημείο, (γ) Το μέτρο της ταχύτητας στο σημείο αυτό. Πάρτε $g = 10\, ms^{-2}$ για ευκολία.

<u>Απάντηση</u>: (α) $0.459\, s$, (β) $0.852\, m$, και (γ) $6.85\, m/s$

2.15 Μικρή πέτρα εκτοξεύεται από το έδαφος με αρχική ταχύτητα $12\, m/s$ και γωνία 60^0 ως προς τον ορίζοντα. Να βρεθούν (α) Ο χρόνος που απαιτείται για να επιστρέψει η πέτρα στο έδαφος, (β) Το μέτρο της ταχύτητας λίγο πριν την πρόσκρουση και (γ) Η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα (ως προς το έδαφος) λίγο πριν την πρόσκρουση. Να σχολιαστεί το τελευταίο αποτέλεσμα. Πάρτε $g = 10\ ms^{-2}$ για ευκολία.

<u>Απάντηση</u>: (α) $2.08\ s$, (β) $12\ m/s$ και (γ) $-60\ ^0$

2.16 Μικρή πέτρα εκτοξεύεται από το έδαφος με αρχική ταχύτητα $12\ m/s$ και γωνία 60^0 ως προς τον ορίζοντα. (α) Να γραφούν σε διανυσματική μορφή (συναρτήσει των μοναδιαίων διανυσμάτων) η ταχύτητα και η επιβατική ακτίνα $1.3\ s$ μετά την εκτόξευση και (β) Να βρεθεί η σχετική τους γωνία (η μεταξύ τους γωνία) κατά την ίδια χρονική στιγμή

<u>Απάντηση</u>: (α) $6.00\vec{e}_x - 2.61\vec{e}_y$ & $7.8\vec{e}_x - 11.8\vec{e}_y$, (β) $33.3\ ^0$

2.17 Σημειακή μάζα $0.4\ kg$ εκτοξεύεται με ταχύτητα $17\ m/s$ στο $t = 0$ από την αρχή των αξόνων με γωνία 72^0 ως προς τον άξονα x ο οποίος είναι παράλληλος με το έδαφος. Εάν στη μάζα ασκείται μόνο το βάρος της με επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με $10\ m/s^2$, να βρεθεί σε ποια χρονική στιγμή το διάνυσμα θέσης της μάζας θα είναι κάθετο στην ταχύτητά της.

<u>Απάντηση</u>: $2.74\ s$

2.18 Σημειακή μάζα m εκτοξεύεται σε κάποιο πλανήτη στο $t = 0$ με ταχύτητα μέτρου v_0 από την αρχή των αξόνων με γωνία $\theta_0 > 30^0$ ως προς τον άξονα x ο οποίος βρίσκεται στην επιφάνεια του εδάφους του πλανήτη. Εάν στη μάζα ασκείται μόνο το βάρος της με επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με g (διάφορη από αυτή της γης), να βρεθεί σε ποιες χρονικές στιγμές το διάνυσμα θέσης της μάζας θα σχηματίζει γωνία 120^0 με την επιτάχυνσή της.

<u>Απάντηση</u>: $gv_0/2(sin\theta_0 - cos\theta_0/\sqrt{3})$

2.19 Μικρή πέτρα εκτοξεύεται από το έδαφος με αρχική ταχύτητα $v_0 = 10.0\ m/s$ και γωνία $\theta_0 = 40^0$ ως προς το έδαφος. Να βρεθεί η γωνία του διανύσματος της ταχύτητας της πέτρας σε μοίρες (μεταξύ $\pm 90^0$) σε σχέση με τον άξονα x σε χρόνο $\Delta t = 0.2\ s$ αφού έχει φτάσει στο σημείο Α του μέγιστου ύψους της τροχιάς. Πάρτε $g = 10\ m/s^2$ για ευκολία.

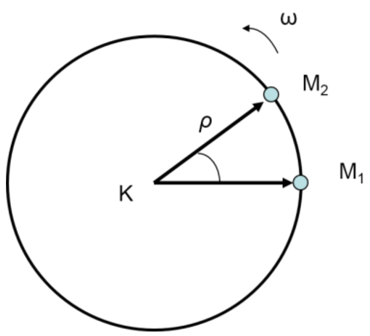
<u>Απάντηση</u>: -14.63^0

<u>Διανύσματα στη Κυκλική κίνηση</u>

2.20 Πως θα άλλαζε η απάντησή σας στα υπο-ερωτήματα γ και δ του Προβλήματος 2.8 εάν οι συντεταγμένες συναρτήσει του χρόνου ήταν οι εξής: $x(t) = bsin(\omega t)$ και $y(t) = bcos(\omega t)$ όπου $b = 0.5\ m$ και $\omega = \pi/8\ rad/s$; Δηλαδή ενώ στο Πρόβλημα 2.8 και οι δυο συνιστώσες εμπεριείχαν τον όρο του ημιτόνου, στο παρόν πρόβλημα ο ένας περιέχει ημίτονο ενώ ο άλλος συνημίτονο.

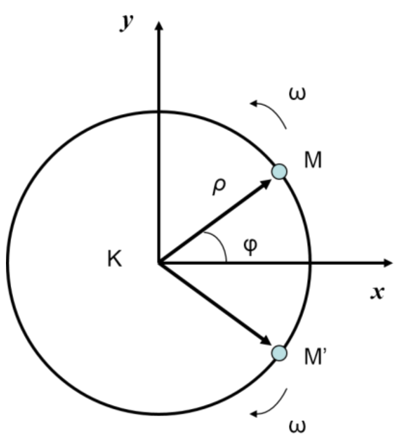
Απάντηση: (δ) Κύκλος, (στ) Κάθετες μεταξύ τους, κυκλική κίνηση

2.21 Στο παρακάτω σχήμα ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση πάνω σε κύκλο ακτίνας ρ με περίοδο T. Το σώμα περνάει από τα σημεία M_1 και M_2 με διαφορά χρόνου Δt. Εάν v_1 και v_2 είναι οι διανυσματικές ταχύτητες του σώματος σε αυτά τα δυο σημεία, να βρεθεί το εσωτερικό τους γινόμενο.

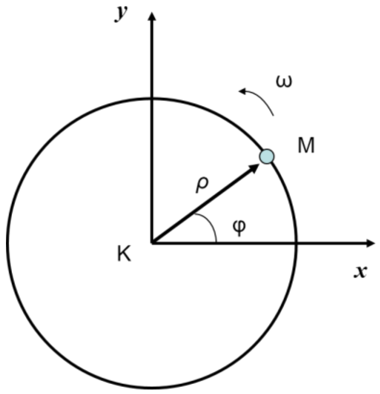


Απάντηση: $\rho^2(2\pi/T)^2\ cos(2\pi\Delta t/T)$

2.22 Στο παρακάτω σχήμα τα σημεία Μ και Μ' εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση ίδιας γωνιακής ταχύτητας ω αλλά αντίθετης φοράς επάνω σε κύκλο ακτίνας ρ. Την χρονική στιγμή $t = 0$ τα δυο σημεία βρίσκονται επάνω στον άξονα x. Να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων θέσης τους κατά την χρονική στιγμή t.



2.23 Ένας δίσκος ακτίνας ρ και αμελητέου πάχους περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Η ακτίνα ΚΜ σχηματίζει γωνία $\varphi = 0$ με τον άξονα x στο $t = 0$. Ένα έντομο κινείται με σταθερή ταχύτητα v_0 επάνω στην ακτίνα ΚΜ προς τα έξω. Εάν στο $t = 0$ το έντομο βρίσκεται στο σημείο Κ τότε να βρεθεί το διάνυσμα θέσης του σε τυχαίο χρόνο όπως κινείται επάνω στο ΚΜ:



<u>**Περισσότερο σύνθετες κινήσεις**</u>

2.24 Κινητό κινείται έτσι ώστε οι συντεταγμένες της ταχύτητάς του συναρτήσει του χρόνου να δίνονται από τις $v_x(t) = Ae^{-\lambda t}$ και $v_y(t) = B$ όπου A και B είναι θετικές σταθερές σε μονάδες m/s και $\lambda = 4\ s^{-1}$. Εάν το μέτρο της ταχύτητας σε πολύ μεγάλους χρόνους τείνει στην τιμή $4\ m/s$ ενώ την χρονική στιγμή $t = 0$ αυτό το μέτρο είναι ίσο με $5\ m/s$ και το κινητό βρίσκεται στο σημείο (0,2), να βρεθεί η τροχιά του κινητού και να γίνει η γραφικής της παράσταση.

<u>Απάντηση</u>: Εκθετική αύξηση, περνάει από τα $(-4.8, 0)$ και $(0, 2)$ και τείνει στην τιμή 0.75

2.25 Κινητό κινείται έτσι ώστε οι συντεταγμένες της ταχύτητά του συναρτήσει του χρόνου να δίνονται από τις $v_x(t) = A/\sqrt{t}$ και $v_y(t) = B$ όπου A και B είναι σταθερές με κατάλληλες μονάδες. Το μέτρο της ταχύτητας σε πολύ μεγάλους χρόνους τείνει στην τιμή $\sqrt{2}\ m/s$, ενώ η εφαπτομένη της γωνίας της την χρονική στιγμή $t = 1$ είναι ίση με 1/2.5. Εάν την χρονική στιγμή $t = 0$ το κινητό βρίσκεται στο σημείο $(0, 2.2)$, να βρεθεί η τροχιά του κινητού και να γίνει η γραφικής της παράσταση.

<u>Απάντηση</u>: Παραβολή συμμετρικής ως προς τον άξονα y, με κορυφή $(0, 2.2)$

2.26 Μικρό σώμα μάζας m κινείται μέσα σε βαρυτικό πεδίο με σταθερά g και επιπλέον κάτω από την επίδραση μιας δύναμης με συνιστώσες $F_x = 2\kappa m$ και $F_y = 12\lambda m t^2$ όπου κ και λ είναι θετικές σταθερές σε κατάλληλες μονάδες και t ο χρόνος. Το σώμα αφήνεται αρχικά από ύψος h επάνω στον άξονα y από την ηρεμία. Να βρεθεί η τροχιά του σώματος για $t \geq 0$ σε μορφή γραφικής παράστασης (σχηματικά μόνο αλλά πρέπει να φαίνονται σε αυτήν τα βασικά χαρακτηριστικά)

Απάντηση: Παραβολή, ξεκινάει από το $(0, h)$, παίρνει μόνο θετικές τιμές, ελάχιστο στο $x = g\kappa/4\lambda$, για $x \to \infty$ τείνει στο άπειρο.

2.27 Μικρό σώμα μάζας m κινείται τις δυο διαστάσεις κάτω από την επίδραση μιας μοναδικής δύναμης με συνιστώσες $F_x = 6\kappa m t^2 - 2m\lambda$ και $F_y = 12m\lambda$ όπου κ και λ είναι θετικές σταθερές σε κατάλληλες μονάδες και t ο χρόνος. Το σώμα αφήνεται αρχικά από την ηρεμία επάνω στον άξονα x στο σημείο $x = h$. Να βρεθεί η τροχιά του σώματος για χρόνους $t \geq 0$ σε μορφή γραφικής παράστασης x συναρτήσει του y και όχι αντίστροφα (σχηματικά μόνο αλλά πρέπει να φαίνονται σε αυτήν τα βασικά χαρακτηριστικά)

Απάντηση: Παραβολή, ξεκινάει από το $(0, h)$, παίρνει μόνο θετικές τιμές, ελάχιστο στο $y = 2\lambda^2/\kappa$, για $y \to \infty$ τείνει στο άπειρο.

3. ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Μέχρι τώρα μελετήσαμε την κίνηση ενός υλικού σημείου. Αυτό ονομάζεται “κινηματική”. Όμως αυτό που προκαλεί την κίνηση είναι οι δυνάμεις. Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την περιγραφή μερικών γνωστών δυνάμεων που εμφανίζονται στην Μηχανική όπως π.χ. η βαρύτητα, η τριβή, τάση του νήματος, δυνάμεις σε τροχαλίες κ.τ.λ. Στη συνέχεια θα δούμε κάτω από ποιες προϋποθέσεις ένα σύνολο τέτοιων δυνάμεων μπορεί να προκαλέσει ισορροπία σε ένα υλικό σημείο. Τέλος θα εισάγουμε τον $3^{ο}$ νόμο του Νεύτωνα ο οποίος συσχετίζει τα ζεύγη δυνάμεων από μια αλληλεπίδραση δυο σωμάτων.

Η δύναμη της βαρύτητας

Όταν ασχολούμαστε με σώματα μάζας m που κινούνται το πολύ σε μερικές δεκάδες ή εκατοντάδες μέτρα από το έδαφος, τότε η δύναμη της βαρύτητας B δίνεται από την πολύ απλή έκφραση

$B = mg$	ΔΥΝΑΜΗ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ	(3.1)

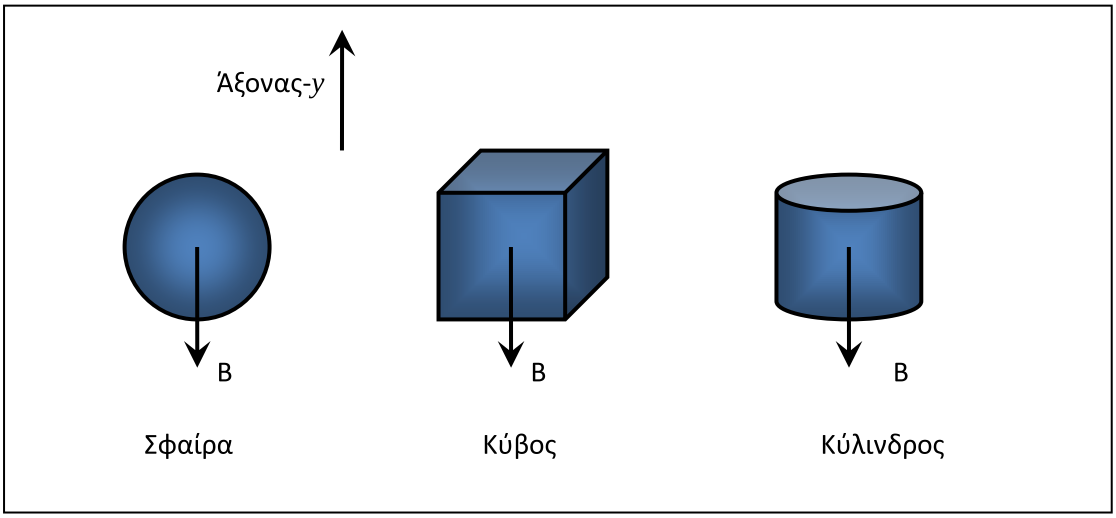
όπου g είναι μια σταθερά γνωστή ως "**η επιτάχυνση της βαρύτητας**" η οποία διαφέρει ελαφρά από τόπο σε τόπο αλλά μια καλή μέση τιμή είναι η

$g = 9.8\, m/s^2$	ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ	(3.2)

Σε κινήσεις που καλύπτουν μεγάλα ύψη τα πράγματα είναι διαφορετικά επειδή το g εξαρτάται από την απόσταση από το κέντρο της γης. Γιατί η σταθερά g ονομάζεται "επιτάχυνση της βαρύτητας"; Επειδή εάν εκτελέσετε ένα οποιοδήποτε πείραμα πτώσης μέσα στο βαρυτικό πεδίο της γης, δηλαδή ένα πείραμα όπου η μόνη δύναμη που δρα σε ένα σώμα είναι η βαρύτητα, τότε η επιτάχυνση που θα μετρήσετε θα είναι ίση με $-9.8\, m/s^2$, ανεξαρτήτως εάν το σώμα βάλλεται αρχικά προς τα πάνω ή προς τα κάτω, ή εάν το αφήνετε ελεύθερο να πέσει στο έδαφος. Βέβαια σε πολλά προβλήματα χρησιμοποιούμε για ευκολία την τιμή $g \approx 10\, m/s^2$ αλλά σε πραγματικές εφαρμογές πρέπει να χρησιμοποιούμε το 9.8. Επειδή η δύναμη της βαρύτητας είναι πάντοτε προς το έδαφος, η διανυσματική της έκφραση είναι η

$\vec{B} = -mg\vec{e}_y$	ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ	(3.3)

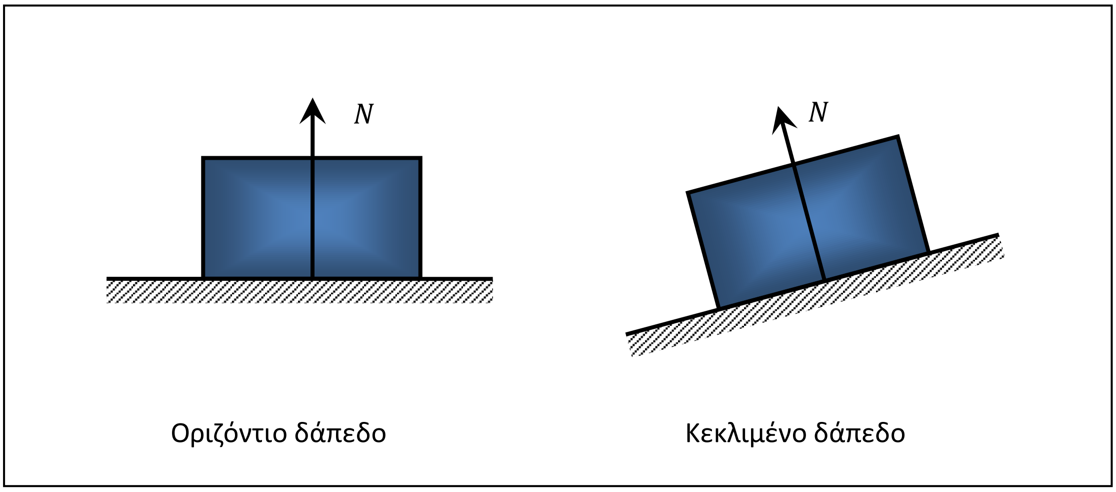
όπου θεωρούμε ότι ο θετικός άξονας-y είναι προς τα πάνω. Σε ένα στερεό σώμα η βαρύτητα δρα ομοιόμορφα σε όλα τα σημεία του αλλά για λόγους ευκολίας μπορούμε να θεωρούμε ότι δρα στο κέντρο μάζας του στερεού το οποίο δεν το έχουμε ορίσει ακόμα (θα ορισθεί στο Κεφ. 10) αλλά για τα συμμετρικά σώματα που συνήθως εξετάζουμε, συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας, π.χ. για μια σφαίρα το κέντρο μάζας είναι το κέντρο της. Το παρακάτω Σχήμα 3.1 δείχνει μερικά παραδείγματα συμμετρικών σωμάτων με τη βαρύτητα να δρα στο κέντρο συμμετρίας τους:



Σχήμα 3.1. Κέντρο μάζας συνήθων συμμετρικών σχημάτων.

Κάθετη Αντίδραση

Όταν ένα ακίνητο σώμα έρχεται σε επαφή με ένα οριζόντιο δάπεδο, όπως στο παρακάτω Σχήμα 3.2, τότε εμφανίζεται στην επιφάνεια επαφής μια δύναμη N η οποία δρα στο σώμα, με φορά από το δάπεδο προς το σώμα. Επειδή αυτή η δύναμη είναι πάντοτε κάθετη προς το δάπεδο, ονομάζεται "κάθετη αντίδραση". Η κάθετη αντίδραση αυτοπροσαρμόζεται ανάλογα με την θέση και την κίνηση του σώματος οπότε δεν υπάρχει τύπος για το μέτρο της. Συνήθως υπολογίζεται με την βοήθεια άλλων δυνάμεων όπως θα φανεί στα παρακάτω παραδείγματα.

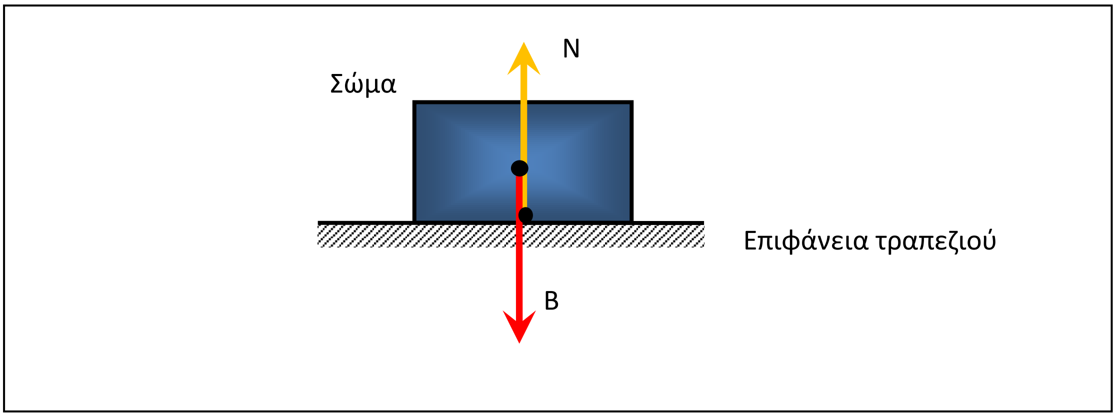


Σχήμα 3.2. Κάθετη αντίδραση.

Παράδειγμα 3.1

Σώμα μάζας $m = 15\ kg$ ηρεμεί επάνω σε τραπέζι. Να σχεδιασθούν οι δυνάμεις που δρουν στο σώμα και να βρεθεί η κάθετη αντίδραση

Λύση: Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, στο σώμα ασκούνται δυο δυνάμεις, το βάρος του B και η κάθετη αντίδραση N (προσέξτε τα διαφορετικά σημεία εφαρμογής, το βάρος στο κέντρο μάζας και η κάθετη αντίδραση στην κάτω επιφάνεια του σώματος, όπως και το γεγονός ότι οι δυνάμεις προέρχονται από διαφορετικά σώματα, το βάρος από την Γη και η κάθετη αντίδραση από το τραπέζι)..

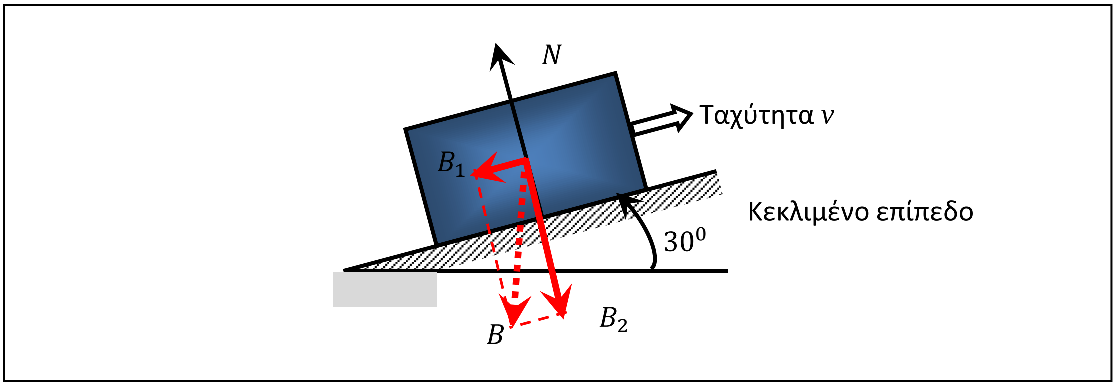


Από την Εξ. 3.1 το βάρος είναι ίσο με $B = mg = 15{\times}9.8 = 147\ N$. Εφόσον το σώμα βρίσκεται σε ηρεμία, θα πρέπει οι δυνάμεις να ισορροπούν και έτσι αναγκαστικά η N είναι ίση κατά μέτρο με το βάρος δηλαδή $N = 147\ N$.

Παράδειγμα 3.2

Σώμα μάζας $m = 12\ kg$ κινείται λόγω αρχικής ώθησης προς τα πάνω κατά μήκος λείου κεκλιμένου επιπέδου χωρίς τριβή, το οποίο σχηματίζει γωνία 30^0 με τον ορίζοντα. Εάν οι μόνες δυνάμεις που δρουν στο σώμα είναι το βάρος του B και η κάθετη αντίδραση N, να βρεθεί η δεύτερη.

Λύση: Το βάρος του σώματος είναι ίσο με $B = mg = 12 \times 9.8 = 117.6\ N$. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, το βάρος B σε αυτό το παράδειγμα δεν είναι ευθυγραμμισμένο με την κάθετη αντίδραση N. Μπορούμε να αναλύσουμε το βάρος σε δυο συνιστώσες, μια B_1 κατά το μήκος της κίνησης και μια άλλη B_2 κατά μήκος της N.



Με τη βοήθεια της τριγωνομετρίας μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$B_1 = B sin30^0 = 58.8\ N$$

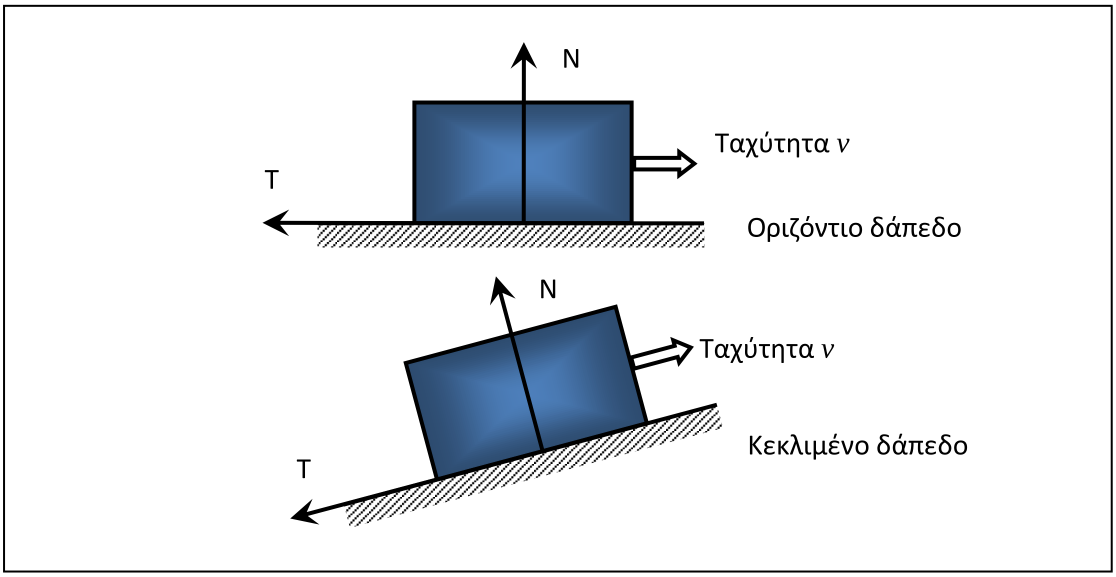
$$B_2 = B cos30^0 = 101.8\ N$$

Ως προς την κάθετη προς την κίνηση κατεύθυνση, το σώμα βρίσκεται σε ηρεμία. Αυτό σημαίνει ότι οι δυνάμεις B_2 και N πρέπει να ισορροπούν και έτσι $N = 101.8\ N$.

Σημείωση: Παρόλο που η N ισούται πολλές φορές με το βάρος του σώματος, όπως στο Παράδειγμα 3.1, αυτός δεν είναι και ο γενικός κανόνας, όπως είδαμε στο Παράδειγμα 3.2. Πολλές φορές οι φοιτητές κάνουν το λάθος να ταυτίζουν αριθμητικά το N με το βάρος.

Τριβή Ολίσθησης

Επανερχόμενοι στο σώμα σε επαφή με ένα δάπεδο όπως αυτό στο Σχήμα 3.3, εάν το σώμα δεν είναι ακίνητο, εκτός από την κάθετη αντίδραση N, εμφανίζεται και μια ακόμη δύναμη T κατά μήκος του δαπέδου, γνωστή ως η “τριβή ολίσθησης” η οποία αντιτίθεται στην σχετική ταχύτητα του σώματος ως προς την επιφάνεια επαφής.



Σχήμα 3.3. Τριβή Ολίσθησης.

Το μέτρο της τριβής ολίσθησης δίνεται από την

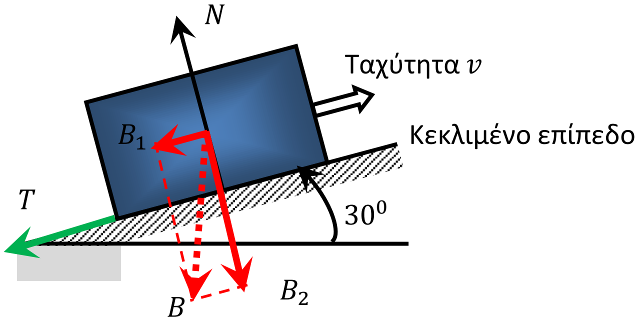
$T = \mu N$	ΤΡΙΒΗ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ	(3.4)

όπου το μ είναι ο λεγόμενος “συντελεστής τριβής ολίσθησης”, ένας καθαρός και θετικός αριθμός συνήθως λίγο μικρότερος από την μονάδα και εξαρτάται από το είδος του υλικού των δυο επιφανειών. Από την καθημερινή μας εμπειρία γνωρίζουμε ότι ο πάγος ή μια τελείως λεία και λιπασμένη επιφάνεια δεν εμφανίζει δυνάμεις τριβής οπότε σε αυτές τις περιπτώσεις $\mu \approx 0$. Αντιθέτως τα ελαστικά των αυτοκινήτων με την άσφαλτο εμφανίζουν συντελεστές τριβής της τάξης του 0.5 ενώ όταν το αλουμίνιο ολισθαίνει ενάντια σε αλουμίνιο ο συντελεστής είναι πολύ ψηλός $\mu \approx 1.4$. Θα πρέπει να θυμόμαστε ότι η T αντιτίθεται στην σχετική και όχι στην απόλυτη ταχύτητα του σώματος ως προς το δάπεδο.

<u>Παράδειγμα 3.3</u>

Έστω ότι στο Παράδειγμα 3.2 παραπάνω, υπάρχει τριβή μεταξύ του σώματος μάζας $m = 12\ kg$ και του κεκλιμένου επιπέδου που σχηματίζει γωνία 30^0 με τον ορίζοντα. Εάν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ισούται με $\mu = 0.6$ να βρεθεί η δύναμη της τριβής ολίσθησης.

<u>Λύση</u>: Σε σχέση με το Παράδειγμα 3.2, εμφανίζεται μια νέα δύναμη, η τριβή ολίσθησης T κατά μήκος της κίνησης. Αντιθέτως, κατά την κάθετη κατεύθυνση ως προς την κίνηση, οι δυνάμεις δεν έχουν αλλάξει και έτσι και πάλι από την ισορροπία $N = B_2 = 101.8\ N$. Από την Εξ. 3.4 έχουμε $T = \mu N = 0.6 \times 101.8 = 61.08\ N$



<u>Παράδειγμα 3.4</u>

Ένας φοιτητής σπρώχνει την αποσκευή του κατά μήκος του διαδρόμου ενός βαγονιού σε αρχικά ακίνητο τραίνο έτσι ώστε αυτή να ολισθαίνει με ταχύτητα $0.5\ m/s$ προς το πίσω μέρος του τραίνου. Εάν ο συντελεστής ολίσθησης είναι διάφορος του μηδενός, να βρεθεί η κατεύθυνση της τριβής ολίσθησης όταν (α) το τραίνο παραμένει ακίνητο, (β) όταν το τραίνο κινείται με ταχύτητα $0.5\ m/s$ προς τα εμπρός και (γ) όταν το τραίνο κινείται με ταχύτητα $40\ m/s$ προς τα εμπρός.

<u>Λύση</u>:

(α) Η τριβή αντιτίθεται στην κίνηση οπότε θα έχει κατεύθυνση προς την μηχανή του τραίνου, δηλαδή προς τα εμπρός. (β) Σε αυτή τη περίπτωση η απόλυτη ταχύτητα του κιβωτίου ως προς το έδαφος είναι μηδέν εφόσον το τραίνο κινείται προς τα εμπρός με την ίδια ταχύτητα που το κιβώτιο σπρώχνεται προς τα πίσω ως προς το τραίνο. Παρόλα αυτά, η τριβή ολίσθησης έχει να κάνει με τη σχετική ταχύτητα του κιβωτίου ως προς την επιφάνεια επαφής και όχι με την απόλυτη ταχύτητα του σώματος (ως προς το έδαφος). Αφού ως προς τον διάδρομο του τραίνου το κιβώτιο κινείται προς τα πίσω, η τριβή θα έχει κατεύθυνση προς την μηχανή του τραίνου, δηλαδή προς τα εμπρός. (γ) Ομοίως με το υποερώτημα β, το κιβώτιο τώρα έχει απόλυτη ταχύτητα $40 - 0.5 = 39.5\ m/s$ προς τα εμπρός ως προς τον σταθμό αλλά αυτό δεν έχει σημασία. Λόγω της σχετικής ταχύτητας, και πάλι η τριβή θα έχει κατεύθυνση προς την μηχανή του τραίνου, δηλαδή προς τα εμπρός.

Στατική Τριβή

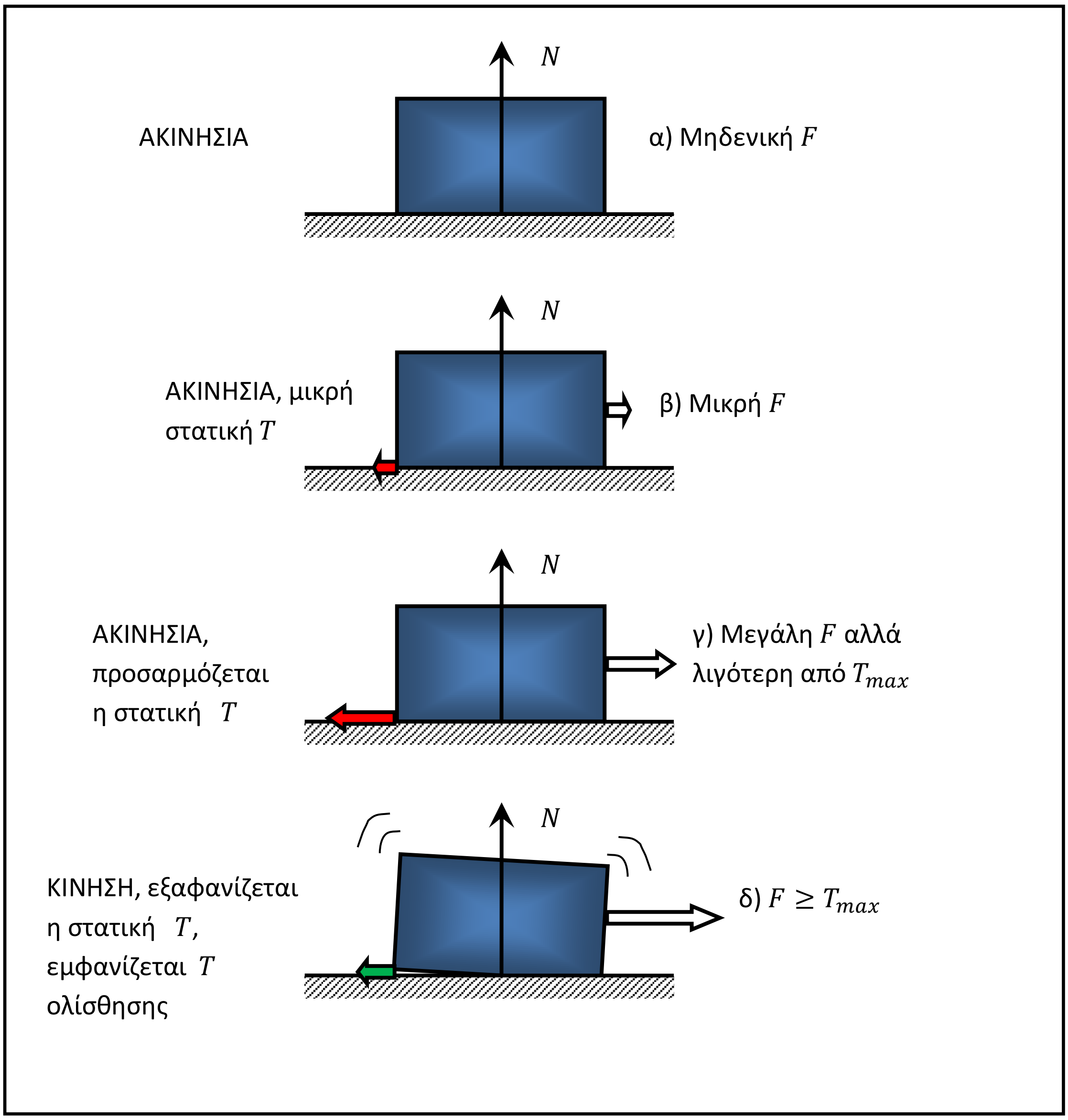
Είδαμε ότι όταν ένα ακίνητο σώμα είναι σε επαφή με μια επιφάνεια, η επιφάνεια ασκεί στο σώμα μια κάθετη αντίδραση ενώ σε ένα κινούμενο σώμα η επιφάνεια του ασκεί επιπλέον και την τριβή ολίσθησης. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.4, υπάρχει και μια τρίτη περίπτωση όπου το σώμα είναι μεν ακίνητο, αλλά τείνει να κινηθεί παράλληλα με την επιφάνεια λόγω κάποιας εξωτερικής δύναμης F. Εάν η εξωτερική δύναμη είναι μικρή, τότε η επιφάνεια αντιδρά στην μετακίνηση και προσπαθεί να κρατήσει το σώμα σε ακινησία εφαρμόζοντας μια ίση και αντίθετη δύναμη ως προς την εξωτερική δύναμη. Αυτή η δύναμη της επιφάνειας είναι γνωστή ως “στατική τριβή”. Βέβαια εάν αυξήσουμε και άλλο την εξωτερική δύναμη, κάποια στιγμή δεν μπορεί άλλο η επιφάνεια να ακινητοποιήσει το σώμα και έτσι το σώμα θα αρχίσει να κινείται. Άρα η στατική τριβή που επίσης συμβολίζεται T, είναι δύναμη που αυτοπροσαρμόζεται στο εξωτερικό αίτιο, μέχρι μια μέγιστη τιμή T_{max}. Από κει και πέρα θα εμφανισθεί η τριβή ολίσθησης η οποία κατά κανόνα είναι πολύ μικρότερη από την T_{max}. Έτσι για την στατική τριβή μπορούμε να γράψουμε

$T = F \quad \text{για} \quad F \leq T_{max}$	ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΡΙΒΗ	(3.5α)

όπου F είναι η εξωτερικά εφαρμοζόμενη δύναμη. Επιπλέον η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής δίνεται από την

$T_{max} = \mu_S N$	ΜΕΓΙΣΤΗ ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΡΙΒΗ	(3.5β)

παρόμοια δηλαδή και με τη τριβή ολίσθησης με την διαφορά ότι ο συντελεστής μ_S που ονομάζεται "συντελεστής στατικής τριβής" είναι αρκετά μεγαλύτερος στην πράξη από τον "συντελεστή τριβής ολίσθησης". Αυτό το γνωρίζουμε και από την καθημερινή μας εμπειρία αφού είναι πιο δύσκολο να θέσουμε σε κίνηση ένα βαρύ και ογκώδες αντικείμενο από να το σύρουμε στη συνέχεια όταν έχει ήδη ξεκινήσει η ολίσθηση. Παραστατικά ο τρόπος που δρα η στατική τριβή φαίνεται στο παρακάτω σχήμα όπου μια εξωτερική δύναμη έλκει προς τα δεξιά ένα κιβώτιο. Ένα κοινό λάθος που κάνουν οι φοιτητές όταν πρέπει να υπολογίσουν την στατική τριβή, είναι να χρησιμοποιούν πάντοτε την Εξ. 3.5, ακόμα και όταν αυτή δεν έχει την μέγιστη τιμή της. Η στατική τριβή πρέπει να υπολογίζεται από τις εξωτερικές δυνάμεις που δρουν στο σώμα και η Εξ. 3.5 πρέπει να χρησιμοποιείται μόνο στην οριακή περίπτωση που το σώμα μόλις οριακά ξεκινάει την κίνησή του.



Σχήμα 3.4. Στατική Τριβή

Παράδειγμα 3.5

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ένα σώμα μάζας $m = 12\,kg$ ισορροπεί επάνω σε κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία 30^0 με τον ορίζοντα. Εάν ο συντελεστής στατικής τριβής ισούται με $\mu_S = 0.7$ να βρεθούν (α) η φορά της στατικής τριβής, (β) η κάθετη αντίδραση N, (γ) το μέτρο της στατικής τριβής και (δ) η μέγιστη τιμή της γωνίας του κεκλιμένου επιπέδου εάν αυτή αυξηθεί πέρα των 30^0, στην οποία το σώμα αρχίζει να ολισθαίνει. Δίνεται $g = 9.8\,m/s^2$.

Λύση:

(α) Όπως και το Παράδειγμα 3.2, αναλύουμε το βάρος B σε δυο συνιστώσες ίσες με

$$B_1 = B sin 30^0 = 58.8\,N$$

$$B_2 = B cos 30^0 = 101.8\,N$$

Σε αντίθεση με το Παράδειγμα 3.2 όμως, η στατική τριβή T είναι προς τα πάνω, προσπαθώντας να παρεμποδίσει την συνιστώσα B_1 στο να παρασύρει το σώμα προς τα κάτω.

(β) Κατά την κάθετη κατεύθυνση ως προς το κεκλιμένο επίπεδο, οι δυνάμεις δεν έχουν αλλάξει και έτσι και πάλι από την ισορροπία έχουμε $N = 101.8\ N$.

γ) Αφού το σώμα είναι σε ακινησία, η T αυτοπροσαρμόζεται και γίνεται ίση με την δύναμη που τείνει να κινήσει το σώμα, δηλαδή την B_1. Επομένως

$$T = B_1 = 58.8\ N$$

δ) Εάν η γωνία αλλάξει και από 30^0 γίνει μια μεγαλύτερη γωνία θ, τότε θα αλλάξουν οι συνιστώσες του βάρους σε

$$B_1 = Bsin\theta$$

$$B_2 = Bcos\theta$$

όπως και προηγουμένως, οι N και T αυτοπροσαρμόζονται ώστε να αντιδρούν στις B_2 και B_1 αντιστοίχως. Έτσι

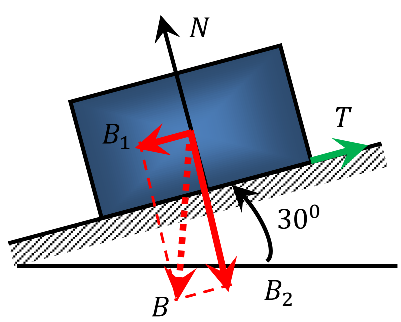
$$T = B_1 = Bsin\theta$$

$$N = B_2 = Bcos\theta$$

Η T όμως δεν μπορεί να αυξηθεί πέρα της μέγιστης τιμής της T_{max}. Έτσι το κιβώτιο ξεκινάει να ολισθαίνει προς τα κάτω όταν $T = T_{max}$. Από την Εξ. 3.5 έχουμε

$$T_{max} = \mu_S N => Bsin\theta = \mu_S Bcos\theta => tan\theta = \mu_S = 0.7$$

Λύνοντας παίρνουμε $\theta = 35^0$



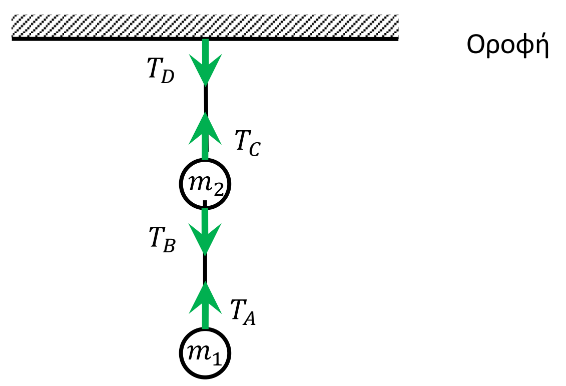
Τάση του Νήματος

Μια άλλη χρήσιμη δύναμη στην Μηχανική είναι η τάση του νήματος T η οποία είναι η δύναμη που ασκεί ένα νήμα όταν αυτό είναι τεντωμένο, βρίσκεται δηλαδή σε εντατική κατάσταση. Το νήμα θεωρείται μη εκτατό, δηλαδή δεν παραμορφώνεται. Εάν παραμορφώνονταν τότε θα θεωρούνταν ως ένα ελατήριο, δείτε παρακάτω. Η δύναμη ενός νήματος έχει τις εξής ιδιότητες:

- $T = 0$ όταν το νήμα είναι χαλαρό ή κοπεί
- Η κατεύθυνση της T είναι η κατεύθυνση του νήματος
- Εάν το νήμα είναι αβαρές (αμελητέα η μάζα του) τότε η T είναι η ίδια σε όλο το μήκος του νήματος. Το αβαρές νήμα ονομάζεται "ιδανικό νήμα".
- Όπως και με την στατική τριβή, δεν υπάρχει τύπος για την τάση του νήματος επειδή αυτή αυτοπροσαρμόζεται (μέχρι να κοπεί τα νήμα) και ο μόνος τρόπος υπολογισμού της είναι από τις άλλες δυνάμεις του προβλήματος όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.6

Στο παρακάτω σχήμα $m_1 = 2\ kg$, $m_2 = 5\ kg$ και τα δυο νήματα είναι αβαρή και μη εκτατά. (α) Να βρεθούν οι τάσεις T_A, T_B, T_C και T_D. (β) Πόσο θα αλλάξουν αυτές οι τιμές εάν κοπεί ξαφνικά το κάτω νήμα; Έστω $g = 10\ m/s^2$ για ευκολία.



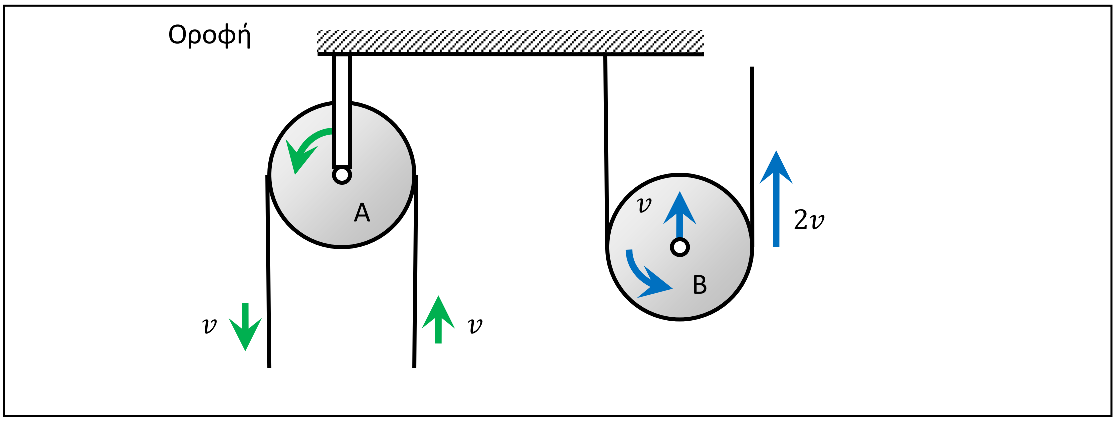
Λύση:

(α) Ξεκινώντας από τη μάζα m_1, σε αυτή δρουν δυο δυνάμεις, το βάρος της που είναι ίσο με $B_1 = m_1 g = 20\ N$ και η T_A. Εφόσον η μάζα ηρεμεί, τότε $T_A = B_1 = 20\ N$. Αφού το κάτω νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό τότε $T_B = T_A = 20\ N$. Στη μάζα m_2 δρούνε τρεις δυνάμεις, το βάρος της $B_2 = m_2 g = 50\ N$, η $T_B = 20\ N$ και η T_C. Εφόσον η μάζα ηρεμεί, τότε οι δυνάμεις πρέπει να αλληλοαναιρούνται δηλαδή $T_C = T_B + B_2 = 70\ N$. Εφόσον το πάνω νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό τότε $T_D = T_C = 70\ N$.

(β) Εάν κοπεί ξαφνικά το κάτω νήμα τότε αυτομάτως $T_B = T_A = 0\ N$ και στην μάζα m_2 δρα μόνο το βάρος της $B_2 = 50\ N$ και η T_C οι οποίες πρέπει να αλληλοαναιρούνται θεωρώντας ότι η m_2 παραμένει ακλόνητη στην θέση της. Έτσι $T_C = B_2 = 50\ N$ και όπως προηγουμένως $T_D = T_C = 50\ N$ για αβαρές και μη εκτατό νήμα.

Δυνάμεις σε τροχαλίες

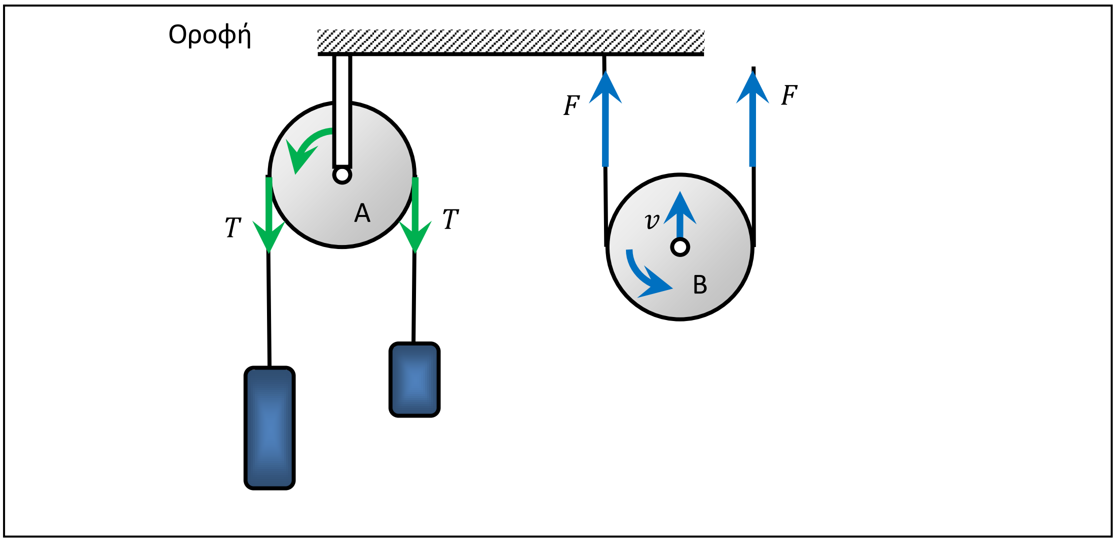
Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, πολλές φορές στη Μηχανική χρησιμοποιούνται οι λεγόμενες τροχαλίες οι οποίες είναι κυκλικοί δίσκοι γύρω από τους οποίους τυλίγεται νήμα χωρίς να γλιστράει επάνω στη περιφέρεια τους. Με αυτό τον τρόπο όταν κινείται το νήμα παρασέρνει και την τροχαλία. Η ιδανική τροχαλία είναι αβαρής, περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από το κέντρο της και το νήμα της είναι ιδανικό. Όταν θα μελετήσουμε την περιστροφική κίνηση σε μεταγενέστερο κεφάλαιο, θα δούμε και τροχαλίες με μάζα διάφορη του μηδενός αλλά σε αυτό το κεφάλαιο όλες οι τροχαλίες θα θεωρούνται ιδανικές.



Σχήμα 3.5. Διάφορες ταχύτητες κατά την κίνηση των τροχαλιών. Στην περίπτωση Α με το κέντρο της τροχαλίας στερεωμένο και στην Β με την μια άκρη του νήματος στερεωμένη.

Υπάρχουν δυο τρόποι να στερεωθεί μια τροχαλία. Στην περίπτωση Α του παραπάνω Σχήματος 3.5, το κέντρο της τροχαλίας στερεώνεται σε ακλόνητο σημείο όπως π.χ. σε μια οροφή. Έτσι η τροχαλία δεν μπορεί να μετακινηθεί αλλά μόνο να περιστραφεί ελεύθερα γύρω από το κέντρο της. Όσο νήμα μαζεύεται από την τροχαλία από την μια μεριά της, άλλο τόσο απελευθερώνεται από την άλλη μεριά της. Έτσι και τα δυο μέρη του νήματος κινούνται με την ίδια ταχύτητα αλλά με αντίθετες κατευθύνσεις. Στην περίπτωση Β αντιθέτως, το ένα άκρο του νήματος στερεώνεται σε ακλόνητο σημείο και έτσι η τροχαλία μπορεί και κυλάει με ταχύτητα v (το κέντρο της), υποθέτοντας ότι ασκείται κάποια δύναμη στο άλλο άκρο του νήματος. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το ένα μέρος του νήματος να είναι ακίνητο και το άλλο να κινείται με ταχύτητα $2v$ (θα δούμε γιατί γίνεται αυτό όταν μελετήσουμε την κύλιση στο Κεφ. 10, για τώρα απλά θεωρήστε το δεδομένο).

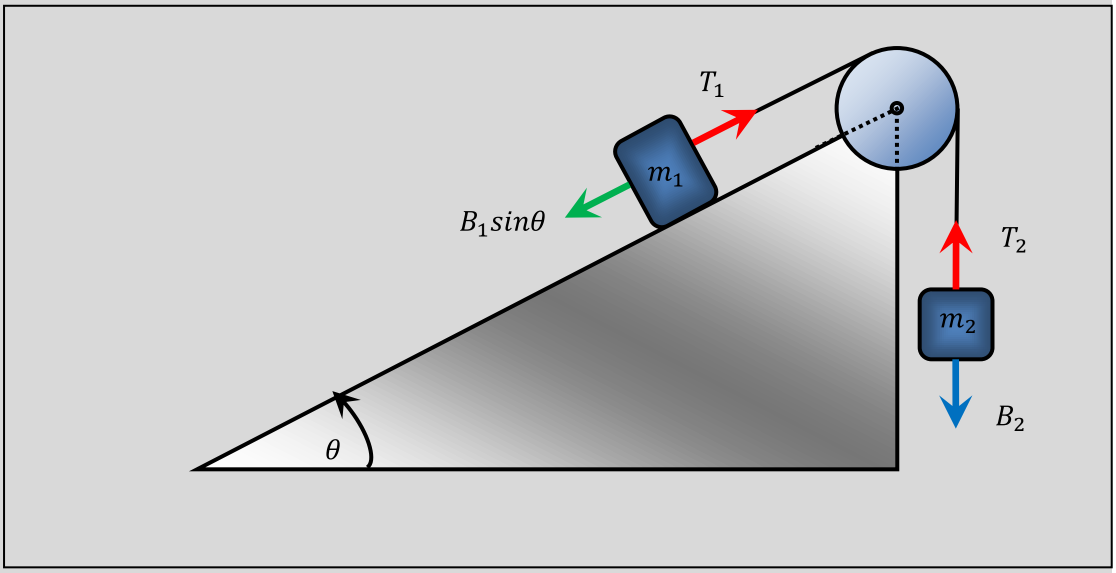
Όσον αφορά στις δυνάμεις, η ιδανική τροχαλία διατηρεί το μέτρο της δύναμης από την μια πλευρά της στην άλλη, απλά αλλάζει την κατεύθυνση της δύναμης. Έτσι στην περίπτωση Α του παρακάτω σχήματος, παρότι που η μεγάλη μάζα παρασύρει την μικρή μάζα, εντούτοις και οι δυο τάσεις T του νήματος που δρουν στο νήμα είναι ίσες μεταξύ τους. Η τάση αυτοπροσαρμόζεται ώστε να είναι μικρότερη από το βάρος της μάζας στα αριστερά και μεγαλύτερη από το βάρος της μάζας στα δεξιά και έτσι οι δυο μάζες κινούνται όπως στο σχήμα. Στην περίπτωση Β όπου η τροχαλία έλκεται από μια δύναμη F στο ελεύθερο άκρο του νήματος, τότε και στην άλλη πλευρά της τροχαλίας εμφανίζεται μια δύναμη ίδιου μέτρου F η οποία ασκείται από το ακλόνητο σημείο πρόσδεσης στο νήμα.



Σχήμα 3.6. Οι δυνάμεις στις δυο περιπτώσεις σύνδεσης της τροχαλίας.

Παράδειγμα 3.7

Στο παρακάτω σχήμα δεν υπάρχει τριβή μεταξύ του κεκλιμένου επιπέδου και της μάζας m_1 και η τροχαλία είναι ιδανική. Να βρεθεί η γωνία θ εάν όλο το σύστημα ισορροπεί με δεδομένα τα m_1, m_2 και g



Λύση:

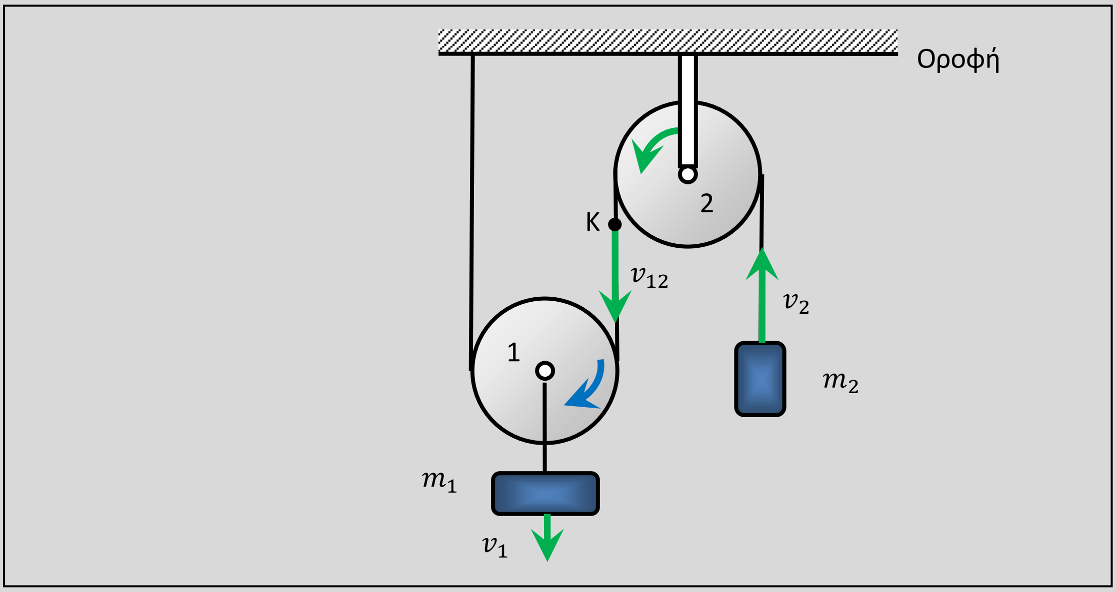
Ξεκινώντας από τη μάζα m_2, σε αυτή δρουν δυο δυνάμεις, το βάρος της $B_2 = m_2 g$ και η T_2. Εφόσον η μάζα ηρεμεί, τότε $T_2 = B_2 = m_2 g$. Αφού το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό τότε $T_1 = T_2 = m_2 g$. Στη μάζα m_2 κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου δρούνε δυο δυνάμεις, η συνιστώσα του βάρους $B_1 sin\theta = m_1 g sin\theta$ και η T_1. Εφόσον η μάζα ηρεμεί, τότε $m_1 g sin\theta = T_1 = m_2 g$. Λύνοντας παίρνουμε $sin\theta = m_2/m_1$.

Παράδειγμα 3.8

Στο παρακάτω σχήμα, οι τροχαλίες είναι ιδανικές. Εάν η επιτάχυνση της μάζας m_1 είναι a_1, να βρεθεί η επιτάχυνση της μάζας m_2. Θεωρήστε ότι $m_1 > m_2$.

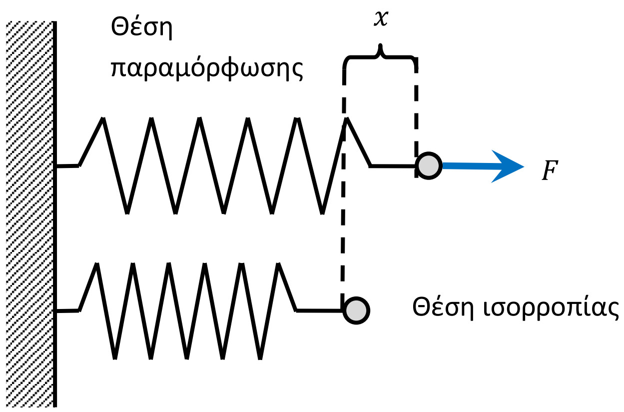
Λύση: Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, όταν έχουμε τροχαλία της οποίας το ένα άκρο του νήματος είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο, όπως στην τροχαλία 1 του σχήματος, η ταχύτητα του νήματος στην ελεύθερη μεριά είναι διπλάσια από αυτή του κέντρου της τροχαλίας. Επομένως εάν v_1 είναι η ταχύτητα της μάζας m_1 και v_{12} η ταχύτητα ενός σημείου Κ επάνω στο κοινό νήμα μεταξύ των δυο τροχαλιών, τότε ισχύει $v_{12} = 2v_1$. Για την τροχαλία 2 και οι δυο πλευρές του νήματος της κινούνται με την ίδια ταχύτητα αλλά με αντίθετη φορά και επομένως $v_2 = -v_{12}$ όπου v_2 είναι η ταχύτητα της μάζας m_2. Εάν απαλείψουμε το v_{12} οδηγεί στο $v_2 = -2v_1$ και με παραγώγιση ως προς το χρόνο παίρνουμε

$$a_2 = -2a_1$$



Δύναμη Ελατηρίου

Έστω ένα ελατήριο που το ένα του άκρο είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο όπως στο παρακάτω σχήμα. Εάν δεν δρα καμία δύναμη στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου, τότε αυτό έχει το φυσικό του μήκος και λέμε ότι βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του. Αντιθέτως όταν μια δύναμη F δράσει στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου, τότε το μήκος του αυξάνει κατά x το οποίο ονομάζεται “παραμόρφωση” και λέμε ότι το ελατήριο παραμορφώθηκε.

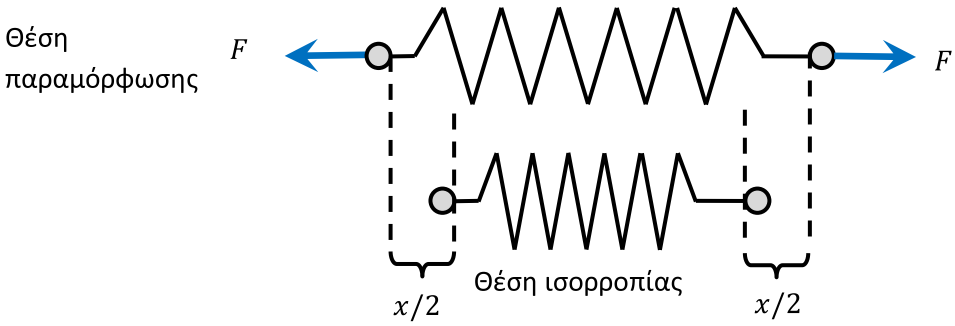


Η δύναμη F και η παραμόρφωση x σχετίζονται μέσω του νόμου του Hook:

$F = kx$	ΔΥΝΑΜΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ	(3.6)

όπου k είναι η λεγόμενη “σταθερά του ελατηρίου”, χαρακτηριστική για κάθε ελατήριο και η φυσική της σημασία είναι ότι όσο μεγαλύτερη είναι, τόσο δυσκολότερο είναι να παραμορφωθεί το ελατήριο.

Εάν το ελατήριο παραμορφώνεται και από τις δυο μεριές του όπως στο παρακάτω σχήμα και δεν μετατοπίζεται ως σώμα, τότε οι δυνάμεις θα πρέπει να είναι ίσες και αντίθετες στις δυο μεριές. Αλλά ακόμα και εάν μετατοπίζεται προς την μια ή την άλλη κατεύθυνση, εάν θεωρηθεί αβαρές, οι δυο δυνάμεις πρέπει να είναι και πάλι ίσες, όπως και στην περίπτωση του ιδανικού νήματος. Ο νόμος του Hook $F = kx$ ισχύει και πάλι με την F να είναι ίση με μια από τις δυο δυνάμεις και $x = x/2 + x/2$ να είναι η συνολική αλλαγή του μήκους του ελατηρίου σε σχέση με το φυσικό του μήκος.



<u>Σημείωση</u>: Στην Εξ. 3.6 παραπάνω, η δύναμη F είναι η εξωτερική δύναμη που ασκεί κάποιος στο ελατήριο για να το παραμορφώσει. Βέβαια το ελατήριο ασκεί και αυτό μια αντίθετη δύναμη $F_E = -F = -kx$ σε αυτόν που παραμορφώνει το ελατήριο. Αυτό το γνωρίζουμε από την καθημερινή μας εμπειρία αφού αισθανόμαστε καταπόνηση όταν προσπαθούμε να

κρατήσουμε ένα ελατήριο παραμορφωμένο, ειδικά εάν πρόκειται για ισχυρό ελατήριο. Το μείον στην σχέση $F_E = -kx$ δείχνει την φορά της δύναμης αυτής, η οποία είναι πάντα αντίθετη στην παραμόρφωση x.

$F_E = -kx$	ΔΥΝΑΜΗ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ	(3.7)

Τι συμβαίνει άραγε στην σταθερά k ενός ελατηρίου εάν ελαττώσουμε το μήκος του, αλλάξουμε το υλικό του (κρατώντας τις ίδιες διαστάσεις) ή αυξήσουμε την διάμετρό του; Αλλάζει η k; Εάν ναι, κατά πόσο; Αποδεικνύεται (η απόδειξη είναι εκτός του σκοπού του παρόντος συγγράμματος) ότι η σταθερά του ελατηρίου ισούται με

$k = \frac{EA}{L}$	ΣΤΑΘΕΡΑ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ	(3.8)

όπου L το φυσικό μήκος του ελατηρίου, A η διατομή του και το E είναι μια ιδιότητα του υλικού, γνωστή ως το "μέτρο ελαστικότητας του Young", το οποίο εξαρτάται μόνο από το υλικό, για παράδειγμα χαρακτηριστικές τιμές του φαίνονται στο παρακάτω Πίνακα 3.1 σε μονάδες GN/m^2 (GN: $GigaNewton = 10^9 N$). Με την βοήθεια της παραπάνω Εξ. 3.8 μπορούμε να απαντήσουμε σε όλες τις προηγούμενες ερωτήσεις.

Υλικό	$E(GN/m^2)$	Υλικό	$E(GN/m^2)$
Καουτσούκ	0.01-0.1	Χαλκός	117
Νάιλον	2	Πυρίτιο	130
Ξύλο	11	Σίδηρος	190
Οστό	14	Ατσάλι	200
Μπετόν	30	Βολφράμιο	410
Γυαλί	50	Silicon carbide	450
Αλουμίνιο	69	Tungsten carbide	450
Μπρούντζος	96	Ανθρακόνημα	1000
Ορείχαλκος	100	Γραφένιο	1050
Τιτάνιο	110	Διαμάντι	1200

Πίνακας 3.1

Παράδειγμα 3.9

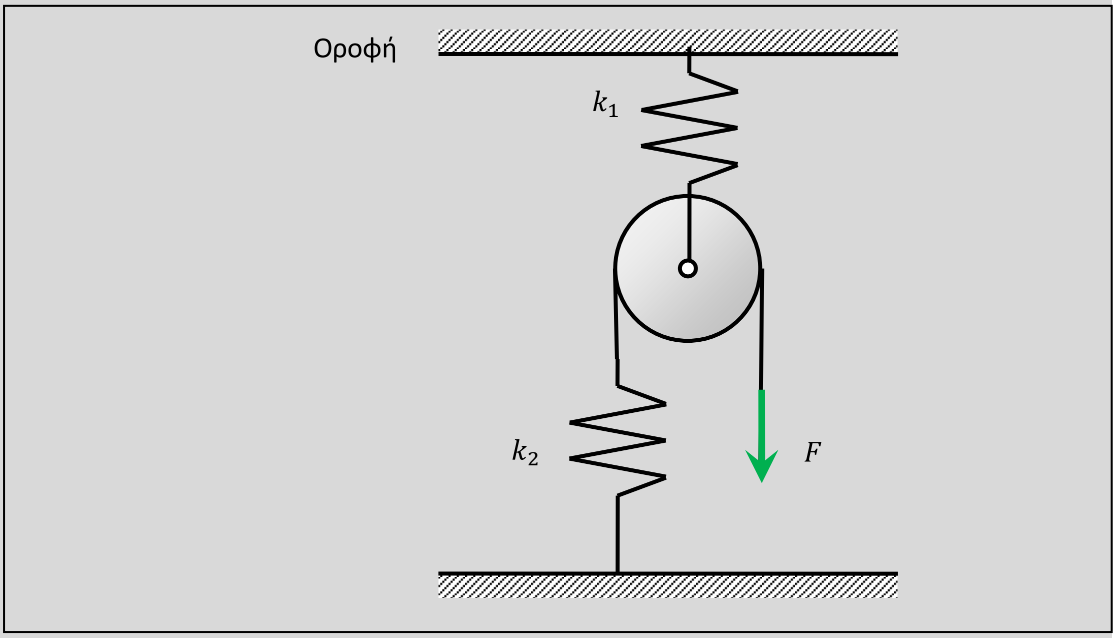
Στο παρακάτω σχήμα, η τροχαλία είναι ιδανική και μια δύναμη $F = 160\ N$ εφαρμόζεται στη δεξιά πλευρά της. Εάν οι σταθερές ελατηρίου είναι $k_1 = 550\ N/m$ και $k_2 = 200\ N/m$ και το όλο σύστημα ισορροπεί, να βρεθούν τα εξής: (α) Η δύναμη που ασκείται στο κάτω ελατήριο (β) Η παραμόρφωση x_2 του ελατηρίου αυτού.

Λύση:

(α) Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, μια ιδανική τροχαλία μεταφέρει την δύναμη από την μια πλευρά της στην άλλη και άρα μια δύναμη ίσου μέτρου με την $F = 160\ N$ θα ασκηθεί στο κάτω ελατήριο

(β) Από τον νόμο του Hook Εξ. 33(6) παίρνουμε

$$x_2 = \frac{F}{k_2} = \frac{160}{200} = 0.8\ m$$

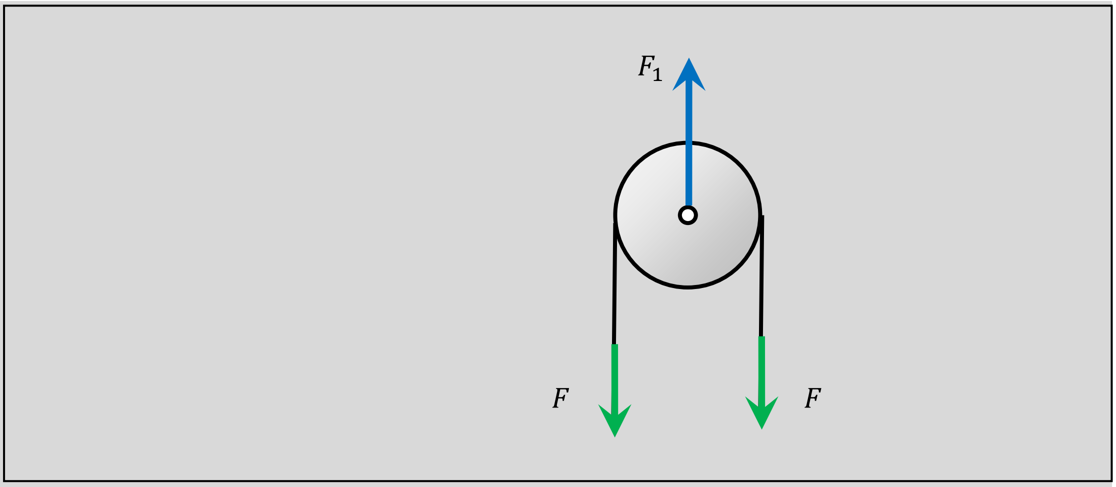


Παράδειγμα 3.10

Στο προηγούμενο παράδειγμα να βρεθεί (α) η δύναμη που ασκείται στο πάνω ελατήριο εάν είναι γνωστό ότι το ελατήριο αυτό έλκει την τροχαλία με την ίδια δύναμη που το έλκει και αυτή (βασικά αυτός είναι ο 3^{ος} νόμος δράσης-αντίδρασης του Νεύτωνα αλλά δεν τον έχουμε αναφέρει ακόμα), (β) Η παραμόρφωση x_1 του ελατηρίου αυτού και (γ) πόσο μήκος ξετυλίχθηκε από το νήμα λόγω εφαρμογή της δύναμης;

Λύση:

(α) Είδαμε ότι στο κάτω ελατήριο εφαρμόζεται δύναμη F ίση με την δεδομένη και σύμφωνα με την εκφώνηση, και το ελατήριο θα ασκεί μια δύναμη F στην τροχαλία προς τα κάτω. Επομένως οι δυνάμεις στην τροχαλία θα είναι όπως στο παρακάτω σχήμα:



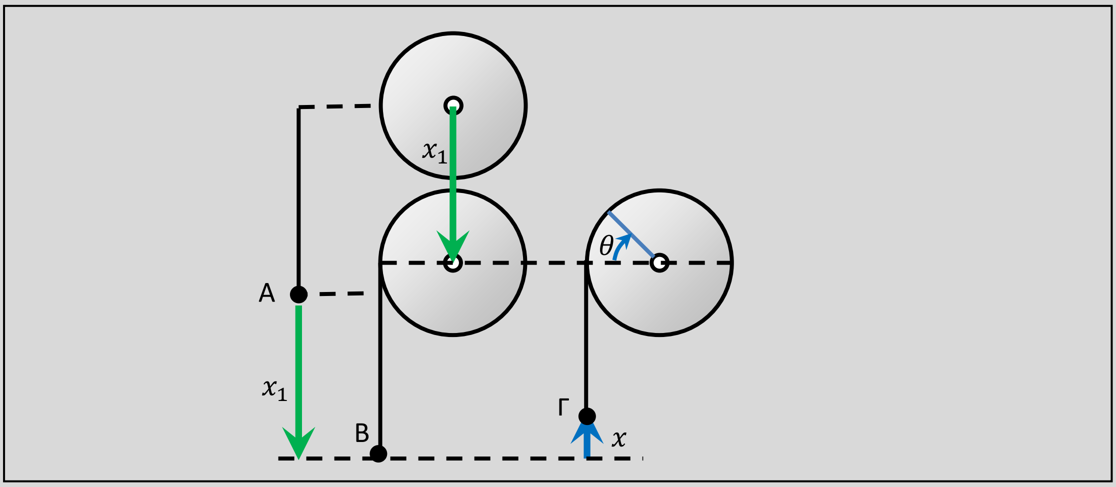
όπου F_1 είναι η δύναμη με την οποία το πάνω ελατήριο έλκει την τροχαλία. Αφού το σύστημα ισορροπεί, τότε πρέπει η F_1 να αναιρεί τις άλλες δυο δυνάμεις και έτσι:

$$F_1 = 2F = 320\ N$$

(β) Σύμφωνα με την εκφώνηση, στο πάνω ελατήριο θα ασκείται μια δύναμη $F_1{}'$ από την τροχαλία ίση με αυτή που το ελατήριο την έλκει, δηλαδή $F_1' = F_1 = 320\ N$. Από τον νόμο του Hook Εξ. 3.6 παίρνουμε

$$x_1 = \frac{F_1{}'}{k_1} = \frac{320}{550} = 0.58\ m$$

(γ) Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η τροχαλία εκτελεί ταυτόχρονα δυο κινήσεις. Μια μεταφορική προς τα κάτω λόγω παραμόρφωσης του ελατηρίου 1 κατά x_1. Έτσι ένα σημείο Α στο αριστερό κομμάτι του νήματος μετακινείται προς τα κάτω κατά x_1 και έρχεται στο σημείο Β (το νήμα δείχνεται μετατοπισμένο για ευκολία ανάγνωσης). Ταυτόχρονα η τροχαλία εκτελεί περιστροφική κίνηση κατά γωνία θ και έτσι το σημείο Β ανέρχεται στο σημείο Γ κατά x λόγω περιστροφής του νήματος που είναι και το ζητούμενο (και πάλι η τροχαλία δείχνεται μετατοπισμένη για ευκολία ανάγνωσης). Επομένως η συνολική μετατόπιση προς τα κάτω του νήματος στα αριστερά είναι $x_1 - x$ και αφού αυτό το νήμα είναι συνδεδεμένο στο ελατήριο 2, αυτή είναι και η παραμόρφωση του κάτω ελατηρίου x_2 .



Επομένως $x_2 = x - x_1$. Λύνοντας

$$x = x_2 + x_1 = 0.80 + 0.58 = 1.38\ m$$

Ισορροπία Υλικού Σημείου

Σε πολλές περιπτώσεις δρουν περισσότερες της μιας δύναμης $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ … σε ένα υλικό σημείο. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η συνολική (συνιστάμενη) δύναμη $\Sigma\vec{F}$ προκύπτει με διανυσματικό άθροισμα όλων των δυνάμεων

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \dots$$

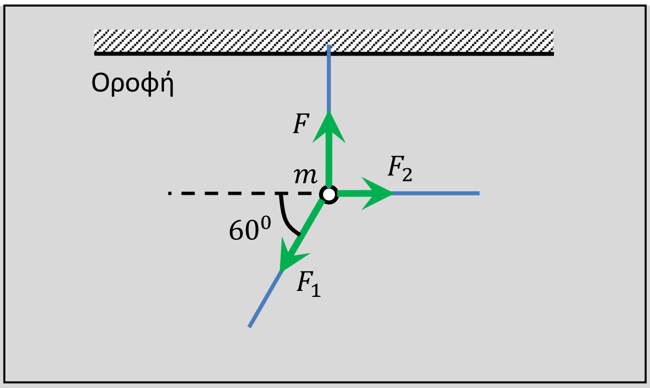
(το σύμβολο "Σ" συμβολίζει την άθροιση στα Μαθηματικά). Εάν η συνολική δύναμη είναι μηδέν και το σώμα ακίνητο, τότε αυτό δεν τείνει να μετακινηθεί. Δηλαδή εάν το σώμα έχει αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0 = 0$, θα παραμείνει εσαεί ακίνητο. Αυτή η κατάσταση είναι γνωστή ως "ισορροπία". Θυμηθείτε ότι στα μέχρι τώρα κεφάλαια, τα σώματα που εξετάζουμε έχουν την μορφή ενός υλικού σημείου επομένως η παρακάτω συνθήκη ισορροπίας

$\Sigma\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \dots = 0$ και $\vec{v}_0 = 0$	ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ	(3.9)

ισχύει μόνο για σημειακά σώματα. Θα δούμε στο Κεφ. 8 την πιο γενική περίπτωση ισορροπίας ενός στερεού σώματος και πως γενικεύεται η παραπάνω Εξίσωση 3.9. Προσέξτε ότι αυτή η εξίσωση είναι διανυσματική που σημαίνει ότι πρέπει να ισχύει τόσο για τις x-συνιστώσες όσο και για τις y. Τα παρακάτω παραδείγματα θα αποσαφηνίσουν καλύτερα την έννοια της ισορροπίας.

Παράδειγμα 3.11

Στο παρακάτω σχήμα, τρία διαφορετικά νήματα συγκρατούν μια σημειακή μάζα m σε ισορροπία. Πόση πρέπει να είναι η δύναμη F από την οροφή ώστε η σημειακή μάζα m να ισορροπεί; Αγνοήστε τη βαρύτητα θεωρώντας ότι $m \to 0$. Δίνονται $F_1 = 10\ N$ και $F_2 = 20\ N$.



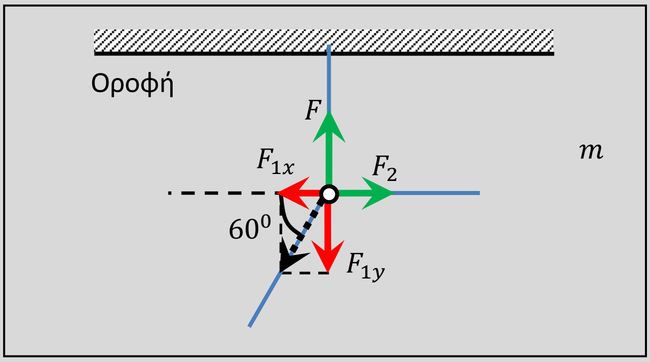
Λύση:

Στο παρακάτω σχήμα αναλύουμε την F_1 σε συνιστώσες και έχουμε

$$F_{1x} = -F cos60^0 = -20 \times 0.5 = -10$$

$$F_{1y} = -F sin60^0 = -20 \times \sqrt{3}/2 = -10\sqrt{3}$$

Τα αρνητικά πρόσημα είναι επειδή και οι δυο συνιστώσες βλέπουν προς τους αρνητικούς άξονες συντεταγμένων.



Βλέπουμε ότι κατά x ικανοποιείται η συνθήκη ισορροπίας αφού

$$\Sigma F_x = F_2 + F_{1x} = 10 + (-10) = 0$$

Παρομοίως περιμένουμε να ικανοποιείται η συνθήκη ισορροπίας και κατά y οπότε:

$$\Sigma F_x = F + F_{1y} = 0 => F + \left(-10\sqrt{3}\right) = 0 => F = 17.3\ N$$

Παράδειγμα 3.12

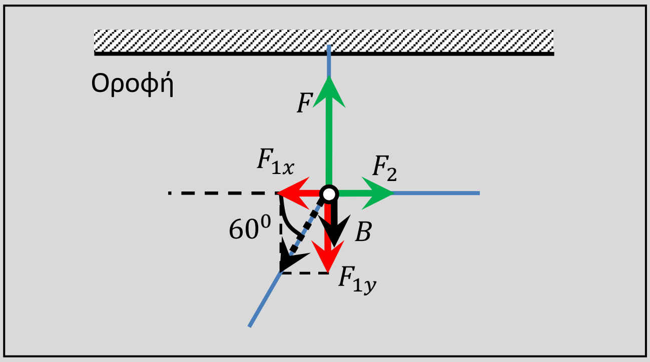
Πως θα άλλαζε η απάντησή σας στο προηγούμενο παράδειγμα εάν η μάζα δεν ήταν αμελητέα αλλά ίση με $m = 0.25\ kg$; Πάρτε $g \approx 10\ m/s^2$ για ευκολία.

Λύση:

Στον αρνητικό άξονα y θα εμφανιστεί τώρα μαζί την F_{1y} και η δύναμη του βάρους

$$B = -mg = -0.25\times 10 = -2.5\ N$$

η οποία είναι φυσικά αρνητική επειδή έχει φορά προς τα κάτω.



Έτσι η συνθήκη ισορροπίας κατά x δεν επηρεάζεται αφού και πάλι

$$\Sigma F_x = F_2 + F_{1x} = 10 + (-10) = 0$$

Αντιθέτως η συνθήκη ισορροπίας κατά y αλλάζει λόγω της εμφάνισης του B ως εξής:

$$\Sigma F_x = F + F_{1y} + B = 0 => F + \left(-10\sqrt{3}\right) + (-2.5) = 0 => F = 19.8\ N$$

Ο 3ος νόμος του Νεύτωνα

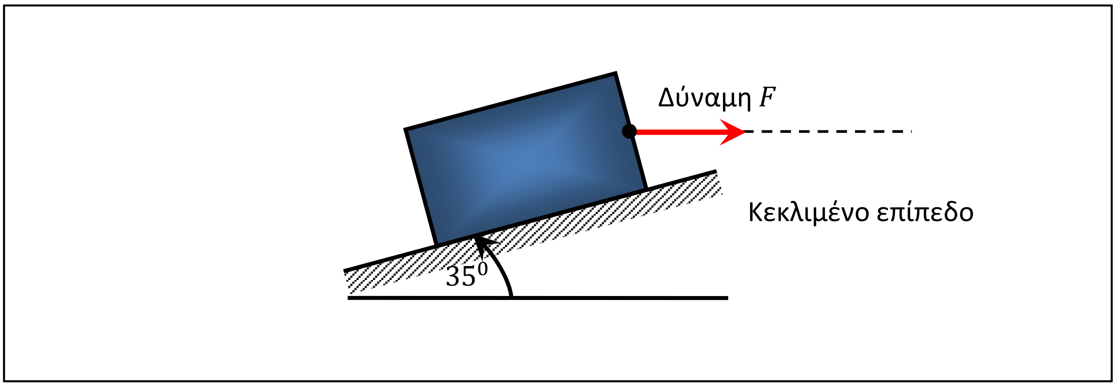
Στο επόμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε την επίδραση των δυνάμεων στην κίνηση. Αυτό ονομάζεται "δυναμική" η οποία περιγράφεται πλήρως από τους τρεις νόμους του Νεύτωνα, γνωστοί ως ο 1ος , ο 2ος και ο 3ος. Στο παρόν εδάφιο θα μελετήσουμε ξεχωριστά μόνο τον 3ο νόμο του Νεύτωνα, γνωστό και ως ο νόμος "**δράσης-αντίδρασης**", λόγω της χρήσης του σε πολλά προβλήματα αυτού του κεφαλαίου. Η διατύπωση του νόμου είναι η εξής: Έστω ότι $\vec{F}_{21}$ είναι η δύναμη που ασκεί το σώμα 1 σε ένα άλλο σώμα 2, και $\vec{F}_{12}$ είναι η δύναμη που το σώμα 2 ασκεί στο σώμα 1. Αυτές οι δυο δυνάμεις εμφανίζονται πάντοτε κατά ζεύγη σε κάποιο κοινό σημείο επαφής των δυο σωμάτων αλλά μπορεί και να είναι εξ' αποστάσεως όπως θα δούμε στον Ηλεκτρισμό. Τότε πάντοτε οι δυο αυτές δυνάμεις είναι ίσες και αντίθετες, δηλαδή ισχύει εξ' ορισμού ότι:

$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$	3ΟΣ ΝΟΜΟΣ ΝΕΥΤΩΝΑ	(3.10)

Προβλήματα

<u>Μηχανικές Δυνάμεις και 3ος Νόμος του Νεύτωνα</u>

3.1 Στο παρακάτω σχήμα ένας φοιτητής εφαρμόζει μια οριζόντια δύναμη F σε ένα κιβώτιο μάζας $m = 1.5\ kg$. Θεωρήστε ότι το κιβώτιο παραμένει σε ισορροπία σε όλα τα παρακάτω ερωτήματα: (α) Εάν δεν υπάρχει τριβή μεταξύ του επιπέδου και του κιβωτίου, να βρεθεί η τιμή της F καθώς και της κάθετης αντίδρασης N από το επίπεδο στο κιβώτιο. (β) Εάν υπάρχει στατική τριβή μεταξύ του επιπέδου και του κιβωτίου με φορά προς τα πάνω, και $F = 2\ N$ να βρεθεί η δύναμη της τριβής T καθώς και η κάθετη αντίδραση N και (γ) Εάν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του επιπέδου και του κιβωτίου είναι $\mu_S = 0.65$, να βρεθεί η ελάχιστη δύναμη F που μπορεί να εφαρμόσει ο φοιτητής πριν το κιβώτιο να αρχίσει να ολισθαίνει προς τα κάτω. Μπορείτε να πάρετε $g \approx 10\ m/s^2$ για ευκολία.

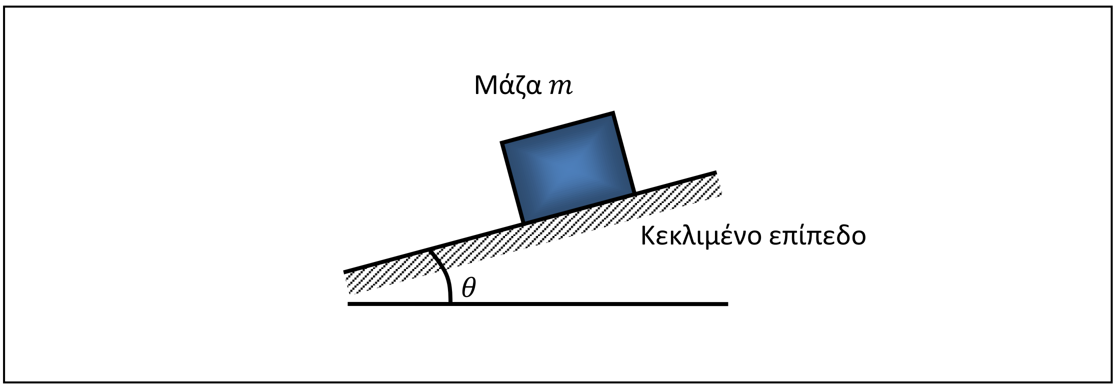


<u>Απάντηση</u>: (α) 10.5 & $18.3\ N$, (β) 6.96 & $23.8\ N$ και (γ) $0.517\ N$

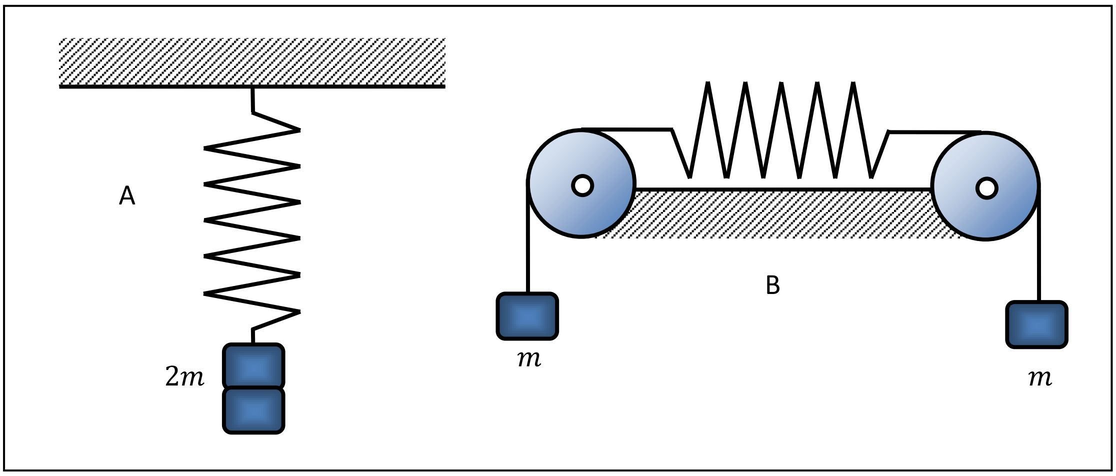
3.2 Στο προηγούμενο πρόβλημα να απαντηθεί το ερώτημα γ εάν η F είναι αρκετά μεγαλύτερη από την F_{min}, ώστε η στατική τριβή είναι προς τα κάτω, αλλά επίσης να παίρνει οριακή τιμή ώστε το σώμα να μην ολισθαίνει προς τα πάνω.

<u>Απάντηση</u>: $1.38\ N$

3.3 Στο παρακάτω σχήμα έστω ότι οι συντελεστές στατικής τριβής και τριβής ολίσθησης είναι $\mu_S = 1$ και $\mu = 0.5$ αντίστοιχα και $m = 2\ kg$. Ένας φοιτητής μεταβάλλει τη γωνία θ από 0^0 έως 60^0. Να γίνει η γραφική παράσταση της τριβής T συναρτήσει της γωνίας θ. Η τριβή είτε στατική είτε ολίσθησης να θεωρηθεί ως μια ενιαία μεταβλητή στη γραφική παράσταση. Μπορείτε να πάρετε $g \approx 10\ m/s^2$ για ευκολία.

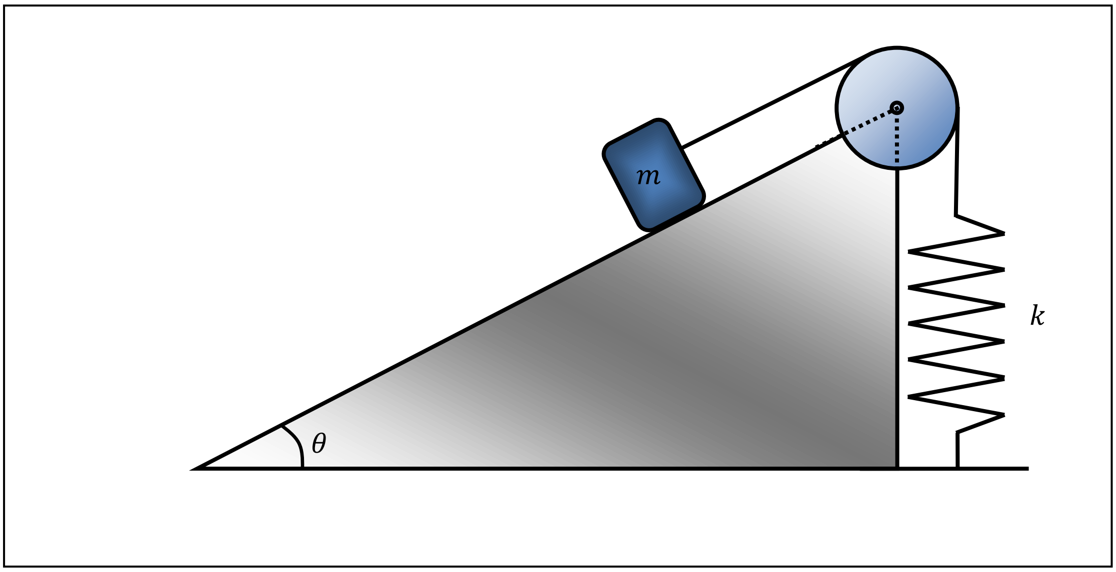


3.4 Στο παρακάτω σχήμα βλέπετε το ίδιο ελατήριο και τις ίδιες δυο μάζες m σε δυο διαφορετικούς συνδυασμούς. Τα νήματα και οι τροχαλίες είναι ιδανικά. (α) Να σχεδιαστούν όλες οι δυνάμεις των συστημάτων ελατηρίου-μαζών να υπολογισθούν τα μέτρα τους εάν είναι γνωστό ότι υπάρχει παντού ισορροπία και κάνοντας χρήση και του 3^{ου} νόμου του Νεύτωνα σε διάφορα σημεία επαφής μεταξύ διαφορετικών σωμάτων. (β) Εάν η παραμόρφωση του ελατηρίου στην περίπτωση Α είναι ίση με x, να βρεθεί πόση είναι στην περίπτωση Β.



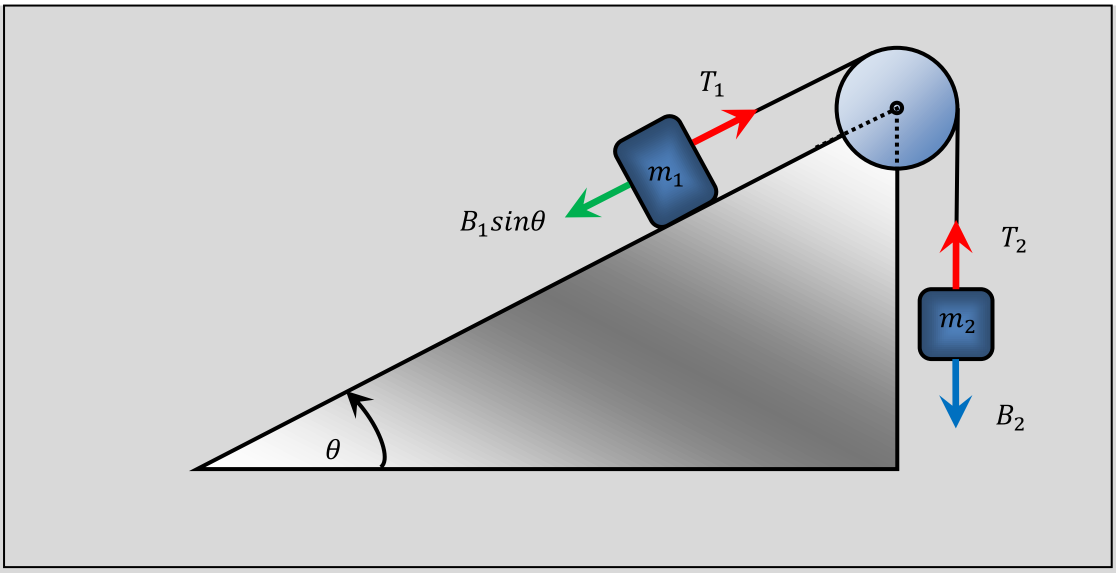
<u>Απάντηση</u>: $x_B = x_A/2$

3.5 Στο παρακάτω σχήμα έστω ότι $\theta = 42^0$, η σταθερά του ελατηρίου ισούται με $k = 3\ N/m$ και υπάρχει συντελεστής στατικής τριβής $\mu = 0.4$ μεταξύ του κεκλιμένου επιπέδου και της μάζας m. Η τροχαλία είναι ιδανική ενώ το ελατήριο είναι αβαρές και σταθερά προσδεμένο στο έδαφος με παραμόρφωση $x = 0.4\ m$ προς τα πάνω σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Εάν το όλο σύστημα ισορροπεί και η στατική τριβή είναι προς τα πάνω και στο οριακό της σημείο, (α) να σχεδιασθούν και να εξηγηθούν όλες οι δυνάμεις του συστήματος, (β) να βρεθεί η μάζα m και (γ) να βρεθεί η κάθετη αντίδραση που ασκείται στη μάζα m. Πάρτε για ευκολία $g = 10\ m/s^2$.



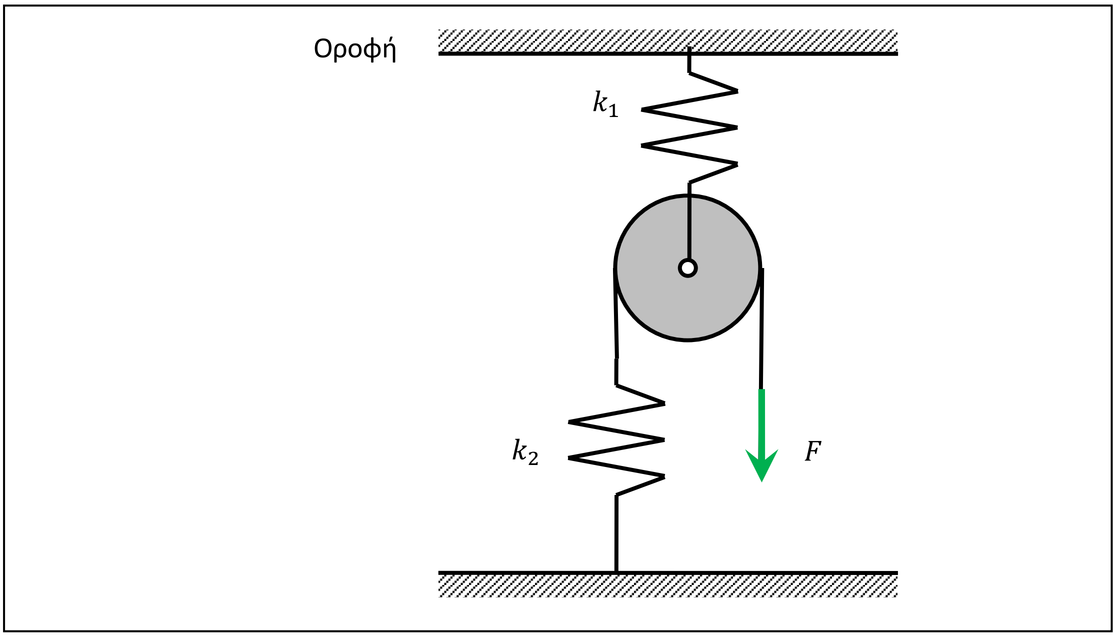
Απάντηση: (β) $0.446\ kg$, (γ) $3.31\ N$

3.6 Στο παρακάτω σχήμα $m_2 = 2m_1$, $\theta = 30^0$ και υπάρχει στατική τριβή μεταξύ κεκλιμένου επιπέδου και μάζας με συντελεστή μ_S. Η τροχαλία είναι ιδανική και το όλο σύστημα ισορροπεί οριακά, δηλαδή εάν η $m_2 > 2m_1$ τότε η m_2 θα έτεινε προς τα κάτω. Κάνοντας χρήση της συνθήκης ισορροπίας αλλά και του 3ου νόμου του Νεύτωνα σε διάφορα σημεία επαφής μεταξύ διαφορετικών σωμάτων, (α) να σχεδιασθούν και να εξηγηθούν όλες οι δυνάμεις του συστήματος και (β) να βρεθεί ο συντελεστής μ_S. Πάρτε για ευκολία $g = 10\ m/s^2$.



Απάντηση: (β) $\sqrt{3}$

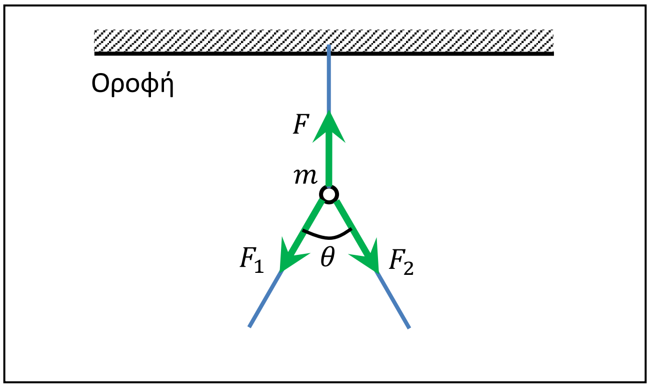
3.7 Στο παρακάτω σχήμα να βρεθεί η ολική σταθερά ελατηρίου k του συστήματος συναρτήσει των k_1 και k_2



Απάντηση: $k_1 k_2/(k_2 + 2k_1)$

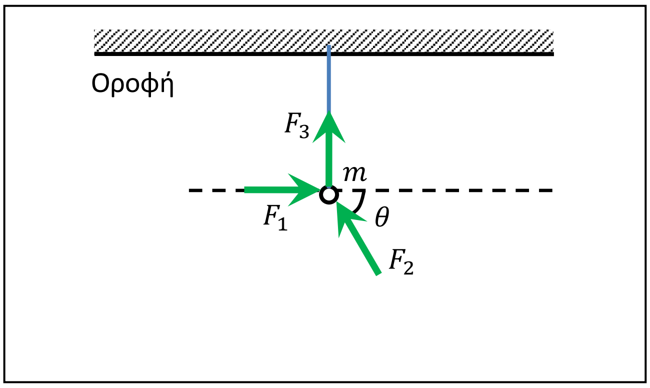
Ισορροπία Υλικού Σημείου

3.8 Στο παρακάτω σχήμα, τρία διαφορετικά νήματα συγκρατούν μια σημειακή μάζα m σε ισορροπία. Εάν $F_1 = F_2$, $F = \sqrt{3}/2\, F_1$ και η σημειακή μάζα m να ισορροπεί, πόση πρέπει να είναι η γωνία θ; Αγνοήστε τη βαρύτητα θεωρώντας ότι $m \to 0$.



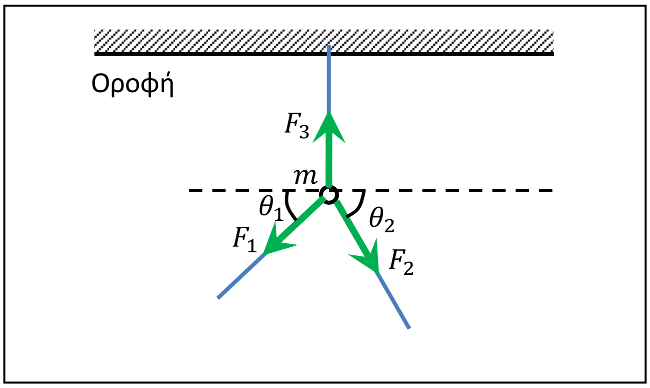
Απάντηση: 60^0

3.9 Στο παρακάτω σχήμα, ένα κατακόρυφο νήμα συγκρατεί μια σημειακή μάζα $m = 0.2\ kg$ από την οροφή. Εκτός από την τάση του νήματος που είναι ίση με $F_3 = 1.2\ N$, στο σώμα ασκούνται και άλλες δυο δυνάμεις, η F_1 που είναι οριζόντια και η $F_2 = 0.9\ N$. Να βρεθεί η γωνία θ αλλά και η δύναμη F_1 εάν η μάζα βρίσκεται σε ισορροπία. Πάρτε $g \approx 10\ m/s^2$ για ευκολία.



Απάντηση: 53.1^0, $0.72\ N$

3.10 Στο παρακάτω σχήμα, τρία διαφορετικά νήματα συγκρατούν μια σημειακή μάζα m σε ισορροπία και ισχύει για τις τάσεις τους ότι $F_1 = 3$, $F_2 = 1$, $F_3 = \sqrt{8}$ (όλες σε N) και η F_3 είναι κατακόρυφη. Εάν η σημειακή μάζα m ισορροπεί, πόσο πρέπει να είναι οι γωνίες θ_1 και θ_2; Αγνοήστε τη βαρύτητα θεωρώντας ότι $m \to 0$.



Απάντηση: 70.5^0 και 0^0

4. ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ – ΥΛΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την επίδραση των δυνάμεων στην κίνηση. Αυτό ονομάζεται “δυναμική” η οποία περιγράφεται πλήρως από τους τρεις νόμους του Νεύτωνα που είναι η βάση όλης της Μηχανικής, με την προϋπόθεση ότι δεν έχουμε να κάνουμε με τεράστιες ταχύτητες της τάξης της ταχύτητας του φωτός αλλά ούτε και με μικροσκοπικά σώματα της τάξης του μεγέθους ενός ατόμου. Στο προηγούμενο Κεφάλαιο μελετήσαμε τον 3^{ο} νόμο του Νεύτωνα και επομένως εδώ θα μελετήσουμε τους άλλους δυο.

1^{ος} νόμος του Νεύτωνα

Ο 1^{ος} νόμος του Νεύτωνα, γνωστός και ως ο "**νόμος της αδράνειας**", είναι ο εξής: Απουσία δυνάμεων σε ένα σώμα, αυτό διατηρεί την κινητική του κατάσταση, δηλαδή εάν κινούνταν με ταχύτητα $\vec{v}$, τότε θα συνεχίσει να κινείται σε ευθεία γραμμή με την ίδια ταχύτητα $\vec{v}$ ενώ εάν ήταν ακίνητο, θα παραμείνει εσαεί ακίνητο.

2^{ος} νόμος του Νεύτωνα

Παρουσία ενός αριθμού δυνάμεων σε ένα σώμα με συνισταμένη $\Sigma\vec{F}$, αυτό αποκτάει επιτάχυνση $\vec{a}$ που δίνεται από τον τύπο

$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$	2^{ΟΣ} ΝΟΜΟΣ ΝΕΥΤΩΝΑ	(4.1)

όπου m είναι η μάζα του σώματος. Προσέξτε ότι η παραπάνω είναι διανυσματική εξίσωση. Σύμφωνα με αυτά που είπαμε στον πολλαπλασιασμό διανυσμάτων με αριθμό, το $\Sigma\vec{F}$και η $\vec{a}$ έχουν πάντοτε την ίδια κατεύθυνση εφόσον η μάζα είναι εξ ’ορισμού θετική. Επίσης μπορούμε να γράψουμε και για τα αντίστοιχα μέτρα μια παρόμοια εξίσωση:

$\Sigma F = m\alpha$	2^{ΟΣ} ΝΟΜΟΣ ΝΕΥΤΩΝΑ - ΜΕΤΡΟ	(4.2)

Στην παραπάνω εξίσωση το ΣF έχει την έννοια της διανυσματικής άθροισης όλων των δυνάμεων ακολουθούμενη από την πράξη του μέτρου. Από την άλλη, εάν μας είναι πιο βολικό, μπορούμε να αναλύσουμε και σε συνιστώσες. Είδαμε στον εδάφιο με τα διανύσματα ότι όταν πολλαπλασιάζουμε ένα διάνυσμα με ένα αριθμό, την μάζα στην προκειμένη περίπτωση, τότε πολλαπλασιάζονται και οι συνιστώσες της με τον ίδιο αριθμό. Επομένως ισχύει για τις συνιστώσες της Εξ. 1 ότι

$\Sigma F_x = ma_x$	$2^{ΟΣ}$ ΝΟΜΟΣ ΝΕΥΤΩΝΑ x - ΣΥΝΙΣΤΩΣΑ	(4.3α)
$\Sigma F_y = ma_y$	$2^{ΟΣ}$ ΝΟΜΟΣ ΝΕΥΤΩΝΑ y - ΣΥΝΙΣΤΩΣΑ	(4.3β)

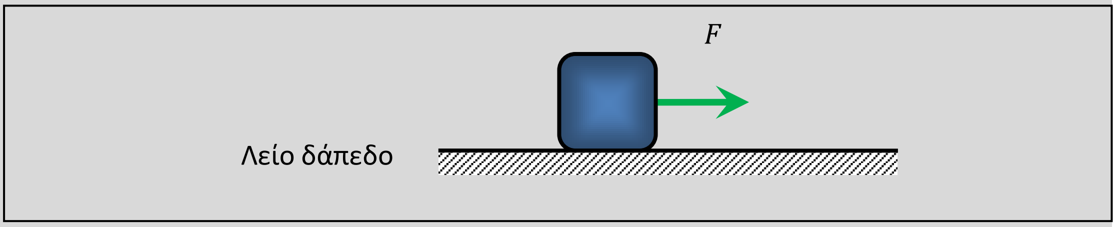
όπου a_x και a_y είναι οι συνιστώσες της επιτάχυνσης όπως τις μελετήσαμε στο κεφάλαιο "Κίνηση σε Επίπεδο", ενώ ΣF_x και ΣF_y είναι οι συνιστώσες της συνολικής δύναμης που δρα στο σώμα. Και πάλι η άθροιση Σ είναι αλγεβρική. Οι παραπάνω νόμοι θα αποσαφηνισθούν στο παρακάτω εδάφιο που θα δούμε εφαρμογές αυτών:

Εφαρμογές των νόμων του Νεύτωνα

Σε αυτό το εδάφιο θα παρουσιασθούν παραδείγματα στα οποία διάφορες μηχανικές δυνάμεις όπως αυτές που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, εφαρμόζονται σε σώματα και με την βοήθεια των νόμων του Νεύτωνα θα μπορούμε να υπολογίζουμε κινηματικές ποσότητες όπως η επιτάχυνση και η ταχύτητά τους.

Παράδειγμα 4.1

Στο παρακάτω σχήμα μια δύναμη $F = 200\ N$ εφαρμόζεται στη μια πλευρά ενός κιβωτίου μάζας $m = 12\ kg$ το οποίο είναι τοποθετημένο σε λείο και οριζόντιο επίπεδο δίχως τριβές. (α) Να σχεδιασθούν όλες οι δυνάμεις που δρουν στο σώμα. (β) Να υπολογισθούν οι δυνάμεις αυτές. (γ) Να υπολογισθεί η δύναμη που ασκεί το κιβώτιο στο δάπεδο και (δ) Να βρεθεί η επιτάχυνση του κιβωτίου.



Λύση:

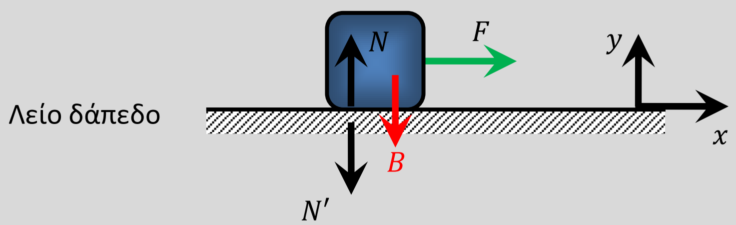
(α) Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, στο κιβώτιο εκτός από την F δρα και το βάρος του $B = mg = 117.6\ N$ και η κάθετη αντίδραση από το έδαφος N.

(β) Ως προς τον άξονα-y το σώμα δεν μετακινείται και άρα η επιτάχυνσή του είναι $a_y = 0$. Από τον $2^{ο}$ νόμο του Νεύτωνα Εξ. 4.3β παίρνουμε για την y-συνιστώσα

$$N - B = ma_y = 0 => N = B$$

και άρα $N = 117.6\ N$. Το μείον στο βάρος είναι επειδή έχει κατεύθυνση προς τον αρνητικό άξονα-y.

(γ) Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, το κιβώτιο ασκεί μια δύναμη N' στο δάπεδο. Σύμφωνα με τον 3^o νόμο του Νεύτωνα (δείτε το προηγούμενο Κεφ. 3), οι N και N' είναι ζεύγος δράσης-αντίδρασης και άρα είναι ίσες και αντίθετες. Επομένως κατά μέτρο $N' = 117.6\ \ N$



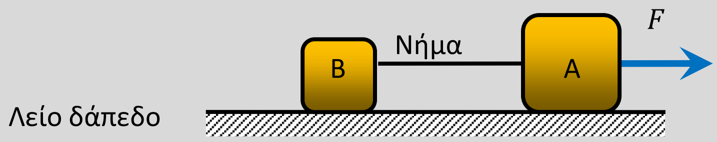
(δ) Από τον 2^o νόμο του Νεύτωνα Εξ. 4.3α παίρνουμε για την x-συνιστώσα

$$F = ma_x => a_x = \frac{F}{m}$$

Αντικαθιστώντας $a = 16.67\ ms^{-2}$.

Παράδειγμα 4.2

Στο παρακάτω σχήμα μια δύναμη $F = 200\ N$ εφαρμόζεται στη μια πλευρά του κιβωτίου A μάζας $m_A = 8\ kg$. Το κιβώτιο B μάζας $m_B = 4\ kg$ συνδέεται με το A με ιδανικό νήμα. Και τα δυο κιβώτια είναι τοποθετημένο σε λείο και οριζόντιο επίπεδο δίχως τριβές. (α) Να υπολογισθεί η επιτάχυνση του όλου συστήματος. (β) Να σχεδιασθούν όλες οι οριζόντιες δυνάμεις που δρουν στα δυο σώματα και (γ) Να υπολογισθούν όλες οι οριζόντιες δυνάμεις



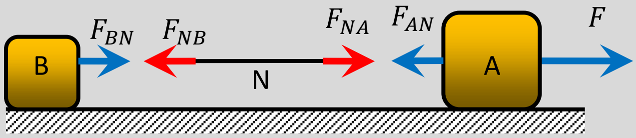
Λύση:

(α) Μπορούμε να θεωρήσουμε όλο το σύστημα ως ένα σώμα το οποίο έχει ολική μάζα ίση με $m = m_A + m_B = 12\ kg$ και να εφαρμόσουμε τον 2^o νόμο του Νεύτωνα Εξ. 4. 3α για την x-συνιστώσα με μια συνολική δύναμη $F = 200\ N$ να δρα σε αυτό. Τότε

$$F = ma => a = \frac{F}{m} = 16.67\ ms^{-2}$$

(β) Για να κατανοήσουμε καλύτερα τις δυνάμεις, ξεχωρίζουμε τα σώματα όπως στο παρακάτω σχήμα. Υπάρχουν βασικά τρία σώματα, το Α, το Β και το νήμα Ν. Σε αυτά, εκτός από την F δρουν και άλλα δυο ζεύγη δυνάμεων, σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Νεύτωνα, τα οποία είναι τα $F_{AN} - F_{NA}$ και $F_{BN} - F_{NB}$ όπου:

- F_{NA} είναι η δύναμη που ασκεί το Α στο Νήμα
- F_{AN} είναι η δύναμη που ασκεί το Νήμα στο Α
- F_{NB} είναι η δύναμη που ασκεί το Β στο Νήμα
- F_{BN} είναι η δύναμη που ασκεί το Νήμα στο Β



γ) Λόγω δράσης-αντίδρασης ισχύει $F_{AN} = F_{NA}$ και $F_{BN} = F_{NB}$ (κατά μέτρο, οι κατευθύνσεις φαίνονται στο σχήμα). Επίσης για ιδανικό νήμα ισχύει $F_{NA} = F_{NB}$ επομένως και οι τέσσερις δυνάμεις στην παραπάνω λίστα του προηγούμενου υπο-ερωτήματος β είναι ίσες. Μπορούμε να εφαρμόσουμε τον 2ο νόμο του Νεύτωνα μόνο για το κιβώτιο Β. Παίρνοντας την x-συνιστώσα Εξ. 4.3α έχουμε

$$F_{BN} = m_B a => F_{BN} = 4 \times 16.67 = 66.67\ N$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την επιτάχυνση του υπο-ερωτήματος α παραπάνω εφόσον το Β έχει την ίδια επιτάχυνση που έχει το όλο σύστημα. Από την παραπάνω συζήτηση προκύπτει ότι

$$F_{AN} = F_{NA} = F_{BN} = F_{NB} = 66.67\ N$$

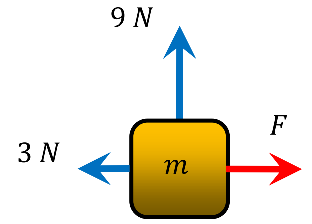
Εάν εφαρμόζαμε τον 2ο νόμο του Νεύτωνα στο κιβώτιο Α αντί του Β θα παίρναμε:

$$F - F_{AN} = m_A a => 200 - F_{AN} = 8 \times 16.67 => F_{AN} = 66.67\ N$$

δηλαδή και πάλι βρίσκουμε την ίδια δύναμη!

Παράδειγμα 4.3

Στο παρακάτω σχήμα δρούνε τρεις δυνάμεις επάνω στο σώμα μάζας $m = 2.5\ kg$. Εάν η επιτάχυνσή του είναι $4\ ms^{-2}$, να βρεθεί η άγνωστη δύναμη F.



Λύση.

Στον άξονα-x έχουμε συνολική δύναμη $F_x = F - 3$ ενώ στον άξονα-y έχουμε $F_y = 9$. Επειδή δεν γνωρίζουμε την κατεύθυνση της επιτάχυνσης, αλλά μόνο το μέτρο της, δεν μπορούμε να την αναλύσουμε σε δυο συνιστώσες και να δουλέψουμε ανεξάρτητα ως προς x και y. Επομένως θα δουλέψουμε με την Εξ. 4.2 που εμπεριέχει τα μέτρα:

$$\Sigma F = ma = 2.5 \times 4 = 10\ N$$

Εξ' ορισμού το μέτρο της δύναμης ισούται με

$$\Sigma F = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2} = \sqrt{(F-3)^2 + 9^2}$$

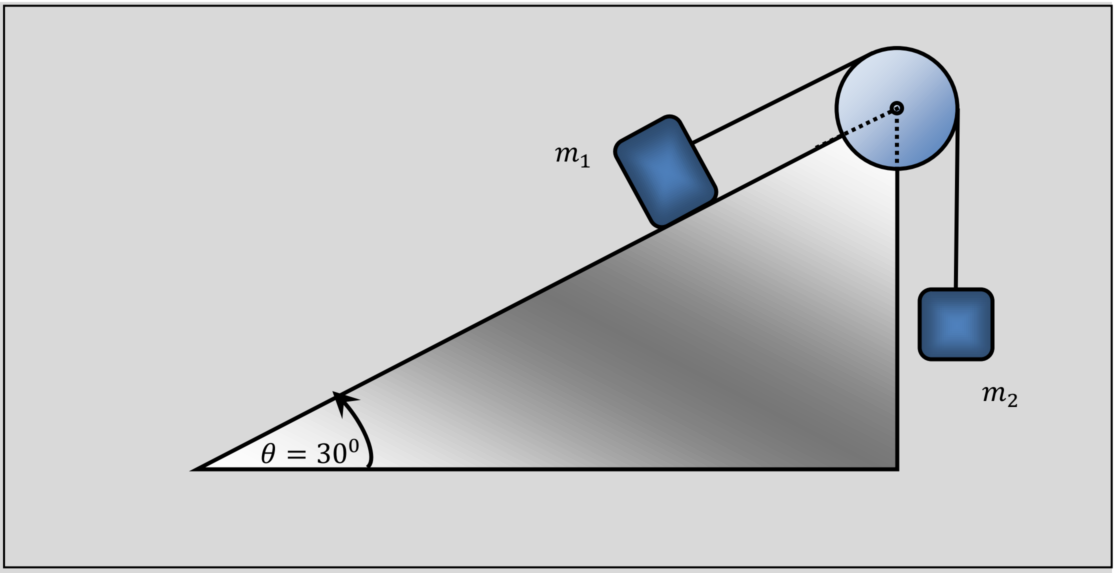
Από τις δυο τελευταίες εξισώσεις προκύπτει

$$\sqrt{(F-3)^2 + 9^2} = 10$$

το οποίο οδηγεί στο αποτέλεσμα $F = 7.36\ N$.

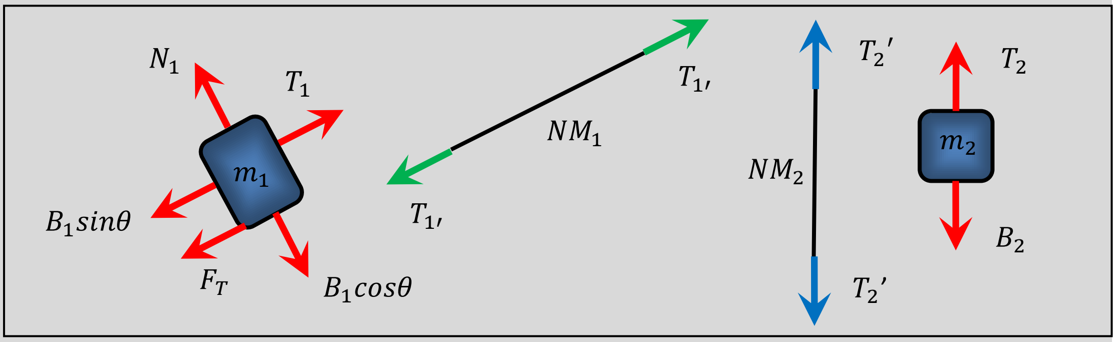
Παράδειγμα 4.4

Στο παρακάτω σχήμα ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του κεκλιμένου επιπέδου και της μάζας m_1 είναι $\mu = 1/\sqrt{3}$ και η τροχαλία είναι ιδανική. (α) Να σχεδιαστούν όλες οι δυνάμεις του συστήματος. (β) Να βρεθεί η επιτάχυνση της μάζας m_2 συναρτήσει της σταθεράς της βαρύτητας g εάν $m_2 = 2m_1$. (γ) Να βρεθεί η τάση του νήματος και στις δυο πλευρές της τροχαλίας.



<u>Λύση</u>:

(α) Στο παρακάτω σχήμα εξετάζεται το κάθε σώμα και οι δυνάμεις του ξεχωριστά. Για ευκολία χωρίζουμε το νήμα σε δυο κομμάτια NM_1, NM_2 και αγνοούμε την τροχαλία που είναι ιδανική επειδή απλά αλλάζει την κατεύθυνση των δυνάμεων.



Ξεκινώντας από δεξιά προς τα αριστερά έχουμε τις εξής δυνάμεις:

-Μάζα m_2: Ασκούνται δυο δυνάμεις, το βάρος της $B_2 = m_2 g$ και η τάση του νήματος T_2.

-Νήμα NM_2: Στο κάτω άκρο του ασκείται μια δύναμη $T_2{'}$ από η μάζα m_2 και στο πάνω από τη τροχαλία. Επειδή είναι ιδανικό νήμα, αυτές οι δυο δυνάμεις είναι ίσες. Επίσης λόγω δράσης αντίδρασης $T_2 = T_2{'}$ (κατά μέτρο).

-Νήμα NM_1: Ομοίως στο κάτω άκρο του ασκείται μια δύναμη $T_1{'}$ από τη μάζα m_1 και στο πάνω από τη τροχαλία. Αυτές οι δυο δυνάμεις είναι ίσες.

-Μάζα m_1: Εδώ τα πράγματα είναι κάπως πιο πολύπλοκα. Αρχικά πρέπει να συμπεριλάβουμε το βάρος της $B_1 = m_1 g$ το οποίο το αναλύουμε σε δυο συνιστώσες όπως έχουμε δει και σε προηγούμενα παραδείγματα. Επιπλέον έχουμε την τάση του νήματος T_1 για την οποία λόγω δράσης-αντίδρασης ισχύει $T_1 = T_1{'}$ (κατά μέτρο). Επίσης το κεκλιμένο επίπεδο ασκεί δυο δυνάμεις στην m_1, την κάθετη αντίδραση N_1 και την τριβή ολίσθησης $F_T = \mu N_1$.

(β) Αφού η τροχαλία είναι ιδανική, οι δυνάμεις $T_1{}'$ και $T_2{}'$ που ασκούνται σε αυτήν από τις δυο πλευρές της είναι ίσες. Συγκεντρώνοντας όλες την πληροφορίες για τις τάσεις του νήματος έχουμε $T_1 = T_1' = T_2' = T_2$. Για ευκολία θα τις ονομάσουμε όλες T. Ο αναγνώστης μπορεί να αναρωτιέται γιατί δεν τις θέσαμε όλες από την αρχή ως μια κοινή δύναμη. Ο λόγος είναι ότι αργότερα, όταν θα μελετήσουμε την περιστροφή στερεού, θα εργαστούμε με μη ιδανικές τροχαλίες, οπότε και οι δυνάμεις θα διαφέρουν εν γένει οπότε είναι καλή πρακτική να ξεκινάμε με διαφορετικό σύμβολο για την καθεμία όπως στο παρόν παράδειγμα. Όσον αφορά στην μάζα m_2, ο 2ος νόμος του Νεύτωνα στη κατακόρυφη κατεύθυνση μας δίνει

$$T - B_2 = -m_2 a$$

Το μείον στην επιτάχυνση a το προσθέσαμε επειδή το κινητό κατευθύνεται προς τα κάτω, ώστε η τιμή της a να είναι θετική (εάν δεν το προσθέταμε στο τέλος θα καταλήγαμε σε μια αρνητική τιμή, είναι απλά θέμα προτίμησης). Στην μάζα m_1 έχουμε δυο κατευθύνσεις. Ως προς κάθετη προς την κίνηση κατεύθυνση, η μάζα ισορροπεί και έτσι από τον 1ο νόμο του Νεύτωνα οι δυνάμεις πρέπει να αλληλοαναιρούνται που σημαίνει ότι $N_1 = B_1 cos\theta$. Η τριβή ολίσθησης γίνεται $F_T = \mu N_1 = \mu m_1 g cos\theta$. Ως προς την κατεύθυνση της κίνησης, η m_1 έχει επιτάχυνση ίση με την επιτάχυνση της m_2 αφού κινούνται με την ίδια ταχύτητα και έτσι από το 2ο νόμο του Νεύτωνα

$$T - B_1 sin\theta - F_T = m_1 a$$

Απαλείφοντας την T από τις δυο τελευταίες εκφράσεις του 2ου νόμου του Νεύτωνα, οδηγεί στην

$$(m_1 + m_2)a = g(m_2 - m_1 sin\theta - \mu m_1 cos\theta)$$

Από τα δεδομένα $m_2 = 2m_1$, $\mu = 1/\sqrt{3}$ και $\theta = 30^0$, επομένως

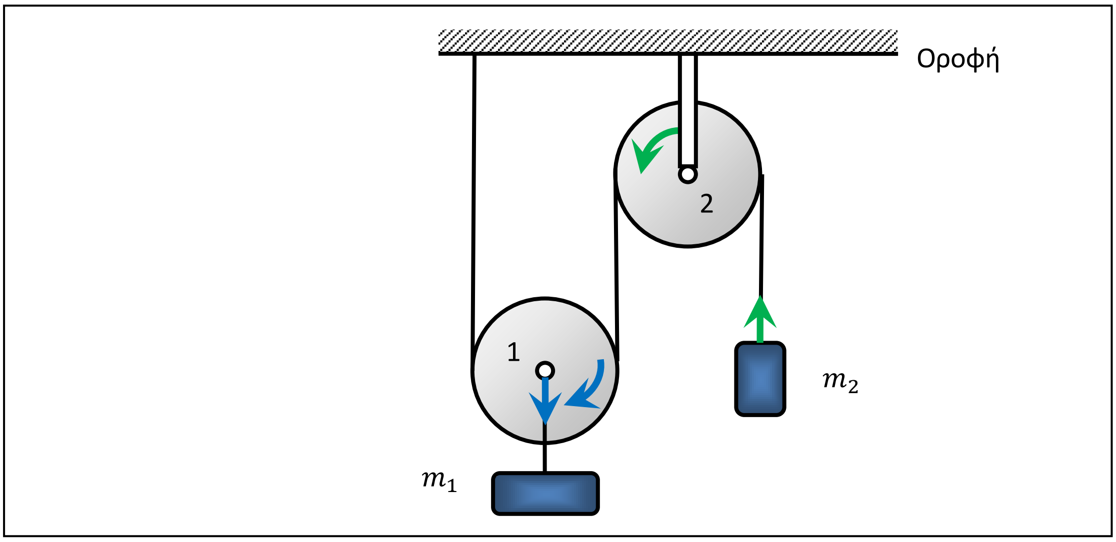
$$3a = g\left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) => a = \frac{g}{3}$$

(γ) Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα για την m_2 μπορούμε να λύσουμε ως προς T:

$$T - B_2 = -m_2 a => T = m_2 g - m_2 a = \frac{2}{3} m_2 g$$

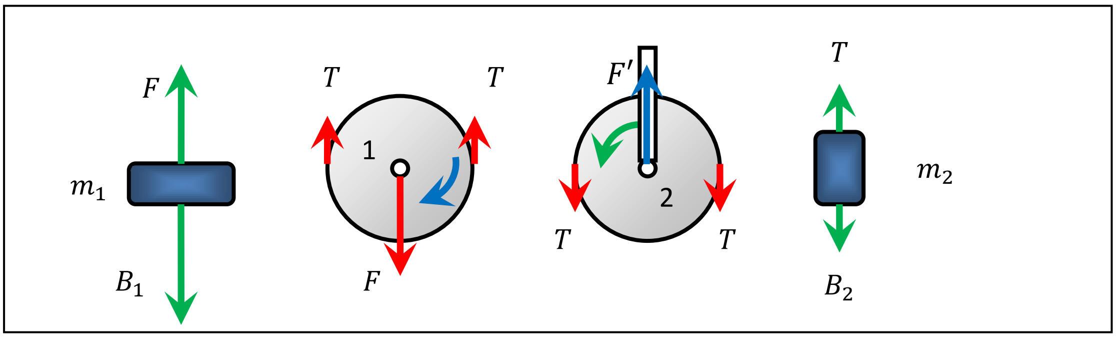
<u>Παράδειγμα 4.5</u>

Στο παρακάτω σχήμα οι τροχαλίες είναι ιδανικές. Εάν $m_1 = 20\ kg$ και $m_2 = 8\ kg$, Να βρεθεί η επιτάχυνση της μάζας m_2. Έστω $g = 10\ ms^{-2}$ για ευκολία.



<u>Λύση</u>:

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι λόγω του τρόπου σύνεσης των τροχαλιών, ισχύει ότι $a_2 = 2a_1$ (κατά μέτρο επειδή οι δυο επιταχύνσεις είναι αντίθετες). Όσο για τις τάσεις του νήματος, ισχύει όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα ότι είναι όλες ίσες μεταξύ τους οπότε θα χρησιμοποιήσουμε το ίδιο γράμμα T για αυτές. Οι δυνάμεις που δρουν σε κάθε σώμα φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Όπως έχουμε συζητήσει στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι δυνάμεις στις δυο πλευρές μιας ιδανικής τροχαλίας είναι ίσες.



Η δύναμη F είναι η δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ της μάζας m_1 και της τροχαλίας 1. Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα για αυτή την τροχαλία δίνει

$$2T - F = -M_1 a_1$$

όπου M_1 είναι η μάζα της τροχαλίας. Εφόσον όμως είναι ιδανική τότε $M_1 = 0$ και επομένως $F = 2T$. Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα για τις δυο μάζες m_1 και m_2 γράφεται ως

$$F - B_1 = -m_1 a_1 => 2T - m_1 g = -m_1 a_1$$

και

$$T - B_2 = m_2 a_2 => T - m_2 g = m_2 a_2$$

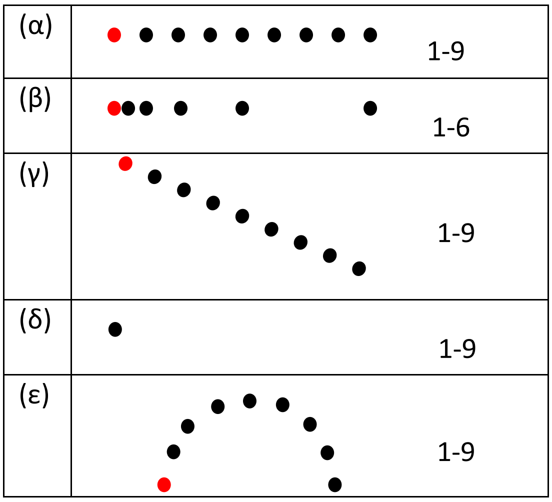
αντίστοιχα. Το μείον στην πρώτη εξίσωση είναι επειδή η επιτάχυνση είναι προς τον αρνητικό άξονα- y και η a_1 συμβολίζει το μέτρο της επιτάχυνσης της m_1 και άρα πρέπει να είναι ένας θετικός αριθμός. Απαλείφοντας την τάση του νήματος T και χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα $a_2 = 2a_1$ οδηγεί στο

$$a_2 = \frac{2m_1 - 4m_2}{m_1 + 4m_2} g$$

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα έχουμε $a_2 = 1.54\ ms^{-2}$

<u>Παράδειγμα 4.6</u>

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται διάφορες περιπτώσεις κίνησης (α)-(ε) ενός υλικού σημείου. Σε κάθε κίνηση, πάρθηκαν περιοδικά στιγμιότυπα κάθε $\Delta t = 2\ ms$ με το κόκκινο στιγμιότυπο να είναι το αρχικό. Ο αριθμός των στιγμιότυπων φαίνεται δίπλα από την κάθε κίνηση. Να σχολιασθεί περιγραφικά το είδος της κάθε κίνησης του κινητού και να σχολιασθεί εάν σύμφωνα με τον 1° νόμο του Νεύτωνα δρα κάποια δύναμη σε αυτό στην κάθε περίπτωση



<u>Λύση</u>:

(α) Σε αυτή την κίνηση φαίνεται το κινητό να διαγράφει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση οπότε το κινητό διατηρεί την κινητική του κατάσταση. Σύμφωνα με τον 1° νόμο τότε δεν επιδρά πάνω του καμία δύναμη.

(β) Το κινητό φαίνεται να επιταχύνει οπότε δεν διατηρεί την κινητική του κατάσταση και άρα δρα πάνω του κάποια δύναμη.

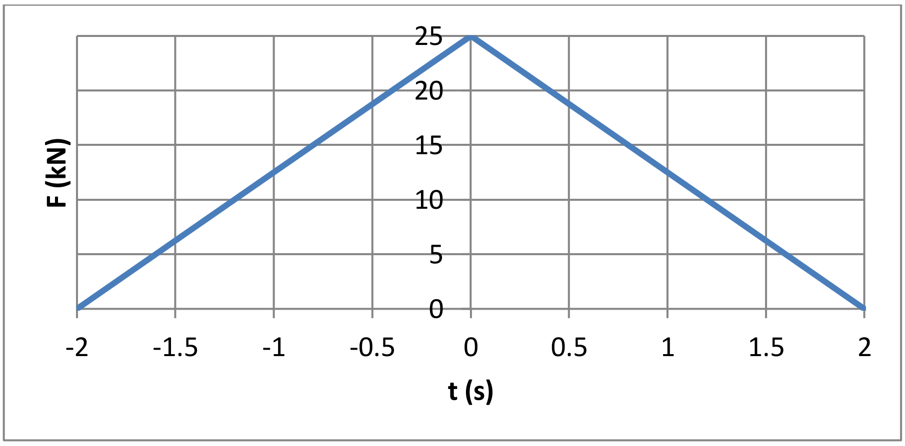
(γ) Ομοίως με την περίπτωση (α) το κινητό εκτελεί ομαλή ευθύγραμμη κίνηση οπότε δεν δρα πάνω του καμία δύναμη.

(δ) Προφανώς το υλικό σημείο είναι ακίνητο οπότε διατηρεί την κινητική του κατάσταση και άρα δεν δρα πάνω του καμία δύναμη.

(ε) Αυτή η περίπτωση είναι κάπως αξιοπερίεργη. Εκ πρώτης όψεως το κινητό κινείται με σταθερή ταχύτητα οπότε θα περίμενε κανείς να μη δρα πάνω του κάποια δύναμη. Εντούτοις το κινητό αλλάζει συνεχώς κατεύθυνση (κινείται πάνω σε τόξο) οπότε από αυτή την άποψη δεν διατηρεί την κινητική του κατάσταση. Πρέπει να θυμόμαστε ότι ο νόμος του Νεύτωνα είναι διανυσματικός νόμος και όταν έχουμε να κάνουμε με διανύσματα όπως η ταχύτητα, για να είναι σταθερή πρέπει τόσο το μέτρο της όσο και η κατεύθυνσή της να είναι σταθερά. Αλλιώς είναι μεταβλητή ποσότητα και άρα το κινητό διανυσματικά δεν διατηρεί την κινητική του κατάσταση και επομένως ασκείται δύναμη επάνω του. Ας δούμε αναλυτικά γιατί συμβαίνει αυτό. Το μέτρο της ταχύτητας δίνεται από την $v^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2$ το οποίο είναι σταθερό σε αυτή την περίπτωση όμως αυτό δεν σημαίνει ότι και οι συνιστώσες v_x και v_y είναι σταθερές. Για παράδειγμα στο πάνω σημείο της τροχιάς η ταχύτητα του κινητού είναι οριζόντια και άρα $v_y = 0$. Αντιθέτως στο πρώτο στιγμιότυπο το κινητό φαίνεται να κινείται κατακόρυφα και άρα εκεί $v_x = 0$. Αυτό σημαίνει ότι οι συνιστώσες v_x και v_y είναι συναρτήσεις του χρόνου και άρα οι αντίστοιχες επιταχύνσεις a_x και a_y είναι διάφορες του μηδενός και σύμφωνα με τον 2^o νόμο υπάρχουν δυνάμεις F_x και F_y που δρουν στο κινητό.

Παράδειγμα 4.7

Σε μια δοκιμή σύγκρουσης, ένα αυτοκίνητο μάζας 2500 kg και ένα μικρό φορτηγό 10 τόνων (10,000 kg) οδηγούνται προς μετωπική σύγκρουση το ένα επάνω στο άλλο με την ίδια σταθερή ταχύτητα 10 m/s. Το οδόστρωμα είναι λείο και χωρίς τριβές, η σύγκρουση τελείως ελαστική λόγω των μικρών ταχυτήτων και δεν έγινε χρήση των φρένων τόσο πριν αλλά όσο και μετά τη σύγκρουση. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η δύναμη της σύγκρουσης που έδρασε στο αυτοκίνητο συναρτήσει του χρόνου. Να βρεθούν: (α) Η μαθηματική εξίσωση του περιγράφει αυτή τη δύναμη με την βοήθεια της γραφικής παράστασης. (β) Η δύναμη που δρα στο φορτηγό συναρτήσει του χρόνου. (γ) Οι ταχύτητες των δυο οχημάτων συναρτήσει του χρόνου κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης. (δ) Οι ταχύτητες των δυο οχημάτων συναρτήσει του χρόνου μετά τη σύγκρουση



Λύση:

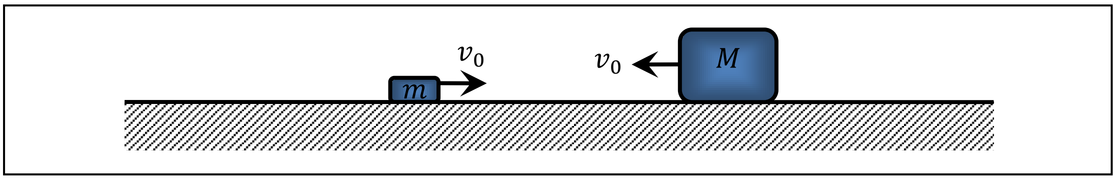
(α) Η δοθείσα γραφική παράσταση είναι τμηματικώς γραμμική, άρα θα είναι της μορφής $F(t) = c_1 t + c_2$ όπου c_1 και c_2 σταθερές. Από δυο τυχαία σημεία στην κάθε μεριά της γραφικής παράστασης μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$F(t) = \begin{cases} c(t+2) & -2 \le t \le 0 \\ -c(t-2) & 0 \le t \le 2 \end{cases}$$

όπου $c = 12.5\ kN/s$

(β) Από τον 3ο νόμο του Νεύτωνα, η δύναμη που ασκεί το αυτοκίνητο στο φορτηγό είναι ίση και αντίθετη με αυτή που ασκεί το φορτηγό στο αυτοκίνητο άρα κατά μέτρο η ζητούμενη δύναμη είναι όπως στην γραφική παράσταση παραπάνω.

(γ) Έστω για απλότητα ότι το αυτοκίνητο μάζας m κινείται προς τα δεξιά πριν τη σύγκρουση και ότι το φορτηγό μάζας M κινείται προς τα αριστερά. Η αρχική ταχύτητα είναι v_0 η ίδια κατά μέτρο και για τα δυο οχήματα και σταθερή εφόσον δεν υπάρχουν τριβές.



Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα, όταν δρα η δύναμη $-F(t)$ στο αυτοκίνητο (το μείον είναι επειδή η δύναμη αυτή είναι προς τα αριστερά), του προσδίνει αντίστοιχη επιτάχυνση $a(t) = -F(t)/m$, δηλαδή

$$a(t) = \begin{cases} -\frac{c}{m}(t+2) & -2 \le t \le 0 \\ \frac{c}{m}(t-2) & 0 \le t \le 2 \end{cases}$$

από όπου με ολοκλήρωση προκύπτει

$$v(t) = \begin{cases} -\frac{c}{2m}(t+2)^2 + b_1 & -2 \le t \le 0 \\ \frac{c}{2m}(t-2)^2 + b_2 & 0 \le t \le 2 \end{cases}$$

Οι b_1 και b_2 είναι σταθερές ολοκλήρωσης. (Σημείωση: Ολοκληρώσαμε το ένα μέρος ως προς $t+2$ και το άλλο ως προς $t-2$ για ευκολία. Εάν ολοκληρώναμε ως προς t, το μόνο που θα άλλαζε θα ήταν μια αριθμητική σταθερά που μπορεί να απορροφηθεί από τις b_1 και b_2). Γνωρίζουμε ότι λίγο πριν από τη σύγκρουση στο $t = -2$ η ταχύτητα του αυτοκινήτου ήταν $v = v_0$. Εφαρμόζοντας αυτή την αρχική συνθήκη, βρίσκουμε τη μια σταθερά $b_1 = v_0$. Για να βρούμε τη σταθερά b_2 σκεφτόμαστε ότι η ταχύτητα πρέπει να είναι συνεχής στο $t = 0$ άρα η παραπάνω τμηματική συνάρτηση πρέπει να δίνει την ίδια τιμή. Αυτό σημαίνει ότι

$$-\frac{c}{2m}(0+2)^2 + v_0 = \frac{c}{2m}(0-2)^2 + b_2$$

ή

$$b_2 = v_0 - \frac{4c}{m}$$

Έτσι η ταχύτητα του αυτοκινήτου κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης δίνεται από την έκφραση

$$v(t)=\begin{cases} -\dfrac{c}{2m}(t+2)^2+v_0 & -2\le t\le 0 \\ \dfrac{c}{2m}(t-2)^2+v_0-\dfrac{4c}{m} & 0\le t\le 2 \end{cases}$$

Δουλεύοντας με ακριβώς την ίδια φιλοσοφία αλλά με θετική δύναμη $F(t)$ και αρνητική αρχική ταχύτητα $-v_0$, βρίσκουμε για την ταχύτητα V του φορτηγού

$$V(t)=\begin{cases} \dfrac{c}{2M}(t+2)^2-v_0 & -2\le t\le 0 \\ -\dfrac{c}{2M}(t-2)^2-v_0+\dfrac{4c}{M} & 0\le t\le 2 \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα έχουμε

$$v(t)=\begin{cases} -2.5(t+2)^2+10 & -2\le t\le 0 \\ 2.5(t-2)^2-10 & 0\le t\le 2 \end{cases}$$

και

$$V(t)=\begin{cases} \dfrac{2.5}{4}(t+2)^2-10 & -2\le t\le 0 \\ -\dfrac{2.5}{4}(t-2)^2-5 & 0\le t\le 2 \end{cases}$$

(δ) Τη χρονική στιγμή $t=2$ που παύει η δύναμη της σύγκρουσης, τα δυο οχήματα έχουν ταχύτητες $v(2)=-10\ m/s$ και $V(2)=-5\ m/s$, δηλαδή το αυτοκίνητο ανέστρεψε τελείως την ταχύτητά του ενώ το φορτηγό απλώς μείωσε την ταχύτητά του κατά το ήμισυ. Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε και εάν χρησιμοποιούσαμε την αρχή της διατήρησης της ορμής, δείτε επόμενα κεφάλαια.

Σημείωση: Είναι δύσκολο κάποιος να φανταστεί ότι όταν ένα μικρό σώμα συγκρουστεί με ένα τεράστιο σώμα, η δύναμη αλληλεπίδρασης είναι η ίδια και για τα δυο σώματα. Π.χ. όταν ένα τραίνο συγκρουστεί με ένα αυτοκίνητο, το αυτοκίνητο θα διαλυθεί ενώ φαίνεται ότι το τραίνο δεν παθαίνει τίποτα. Η δύναμη βέβαια είναι η ίδια απλώς λόγω της μεγάλης του μάζας, το τραίνο απλώς ελαττώνει λίγο την ταχύτητα του και αυτό μας δίνει την ψευδαίσθηση ότι η δύναμη που ασκείται πάνω του είναι πολύ μικρή.

Παράδειγμα 4.8

Αλεξιπτωτιστής μάζας m εκτελεί ελεύθερη πτώση με μηδενική αρχική ταχύτητα από αερόστατο που βρίσκεται ακίνητο σε ύψος h από το έδαφος. Εάν η δύναμη τριβής του αέρα έχει μέτρο bv όπου $v(t)$ η ταχύτητα του αλεξιπτωτιστή σε κάθε χρονική στιγμή t και b μια σταθερά, να βρεθούν η v και το ύψος y του αλεξιπτωτιστή συναρτήσει του χρόνου.

Λύση:

Στον αλεξιπτωτιστή δρουν δυο δυνάμεις, το βάρος του $B = -mg$ από τη μια και η τριβή του αέρα $T = -bv$ από την άλλη. Το μείον στην τριβή είναι απαραίτητο επειδή η τριβή αντιτίθεται στην ταχύτητα. Έτσι αφού η ταχύτητα του αλεξιπτωτιστή είναι αρνητική εφόσον ταξιδεύει προς τα κάτω, η τριβή γίνεται θετική, δηλαδή προς τα πάνω όπως θα έπρεπε. Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα μας δίνει

$$\Sigma F = ma => a(t) = -g - \beta v(t)$$

όπου $\beta = b/m$: σταθερά. Γνωρίζουμε ότι η επιτάχυνση a είναι η παράγωγος της ταχύτητας επομένως καταλήγουμε στην εξής διαφορική εξίσωση:

$$v'(t) = -g - \beta v(t) => v'(t) = -\beta(v(t) + \gamma)$$

όπου $\gamma = g/\beta = mg/b$: σταθερά. Από τις ιδιότητες των παραγώγων μπορούμε να γράψουμε $v'(t) = (v(t) + \gamma)'$ αφού η παράγωγος μιας σταθεράς είναι μηδέν. Η παραπάνω διαφορική εξίσωση γίνεται

$$(v(t) + \gamma)' = -\beta(v(t) + \gamma)$$

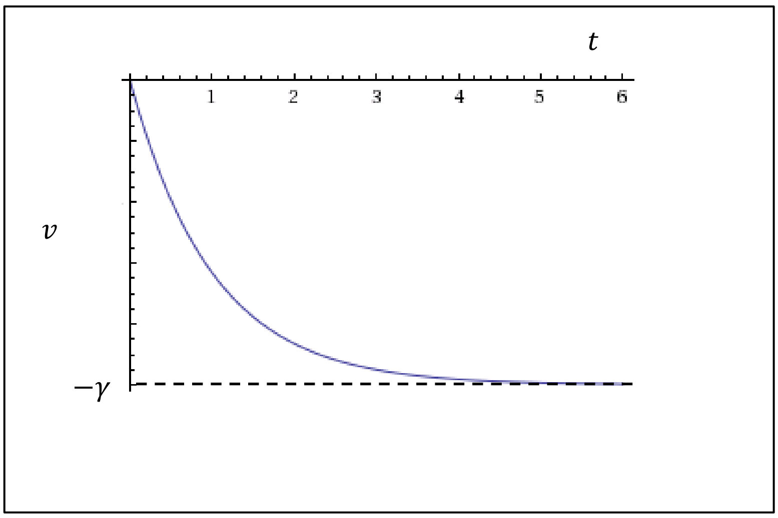
η οποία βασικά μας λέει ότι εάν παραγωγίσουμε την συνάρτηση $(v(t) + \gamma)'$ παίρνουμε την ίδια συνάρτηση επί μια σταθερά. Η συνάρτηση στα Μαθηματικά που έχει αυτή την ιδιότητα, είναι η εκθετική (εν γένει επί μια σταθερά). Οπότε με λίγη σκέψη και δοκιμή μπορούμε να δούμε ότι η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι η

$$v(t) + \gamma = ce^{-\beta t}$$

όπου c μια αυθαίρετη σταθερά (ο χρήστης ο οποίος μπορεί να λύσει την διαφορική εξίσωση με τη χρήση ολοκληρωμάτων θα δει ότι το c δεν είναι τίποτα άλλο παρά η σταθερά ολοκλήρωσης). Η σταθερά αυτή προσδιορίζεται από την αρχική συνθήκη $v(0) = 0$ από την οποία παίρνουμε $c = \gamma$. Επομένως η στιγμιαία ταχύτητα του αλεξιπτωτιστή είναι ίση με

$$v(t) = \gamma\left(e^{-\beta t} - 1\right)$$

και η γραφική της παράσταση φαίνεται παρακάτω



Όπως αναμένεται, η v είναι παντού αρνητική. Επίσης τείνει οριακά στην τιμή $-\gamma$. Για να βρούμε το στιγμιαίο ύψος $y(t)$ του αλεξιπτωτιστή, ανακαλούμε ότι η παράγωγος της μετατόπισης ισούται με την ταχύτητα. Έτσι

$$y'(t) = v(t) = \gamma\left(e^{-\beta t} - 1\right)$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραγώγων μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$y(t) = \frac{-\gamma}{\beta} e^{-\beta t} - \gamma t + d$$

όπου d είναι η σταθερά ολοκλήρωσης την οποία την προσδιορίζουμε από την $y(0) = h$ η οποία οδηγεί στο

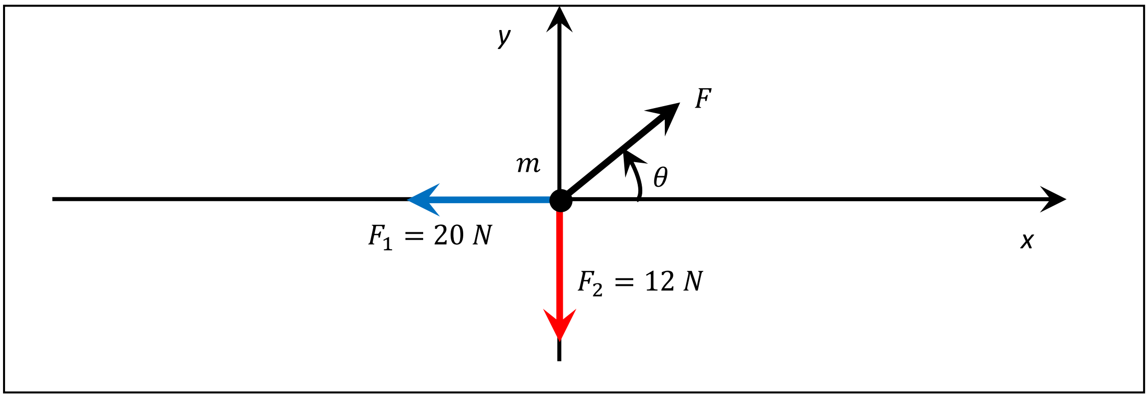
$$h = \frac{-\gamma}{\beta} + d => d = h + \frac{\gamma}{\beta}$$

Επομένως το στιγμιαίο ύψος του αλεξιπτωτιστή δίνεται από την

$$y(t) = \frac{-\gamma}{\beta}(e^{-\beta t} - 1) - \gamma t + h$$

<u>Παράδειγμα 4.9</u>

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, τρεις δυνάμεις δρουν σε ένα σώμα μάζας $m = 2\ kg$



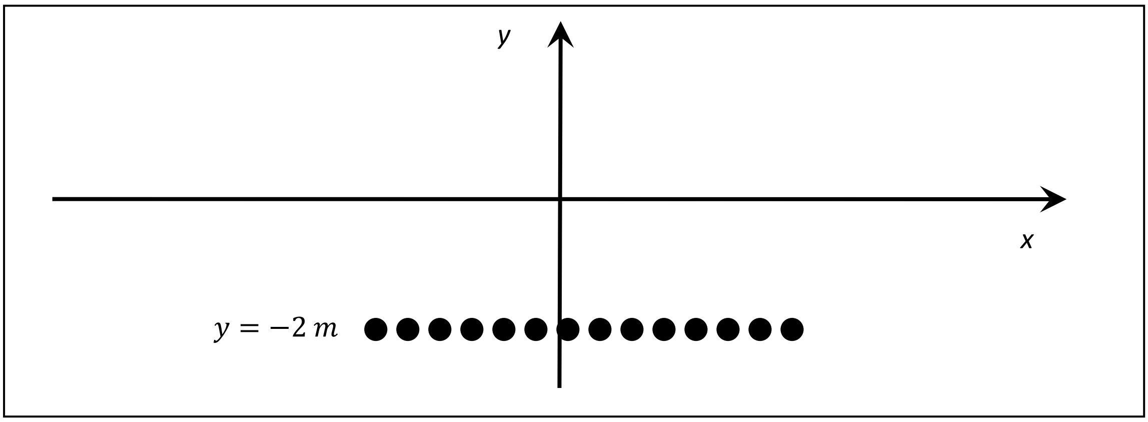
Το σώμα κινείται έτσι ώστε οι συνιστώσες της απομάκρυνσής του να είναι

$$x(t) = c_1 + c_2 t$$

$$y(t) = c_3$$

όπου $c_1 = 3\ m$, $c_2 = 2\ m/s$ και $c_3 = -2\ m$. Να βρεθεί η άγνωστη δύναμη F

<u>Λύση</u>: Παρατηρούμε ότι η συντεταγμένη-y του σώματος είναι σταθερή και ότι το x αυξάνει γραμμικά με το χρόνο. Επομένως η τροχιά του είναι κάπως έτσι:



Αυτό σημαίνει ότι το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και άρα η επιτάχυνσή του είναι μηδέν. Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ συνεπάγεται ότι η ολική δύναμη είναι μηδέν και άρα και οι συνιστώσες της. Επομένως

$$\Sigma F_x = 0 => F cos\theta - 20 = 0 => F cos\theta = 20\ N$$

$$\Sigma F_y = 0 => F sin\theta - 12 = 0 => F sin\theta = 12\ N$$

Διαιρώντας παίρνουμε

$$tan\theta = \frac{12}{20} => \theta = 31.0^0$$

Αντικαθιστώντας το θ σε οποιαδήποτε από αυτές, οδηγεί στο $F = 23.3\ N$

Παράδειγμα 4.10

Να λυθεί το παραπάνω πρόβλημα εάν $y(t) = c_4 t^2$ όπου $c_4 = 2\ ms^{-2}$ ενώ όλα τα άλλα δεδομένα παραμένουν τα ίδια.

Λύση:

Προφανώς τώρα το κινητό επιταχύνεται οπότε δυνάμεις δεν αλληλοαναιρούνται. Στο άξονα x όμως η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή $x(t) = c_1 + c_2 t$. Αυτό φαίνεται και εάν υπολογίσουμε την x-συνιστώσα της επιτάχυνσης παραγωγίζοντας δυο φορές το x αφού καταλήγουμε στη $a_x = 0$. Επομένως οι δυνάμεις πρέπει να ισορροπούν ως προς τον άξονα x και έτσι παίρνουμε όπως και προηγουμένως

$$\Sigma F_x = 0 => F cos\theta - 20 = 0 => F cos\theta = 20\ N$$

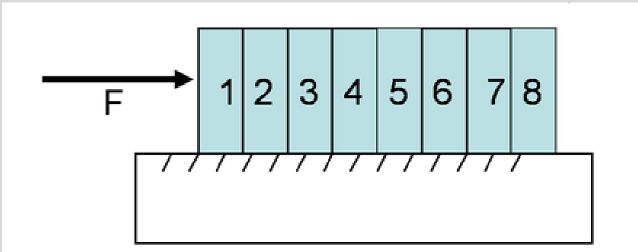
Για να βρούμε την y-συνιστώσα της επιτάχυνσης, παραγωγίζουμε δυο φορές το y και καταλήγουμε στη $a_y = 2c_4 = 4\ ms^{-2}$. Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα για τη y-συνιστώσα παίρνουμε:

$$\Sigma F_y = m a_y => F sin\theta - 12 = 2\times 4 => F sin\theta = 20\ N$$

Λύνοντας τις δυο τελευταίες σχέσεις όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα οδηγεί στις $\theta = 45^0$ και $F = 28.3\ N$.

Παράδειγμα 4.11

Μια δύναμη F δρα σε ένα σύστημα οκτώ πανομοιότυπων κιβωτίων μάζας m το καθένα, τα οποία μπορούν και ολισθαίνουν χωρίς τριβή επάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Να βρεθεί ο λόγος N_{34}/N_{67} όπου $N_{n,n\pm1}$ είναι η δύναμη αλληλεπίδρασης του κιβωτίου n με το γειτονικό του κιβώτιο $n \pm 1$



Λύση: Έστω m η μάζα του κάθε κιβωτίου. Η επιτάχυνση του όλου του συσσωματώματος σαν ένα ενιαίο σώμα ισούται με

$$a = \frac{F}{8m}$$

Όλα τα κιβώτια μοιράζονται αυτή την επιτάχυνση. Έστω το n-οστό κιβώτιο. Σε αυτό ασκούνται οι δυνάμεις $N_{n,n+1}$ από δεξιά με κατεύθυνση αριστερά και η $N_{n,n-1}$ από αριστερά με κατεύθυνση δεξιά (δηλαδή το κιβώτιο "συμπιέζεται" από τους γείτονες του). Από τα δεδομένα έχουμε $N_{1,0} = F$, η εξωτερική δύναμη στο πρώτο κιβώτιο, όπου ο δείκτης "0" αναφέρεται στον ανοικτό χώρο στα αριστερά του κουτιού 1 και $N_{8,9} = 0$, όπου ο δείκτης "9" αναφέρεται στον ανοικτό χώρο στα δεξιά του κουτιού 8, εφόσον δεν ασκείται καμία δύναμη στο 8^{ο} κιβώτιο του συσσωματώματος από τα δεξιά. Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$N_{n,n-1} - N_{n,n+1} = ma = m\frac{F}{8m} = \frac{F}{8}$$

ή

$$N_{n,n+1} = N_{n,n-1} - \frac{F}{8}$$

Από τον νόμο δράσης-αντίδραση, ισχύει ότι $N_{n,n-1} = N_{n-1,n}$ δηλαδή η σειρά των δεικτών δεν παίζει σημασία. Έτσι

$$N_{n,n+1} = N_{n-1,n} - \frac{F}{8}$$

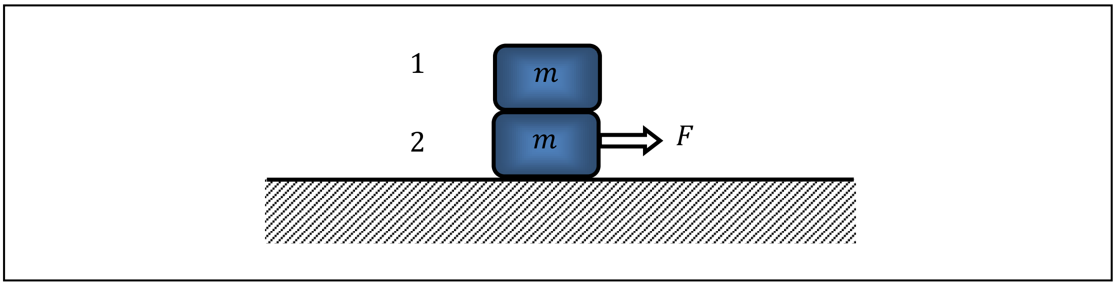
Αυτή είναι μια αναδρομική σχέση που μας δείχνει ότι οι δυνάμεις αυτές μειώνονται διαδοχικά προς τα δεξιά κατά το ίδιο σταθερό ποσό $F/8$. Επομένως ξεκινώντας από την $N_{8,9} = 0$ και μειώνοντας προς τα πίσω έχουμε

$$N_{7,8} = \frac{F}{8}\ , N_{6,7} = \frac{2F}{8}\ \dots\ N_{2,3} = \frac{6F}{8}\ , N_{1,2} = \frac{7F}{8}$$

Έτσι ο ζητούμενος λόγος είναι $N_{34}/N_{67} = 5/2 = 2.5$.

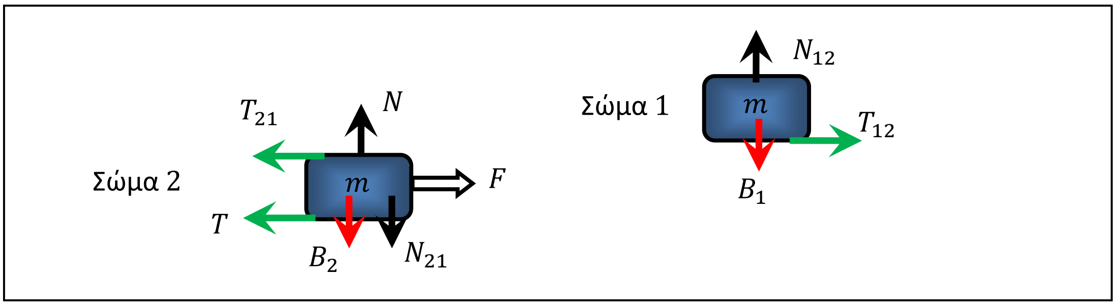
Παράδειγμα 4.12

Μια δύναμη F δρα στο κάτω κιβώτιο ενός συστήματος δυο πανομοιότυπων κιβωτίων μάζας m. Τα κιβώτια και το δάπεδο είναι από το ίδιο υλικό και οπότε και οι δυο επιφάνειες επαφής έχουν τους ίδιους συντελεστές στατικής τριβής $\mu_\Sigma = 0.5$ αλλά και τους ίδιους συντελεστές τριβής ολίσθησης $\mu = 0.25$. Να γίνει η γραφική παράσταση όλων των δυνάμεων της τριβής του συστήματος συναρτήσει της F, όταν αυτή μεταβάλλεται από 0 έως και μιας αρκετά μεγάλης τιμής ώστε να παρατηρηθούν φαινόμενα ολίσθησης και στις δυο επιφάνειες. Επίσης να γίνει και γραφική παράσταση των επιταχύνσεων των δυο κιβωτίων ως προς F.



Λύση:

Γενικά οι δυνάμεις που ασκούνται στα δυο σώματα φαίνονται παρακάτω. T_{12} και T_{21} είναι το ζεύγος δράσης-αντίδρασης τριβής μεταξύ των δυο κιβωτίων, T είναι η τριβή στο κιβώτιο 2 από το δάπεδο, N_{12} και N_{21} είναι το ζεύγος δράσης-αντίδρασης των κάθετων αντιδράσεων μεταξύ των δυο κιβωτίων, N είναι η κάθετη αντίδραση στο κιβώτιο 2 από το δάπεδο, και B_1 και B_2 είναι τα βάρη. Προσέξτε ότι στο κιβώτιο 2 ασκούνται δυο κάθετες αντιδράσεις επειδή είναι σε επαφή με δυο επιφάνειες.



Ως προς την κατακόρυφη διεύθυνση τα δυο κιβώτια δεν μετακινούνται και άρα οι δυνάμεις ισορροπούν. Έτσι έχουμε στο πάνω κιβώτιο $N_{12} = B_1 = mg$, μεταξύ των δυο κιβωτίων $N_{12} = N_{21}$ και στο κάτω κιβώτιο $N = N_{21} + B_1 = 2mg$.

Ως προς την οριζόντια διεύθυνση, όταν αρχικά η F είναι μικρή, δεν υπάρχει κίνηση. Επειδή στο κιβώτιο 1 δρα μόνο η T_{12} τότε αναγκαστικά αυτή είναι μηδέν αφού υπάρχει ηρεμία. Στο κιβώτιο 2 δρα η $T_{21} = T_{12} = 0$ (δράση-αντίδραση) και η F με την T οι οποίες αναγκαστικά σε αυτή τη φάση ηρεμίας είναι ίσες, δηλαδή προσαρμόζεται η T και αυξάνει όσο αυξάνει και η F. Μέχρι πότε μπορεί να γίνει αυτό; Η μέγιστη τιμή της T είναι

$$T_{max} = \mu_\Sigma N = 0.5 \times 2mg = mg$$

Προσέξτε ότι στον τύπο χρησιμοποιήσαμε την κάθετη αντίδραση που σχετίζεται με το δάπεδο. Όταν η F οριακά λάβει την τιμή $F = T_{max} = mg$, εκκινεί η ολίσθηση στο δάπεδο και η T ελαττώνεται σε τριβή ολίσθησης $T = \mu N = 0.5mg$. Σε αυτή τη στιγμή, το κιβώτιο 2 προσπαθεί να παρασύρει και το κιβώτιο 1 και άρα εμφανίζεται και η τριβή T_{12}. Εάν υποθέσουμε ότι και τα δυο κιβώτια κινούνται μαζί ως ένα σώμα με κοινή επιτάχυνση a, τότε από το 2^{ο} νόμο του Νεύτωνα για το πάνω κιβώτιο έχουμε $T_{12} = ma$ ενώ για το κάτω

$$F - T - T_{21} = ma => mg - 0.5mg - ma = ma => a = 0.25g$$

Αυτή είναι η αρχική επιτάχυνση στο οριακό σημείο της πρώτης ολίσθησης. Η αντίστοιχη δύναμη τριβής μεταξύ των δυο κιβωτίων είναι ίση με $T_{12} = ma = 0.25mg$. Αυτή η τιμή είναι συνεπής με την υπόθεση που κάναμε νωρίτερα ότι τα δυο κιβώτια δεν ολισθαίνουν μεταξύ τους αφού για να γίνει αυτό πρέπει η T_{12} να φτάσει στο όριο ολίσθησης που δίνεται από την

$$T_{12,max} = \mu_\Sigma N_{21} = 0.5mg$$

Όσο όμως αυξάνει η F, αυξάνει και η επιτάχυνση και επομένως και η T_{12} και κάποια στιγμή θα φτάσει την παραπάνω τιμή. Τότε θα ολισθαίνουν μεταξύ τους τα δυο κιβώτια. Η επιτάχυνση τότε του κιβωτίου 1 δίνεται από τον 2^{ο} νόμο του Νεύτωνα

$$T_{12,max} = ma => 0.5mg = ma => a = 0.5g$$

Οριακά, τη στιγμή έναρξης της ολίσθησης μεταξύ των δυο κιβωτίων, το κάτω κιβώτιο θα κινείται και αυτό με την ίδια επιτάχυνση οπότε ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$F - T - T_{21} = ma => F - 0.5mg - 0.5mg = 0.5mg => F = 1.5mg$$

Περαιτέρω αύξηση της F θα έχει ως αποτέλεσμα τη μετατροπή της T_{21} σε τριβή ολίσθησης οπότε $T_{21} = \mu N_{21} = 0.25mg$ και την εμφάνιση δυο διαφορετικών επιταχύνσεων a_1 και a_2 για τα δυο κιβώτια τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε από τον 2^{ο} νόμο του Νεύτωνα. Για το κιβώτιο 1

$$T_{12} = ma_1 => 0.25mg = ma_1 => a_1 = 0.25g$$

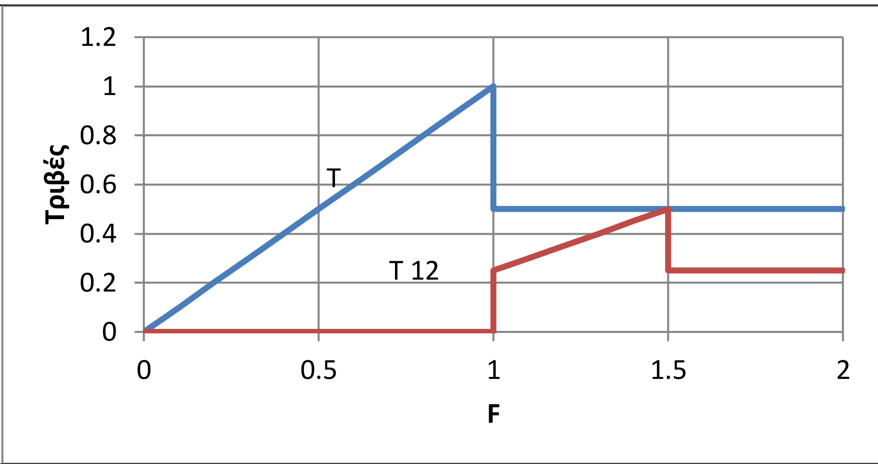
Για το κιβώτιο 2:

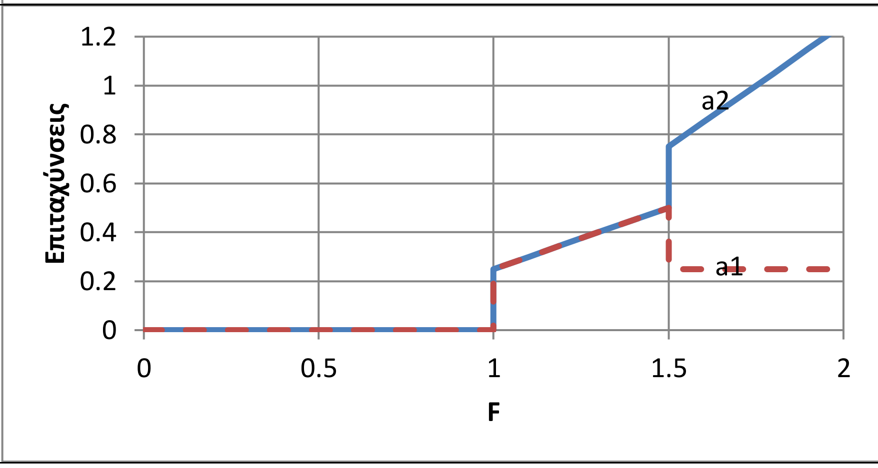
$$F - T - T_{21} = ma_2 => F - 0.5mg - 0.25mg = ma_2 => a_2 = \frac{F}{m} - 0.75g$$

Συμπερασματικά, οι τρεις δυνάμεις τριβής στις διάφορες περιοχές τιμών της F, συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα, όπως και οι επιταχύνσεις:

$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T_{12} = T_{21}}$	a_1	a_2
$0 \to mg$	$0 \to mg$	0	0	0
$mg \to 1.5mg$	$0.5mg$	$0.25mg \to 0.5mg$	$0.25g \to 0.5g$	$0.25g \to 0.5g$
$\geq 1.5mg$	$0.5mg$	$0.25mg$	$0.25g$	$F/m - 0.75g$

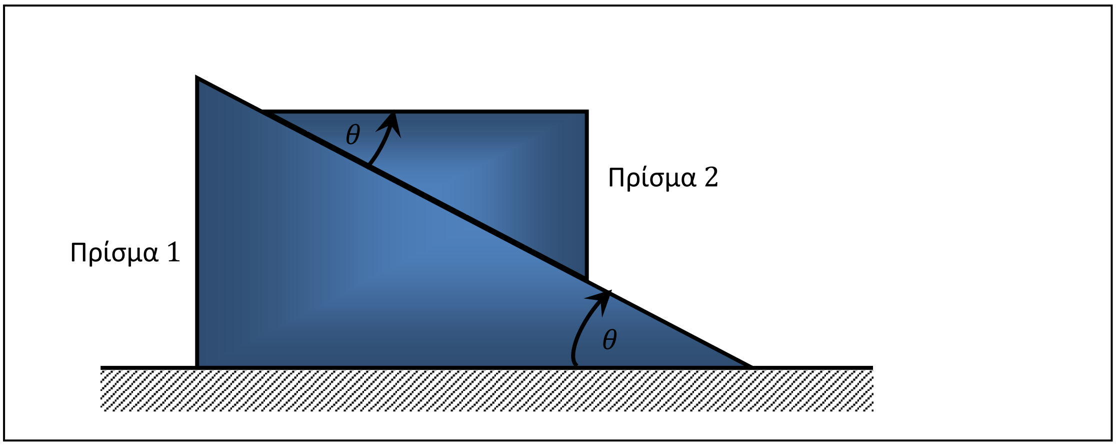
Παρακάτω φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των τριβών και των επιταχύνσεων συναρτήσει της F. Όλες οι δυνάμεις είναι σε μονάδες mg ενώ οι επιταχύνσεις είναι σε g.





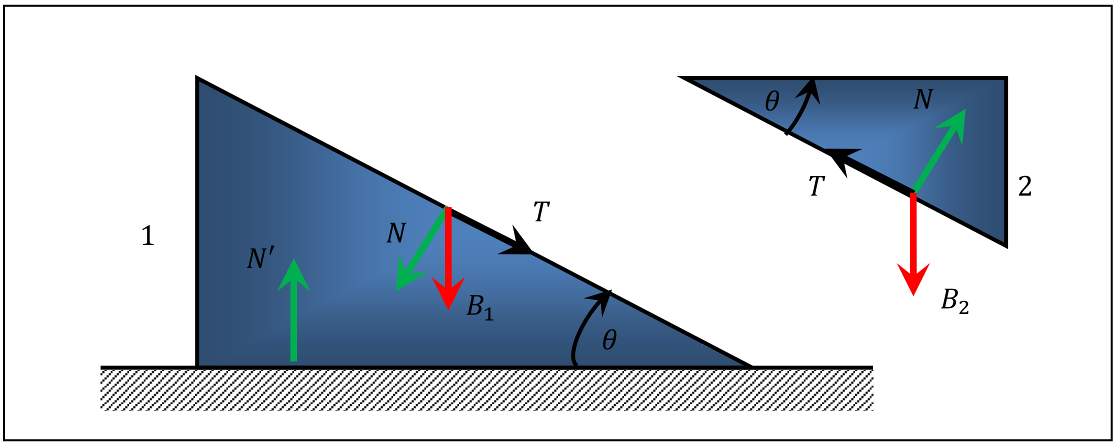
<u>Παράδειγμα 4.13</u>

Δυο πρίσματα της ίδιας γωνίας θ αλλά διαφορετικής μάζας είναι τοποθετημένα όπως στο παρακάτω σχήμα. Υπάρχει τριβή μεταξύ των πρισμάτων με συντελεστή στατικής τριβής μ αλλά το οριζόντιο δάπεδο είναι ελεύθερο τριβών. Η γωνία είναι αρκετά μεγάλη ώστε όταν το κάτω πρίσμα είναι ακίνητο, να μην μπορεί να σταθεί το άλλο επάνω του (ολισθαίνει προς τα κάτω). Εάν όμως το κάτω πρίσμα επιταχύνει αρκετά προς τα δεξιά, παρατηρείται ότι από μια ελάχιστη επιτάχυνση a_0 και επάνω, το πρίσμα 2 παραμένει προσκολλημένο με το πρίσμα 1 και κινούνται μαζί ως ένα σώμα. (α) Να σχεδιασθούν όλες οι δυνάμεις του συστήματος (εκτός από κάποια εξωτερική δύναμη που προκαλεί την επιτάχυνση) και να εξηγηθούν. (β) Να γραφτεί ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα σε x και y συνιστώσες για το πρίσμα 2 και (γ) Να υπολογισθεί η επιτάχυνση a_0 από τις εξισώσεις του υποερωτήματος β.



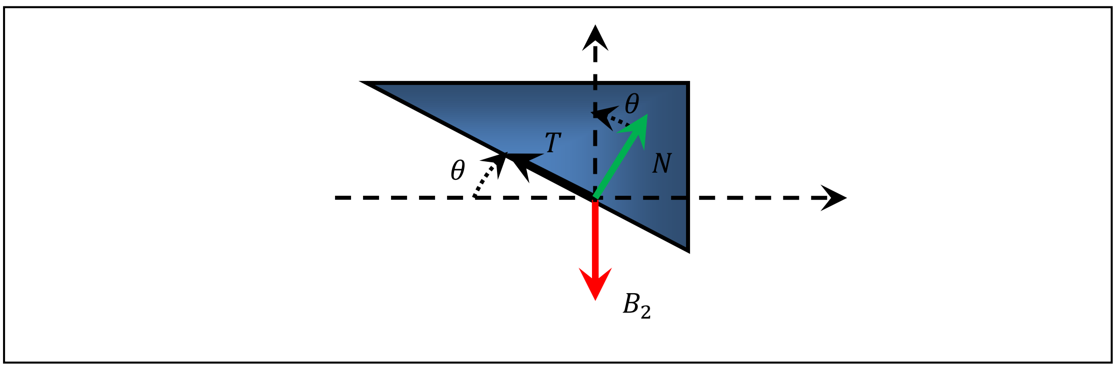
<u>Λύση</u>:

(α) Οι δυνάμεις που δρουν σε κάθε πρίσμα φαίνονται παρακάτω και είναι τα βάρη B_1 και B_2, οι κάθετες αντιδράσεις N στην κεκλιμένη επιφάνεια, η κάθετη αντίδραση N' από το δάπεδο και οι τριβές T. Στο διάγραμμα έχει ληφθεί υπόψη ο 3ος νόμος του Νεύτωνα και τα αντίστοιχα ζεύγη δυνάμεων συμβολίζονται με το ίδιο γράμμα. Η τριβή στο πρίσμα 2 είναι προς τα πάνω επειδή από την εκφώνηση αυτό το πρίσμα τείνει να ολισθήσει προς τα κάτω.



(β) Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος, ο 2ος νόμος του Νεύτωνα κατά τον άξονα x γράφεται ως εξής:

$$N sin\theta - T cos\theta = m_2 a_x$$



Σε αυτή την εξίσωση m_2 είναι η μάζα του πρίσματος 2 και a_x η οριζόντια επιτάχυνσή του. Ομοίως στον άξονα y έχουμε:

$$Ncos\theta + Tsin\theta - B_2 = m_2 a_y$$

όπου a_y η κατακόρυφη επιτάχυνση.

(γ) Όταν το πρίσμα 2 σταματάει να ολισθαίνει προς τα κάτω, τότε η κατακόρυφη ταχύτητά του και άρα και η a_y είναι μηδέν. Επίσης, η τριβή είναι πλέον στατική. Το οριακό σημείο που η τριβή αλλάζει από ολίσθησης σε στατική είναι όταν η στατική τριβή παίρνει την μέγιστη τιμή της $T = \mu N$. Γράφοντας την a_x ως a_0 (οριακή επιτάχυνση) και αντικαθιστώντας στις παραπάνω εξισώσεις, οδηγούμαστε στις

$$Nsin\theta - \mu Ncos\theta = m_2 a_0$$

και

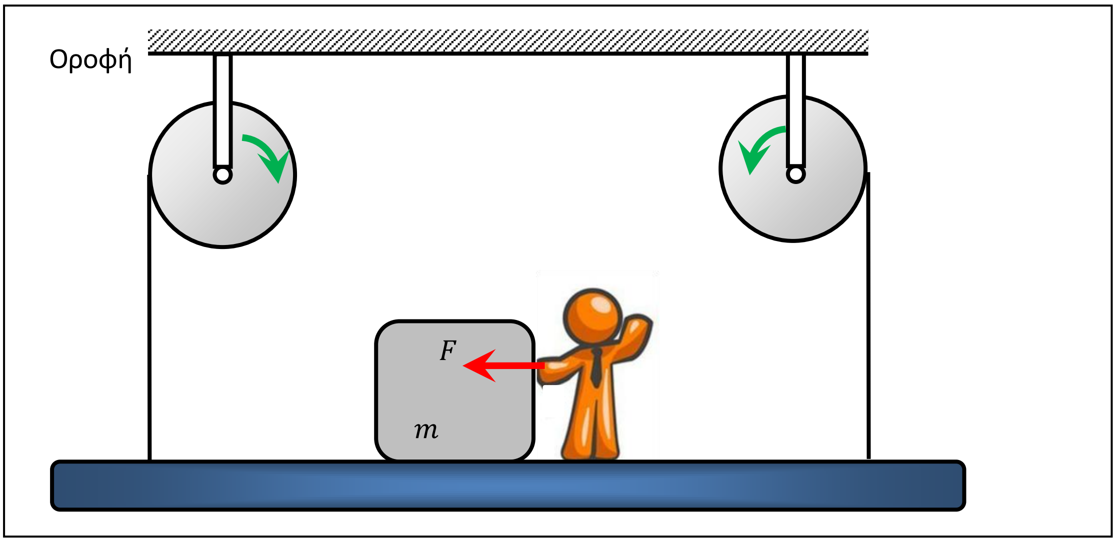
$$Ncos\theta + \mu Nsin\theta = m_2 g$$

από όπου με διαίρεση κατά μέλη καταλήγουμε εύκολα στην

$$a_0 = g\frac{sin\theta - \mu cos\theta}{cos\theta + \mu sin\theta}$$

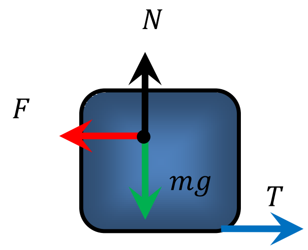
<u>Παράδειγμα 4.14</u>

Ένας φοιτητής σπρώχνει ένα κιβώτιο μάζας $m = 40\, kg$ επάνω στο δάπεδο ενός ανελκυστήρα εφαρμόζοντας μια δύναμη $F = 250\, N$. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ κιβωτίου και δαπέδου είναι $\mu = 0.25$. Να βρεθεί η οριζόντια επιτάχυνση του κιβωτίου όταν (α) ο ανελκυστήρας είναι ακίνητος, (β) όταν επιταχύνεται προς τα πάνω με επιτάχυνση $4.0\, ms^{-2}$ και (γ) όταν επιταχύνεται προς τα κάτω με επιτάχυνση $4.0\, ms^{-2}$. Έστω $g = 10.0\, ms^{-2}$ για ευκολία.



<u>Λύση</u>:

(α) Οι δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο φαίνονται στο παρακάτω σχήμα και είναι η δύναμη F, η τριβή του δαπέδου T, το βάρος του κιβωτίου mg, και η κάθετη αντίδραση N.



Όταν ο ανελκυστήρας ηρεμεί, τότε το κιβώτιο δεν μετακινείται κατά την κατακόρυφη διεύθυνση και άρα οι κατακόρυφες δυνάμεις πρέπει να ισορροπούν. Επομένως

$$N = mg$$

Η τριβή ολίσθησης ισούται με $T = \mu N = \mu mg$. Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα για την οριζόντια κίνηση οδηγεί στην

$$F - T = ma_x => a_x = \frac{F - \mu mg}{m} = \frac{250 - 0.25 \times 40 \times 10}{40} = 3.75\, ms^{-2}$$

όπου a_x είναι η οριζόντια επιτάχυνση του κιβωτίου.

(β) Όταν ο ανελκυστήρας επιταχύνεται προς τα πάνω με επιτάχυνση $a_y = 4\, ms^{-2}$ τότε και το κιβώτιο επιταχύνεται και αυτό κατακόρυφα με την ίδια επιτάχυνση. Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα για την κατακόρυφη κίνηση οδηγεί στην

$$N - mg = ma_y => N = m(a_y + g) = 40 \times (10 + 4) = 560\, N$$

Η τριβή ολίσθησης ισούται με $T = \mu N = 140\, N$. Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα για την οριζόντια κίνηση οδηγεί στην

$$F - T = ma_x => a_x = \frac{F - T}{m} = \frac{250 - 140}{40} = 2.75\, ms^{-2}$$

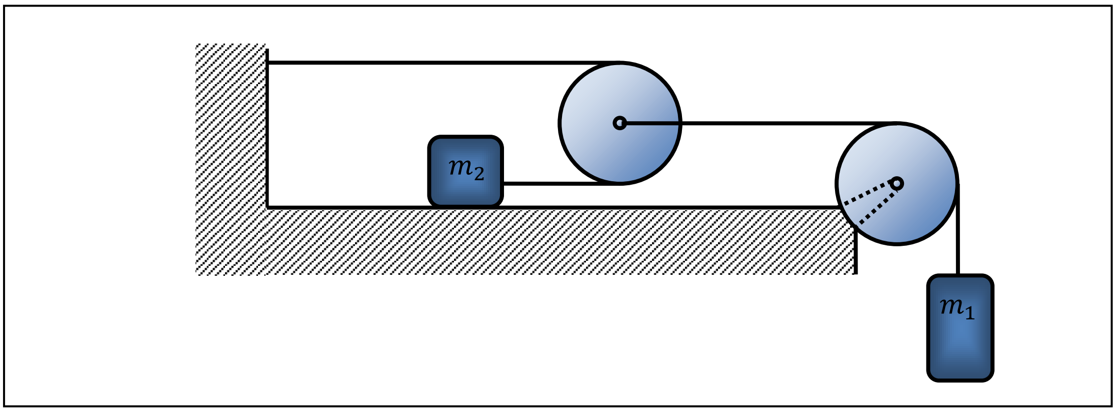
(γ) Οι υπολογισμοί είναι παρόμοιοι με το υποερώτημα β, μόνο που τώρα η κατακόρυφη επιτάχυνση είναι αρνητική $a_y = -4\, ms^{-2}$ και έτσι η κάθετη αντίδραση από το δάπεδο είναι ίση με $N = 40 \times (10 - 4) = 240\, N$, η τριβή $T = 0.25 \times 240 = 60\, N$ και η οριζόντια επιτάχυνση

$$a_x = \frac{F - T}{m} = \frac{250 - 60}{40} = 4.75\, ms^{-2}$$

Δηλαδή το κιβώτιο σε αυτή τη περίπτωση επιταχύνεται γρηγορότερα από ότι όταν ο ανελκυστήρας ηρεμούσε.

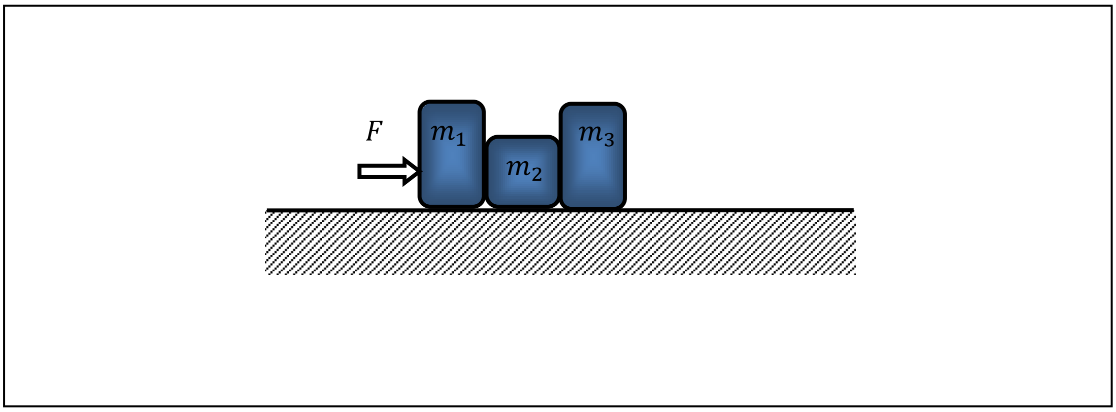
Προβλήματα

4.1 Στο παρακάτω σχήμα δεν υπάρχουν τριβές και οι τροχαλίες και τα νήματα είναι ιδανικά. Να βρεθεί η επιτάχυνση της μάζας m_2



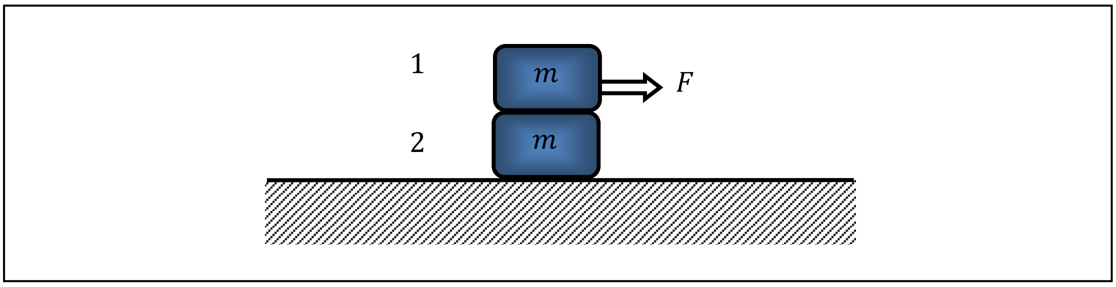
<u>Απάντηση</u>: $a_1 = m_1 g/(4m_2 + m_1)$ & $a_2 = 2a_1$

4.2 Μια δύναμη F δράει σε ένα σύστημα τριών κιβωτίων τα οποία μπορούν και ολισθαίνουν χωρίς τριβή επάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Να βρεθεί ο λόγος N_{12}/N_{23} όπου $N_{n\,n\pm1}$ είναι η δύναμη αλληλεπίδρασης του κιβωτίου n με το γειτονικό του κιβώτιο $n \pm 1$.



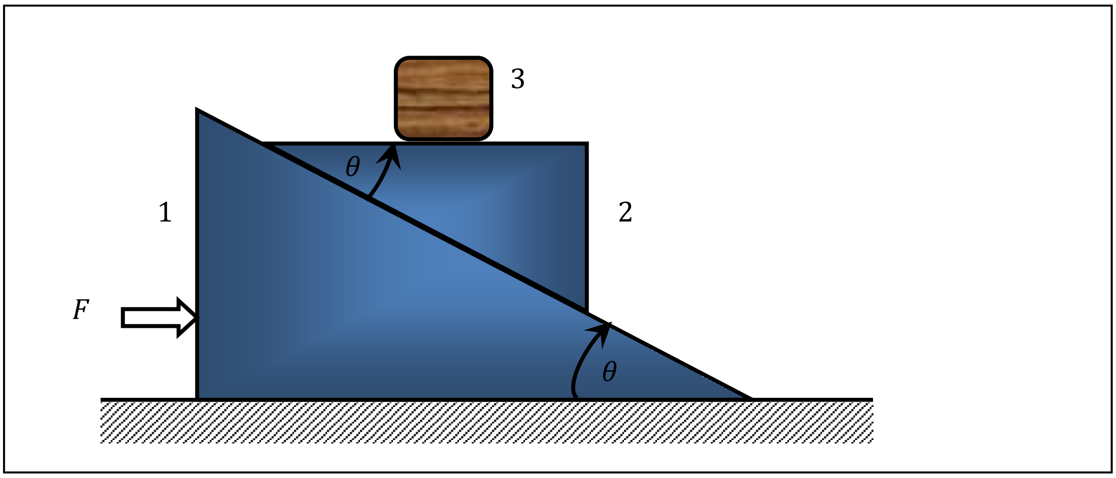
<u>Απάντηση</u>: $1 + m_2/m_3$

4.3 Μια δύναμη F δράει στο άνω κιβώτιο ενός συστήματος δυο πανομοιότυπων κιβωτίων μάζας m. Τα κιβώτια και το δάπεδο είναι από το ίδιο υλικό και οπότε και οι δυο επιφάνειες επαφής έχουν τους ίδιους συντελεστές στατικής τριβής $\mu_\Sigma = 0.6$ αλλά και τους ίδιους συντελεστές τριβής ολίσθησης $\mu = 0.4$. Να γίνει γραφική παράσταση όλων των δυνάμεων τριβών του συστήματος συναρτήσει της F από 0 έως και μιας αρκετά μεγάλης τιμής ώστε να παρατηρηθούν φαινόμενα ολίσθησης και στις δυο επιφάνειες. Επίσης να γίνει και γραφική παράσταση των επιταχύνσεων των δυο κιβωτίων ως προς F.



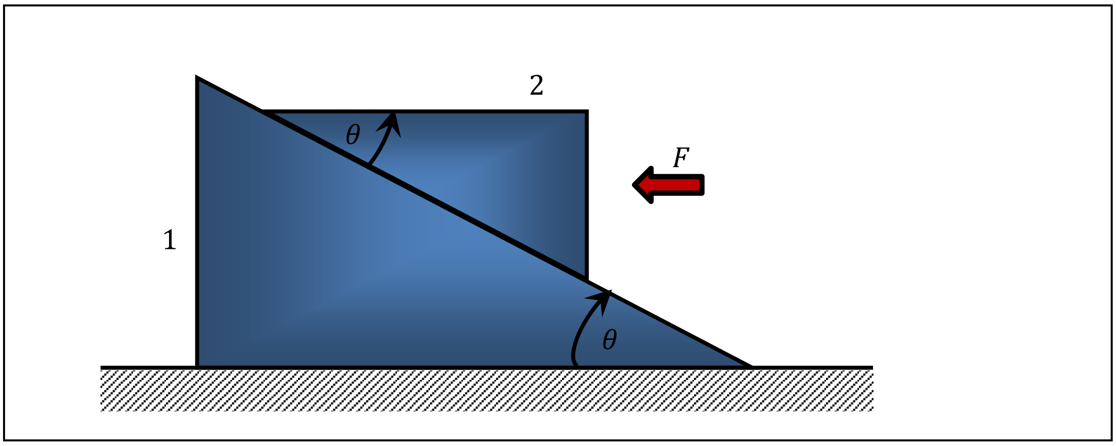
4.4 Ένα ελατήριο είναι τοποθετημένο επάνω στον άξονα x με τη μια του άκρη στερεωμένη σε ακλόνητο άκρο και την άλλη προσδεμένη σε μάζα m η οποία ταλαντεύεται επάνω στον άξονα έτσι ώστε το $x = 0$ να είναι η θέση ισορροπίας της. Η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου στη μάζα δίνεται από την έκφραση $F(x) = -kx$ όπου k η σταθερά του ελατηρίου. Το μείον δίνει την σωστή κατεύθυνση στη δύναμη αφού π.χ. όταν η μάζα κινείται δεξιά με $x > 0$, η δύναμη είναι αρνητική δηλαδή προς τα αριστερά. Να βρεθούν η επιτάχυνση, η ταχύτητα και η μετατόπιση της μάζας συναρτήσει του χρόνου εάν γνωρίζουμε ότι η μάζα ξεκινάει στο $t = 0$ με μηδενική ταχύτητα από το σημείο $x = x_0$. (Σημείωση: Σε αυτό το πρόβλημα καταφεύγετε σε μια διαφορική εξίσωση. Εάν δυσκολεύεστε να τη λύσετε, μπορείτε να ακολουθήσετε την απλή μέθοδο που παρουσιάζεται στο βιβλίο στο παράδειγμα με τον αλεξιπτωτιστή).

4.5 Στο παρακάτω σχήμα τα δυο πρίσματα έχουν την ίδια γωνία θ και μάζες ίσες μεταξύ τους και ίσες με την μάζα του κιβωτίου. Δεν υπάρχει τριβή μεταξύ των πρισμάτων αλλά ούτε και μεταξύ του δαπέδου και του πρίσματος 1. Υπάρχει όμως τριβή μεταξύ του κιβωτίου και του πρίσματος 2 με συντελεστή στατικής τριβής μ. Μια δύναμη F δρα στο κάτω πρίσμα 1 και παρατηρείται ότι και τα τρία σώματα κινούνται μαζί ως ένα σώμα. Να βρεθούν α) Η επιτάχυνση a του συστήματος β) Η δύναμη F και γ) Το ελάχιστο μ ώστε το κιβώτιο να παραμένει ακίνητο σχετικά με το πρίσμα 2.

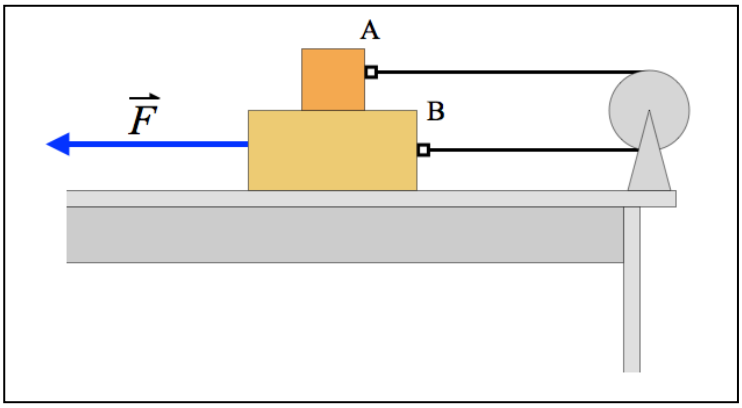


<u>Απάντηση</u>: (α) $gtan\theta$, (β) $3mgtan\theta$, (γ) $tan\theta$

4.6 Δυο πρίσματα της ίδιας γωνίας θ αλλά διαφορετικής μάζας m_1 και m_2 είναι τοποθετημένα όπως στο παρακάτω σχήμα. Υπάρχει τριβή μεταξύ των πρισμάτων με συντελεστή στατικής τριβής μ αλλά το οριζόντιο δάπεδο είναι ελεύθερο τριβών. Η γωνία είναι αρκετά μεγάλη ώστε όταν το κάτω πρίσμα είναι ακίνητο, να μην μπορεί να σταθεί το άλλο επάνω του (ολισθαίνει προς τα κάτω). Εάν όμως στο πάνω πρίσμα εφαρμοστεί μια δύναμη F προς τα αριστερά όπως στο σχήμα, παρατηρείται ότι από μια ελάχιστη δύναμη $F > F_0$ και επάνω, το πρίσμα 2 παραμένει προσκολλημένο με το πρίσμα 1 και κινούνται μαζί ως ένα σώμα. (α) Να σχεδιασθούν όλες οι δυνάμεις του συστήματος για $F > F_0$ και να ερμηνευτούν. (β) Να γραφτεί ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα σε x και y συνιστώσες για το πρίσμα 2 και (γ) Να υπολογισθεί η δύναμη F_0 από τις εξισώσεις του υποερωτήματος β.

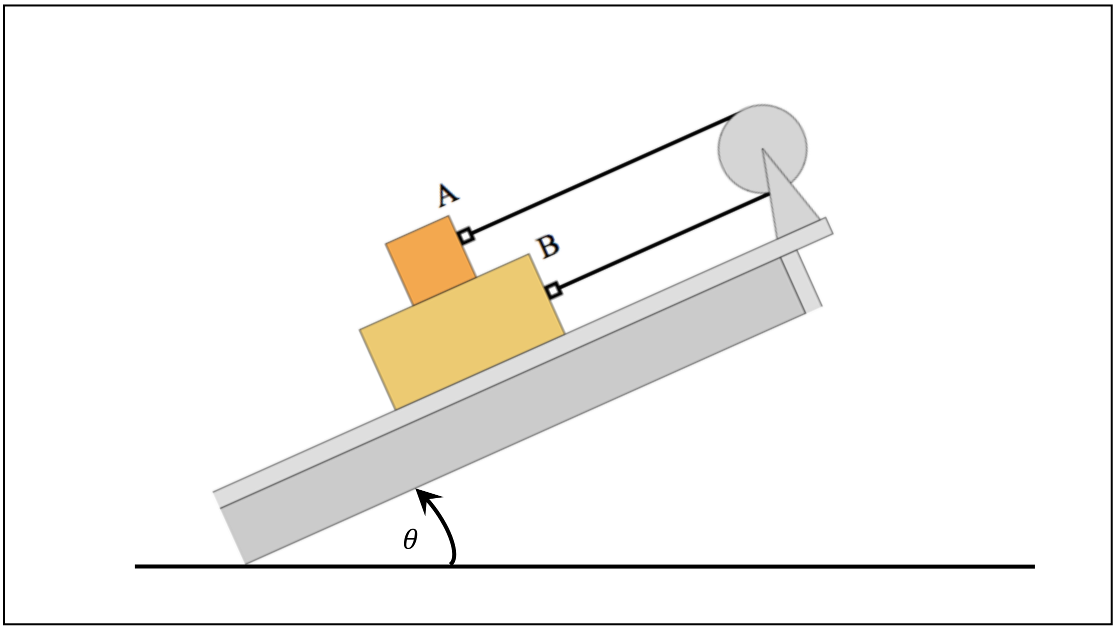


4.7 Στο παρακάτω σχήμα οι τα δυο κιβώτια A και B συνδέονται με ιδανικό νήμα και ιδανική τροχαλία και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης $\mu = 0.4$ είναι ο ίδιος για όλες τις επιφάνειες. Να βρεθεί η δύναμη τριβής F_T που δρα στο πάνω κιβώτιο εάν η τάση του νήματος που δρα στο κάτω κιβώτιο είναι $T = 2.5\ N$ και εάν αυτό το κιβώτιο κινείται με σταθερή επιτάχυνση $a = 3\ m/s^2$. Πάρτε $g = 10\ m/s^2$ για ευκολία.



Απάντηση: $2.86\ N$

4.8 Στο παρακάτω σχήμα οι μάζες $m_B > m_A$ συνδέονται με ιδανικό νήμα και ιδανική τροχαλία. Ο συντελεστή τριβής ολίσθησης μ είναι ο ίδιος για όλες τις επιφάνειες. Να βρεθεί η επιτάχυνση του κιβωτίου Β εάν αυτό ολισθαίνει προς τα κάτω.

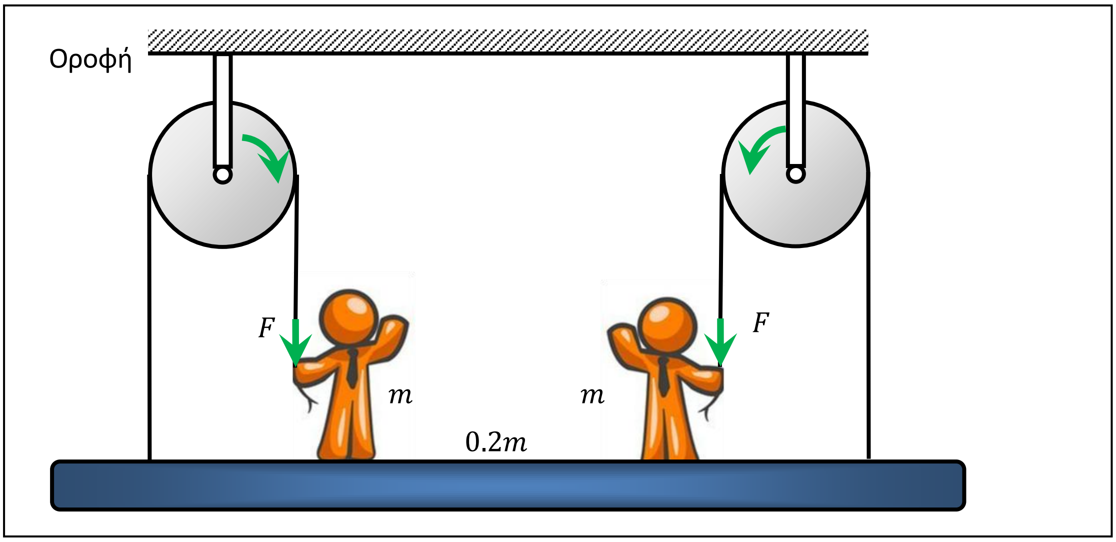


Απάντηση:

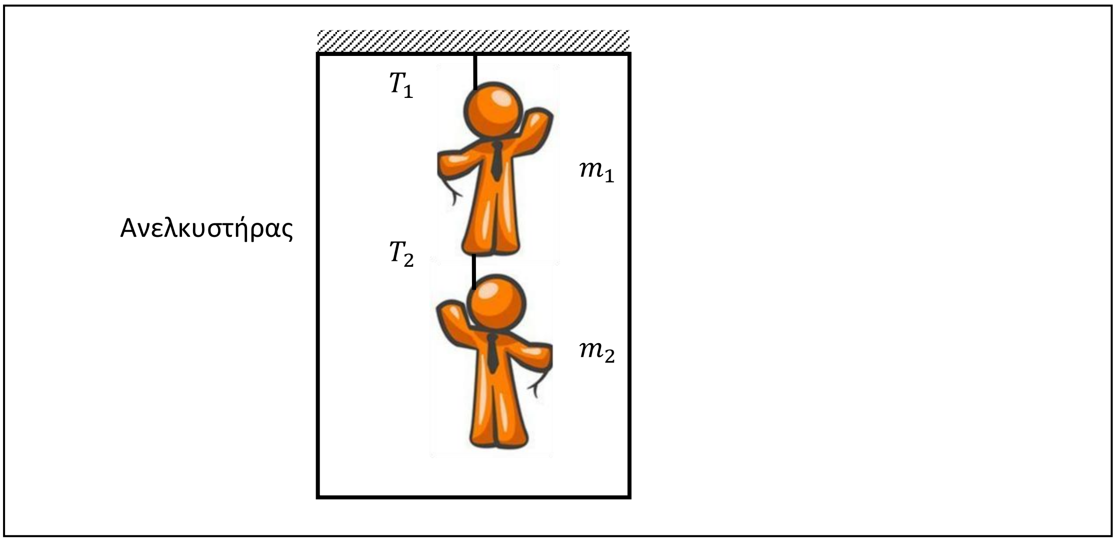
$$a = \frac{m_B - m_A}{m_B + m_A} g sin\theta - \frac{3m_A + m_B}{m_B + m_A} \mu g\ cos\theta$$

4.9 Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, δυο εργάτες μάζας m ο καθένας είναι πάνω σε μια πλατφόρμα και την έλκουν με δύναμη F ο καθένας μέσω δυο ιδανικών τροχαλιών. Εάν η μάζα της πλατφόρμας είναι $0.2m$, να δειχθεί ότι η επιτάχυνσής της είναι ίση με

$$a = \frac{2F - 1.1mg}{1.1m}$$



4.10 Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, δυο ορειβάτες επιθυμούν να αναρτηθούν με σχοινί από την οροφή ενός ανελκυστήρα. Ο πάνω αναρτάται άμεσα από την οροφή ενώ ο κάτω αναρτάται από τον πάνω, χωρίς να αγγίζουν τα πόδια του στο δάπεδο του ανελκυστήρα. Ο ανελκυστήρας επιταχύνεται προς τα πάνω με επιτάχυνση $4.0\ ms^{-2}$. Εάν τα νήματα είναι ιδανικά και οι μάζες των ορειβατών είναι $m_1 = 80\ kg$ του πάνω και $m_2 = 65\ kg$ του κάτω, να βρεθούν οι τάσεις τους T_1 και T_2 στις εξής περιπτώσεις: (α) όπως στο παρακάτω σχήμα (β) εάν σπάσει μόνο το κάτω νήμα και (γ) εάν σπάσει μόνο το επάνω νήμα



Απάντηση: (α) 910 & 2030, (β) 1120 & 0, (γ) 0 & 0 N

α) Στον κάτω ορειβάτη ασκούνται η τάση T_2 προς τα πάνω και το βάρος του $m_2 g$ προς τα κάτω. Ο ορειβάτης κινείται μαζί με τον ανελκυστήρα και άρα πρέπει να έχουν την ίδια επιτάχυνση $a = 4.0\ ms^{-2}$ προς τα πάνω. Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα:

$$T_2 - m_2 g = m_2 a$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα και επιλέγοντας $g \approx 10\ ms^{-2}$ για ευκολία, οδηγούμαστε στο

$$T_2 = m_2(g + a) = 65(10 + 4) = 910\ N$$

Στον πάνω ορειβάτη, ασκούνται δυο τάσεις, μια από πάνω και μια από κάτω και επομένως ο $2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα οδηγεί στο

$$T_1 - T_2 - m_1 g = m_1 a$$

$$T_1 = T_2 + m_1(g + a) = 2030\ N$$

β) Όταν σπάει κάτω νήμα, τότε αυτομάτως $T_2 = 0$ και ο $2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα για τον κάτω ορειβάτη γίνεται:

$$0 - m_2 g = m_2 a \Rightarrow a = -g$$

δηλαδή αυτός εκτελεί ελεύθερη πτώση με επιτάχυνση αυτής της βαρύτητας προς τα κάτω. Ο $2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα για τον πάνω ορειβάτη γίνεται:

$$T_1 - 0 - m_1 g = m_1 a \Rightarrow T_1 = m_1(g + a) = 1120\ N$$

γ) Όταν σπάει το πάνω νήμα, τότε αυτομάτως $T_1 = 0$ και τα δυο σώματα ως σύνολο, εκτελούν ελεύθερη πτώση και άρα έχουν επιτάχυνση $a = -g$. Ο $2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα για τον πάνω ορειβάτη γίνεται:

$$0 - T_2 - m_1 g = m_1 a \Rightarrow T_2 = -m_1(g - g) = 0\ N$$

Αυτό σημαίνει ότι και το νήμα που συνδέει τους δυο ακροβάτες μεταξύ τους είναι χαλαρό και δεν ασκεί κάποια δύναμη σε κανένα από αυτούς.

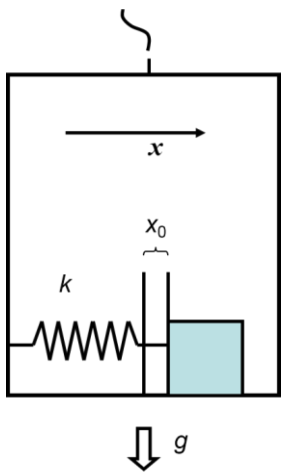
4.11 Η διανυσματική δύναμη $\vec{F}(t) = F_0(cos\omega t, sin\omega t)$ δρα σε σημειακή μάζα m που κινείται στο επίπεδο $x - y$, όπου F_0 και ω είναι σταθερές και t ο χρόνος. Να σχεδιαστεί η τροχιά της m στο επίπεδο εάν είναι γνωστό ότι στο $t = 0$ το σημείο βρίσκεται στον άξονα x σε απόσταση $\beta > 0$ από την αρχή των συντεταγμένων και με ταχύτητα μέτρου $F_0/m\omega$ και κατεύθυνση προς τον αρνητικό άξονα y. Δίνονται ω =3.6 rad/s, F_0 =6 N και m =3 kg. <u>Σημείωση</u>: Στην γραφική σας παράσταση πρέπει να φαίνονται καθαρά όλα τα χαρακτηριστικά νούμερα της τροχιάς, π.χ. τυχόν ρίζες μέγιστα, ελάχιστα, ασύμπτωτοι, κ.τ.λ.

<u>Απάντηση</u>: Κύκλος ακτίνας γ και κέντρο στο $(\beta + \gamma, 0)$

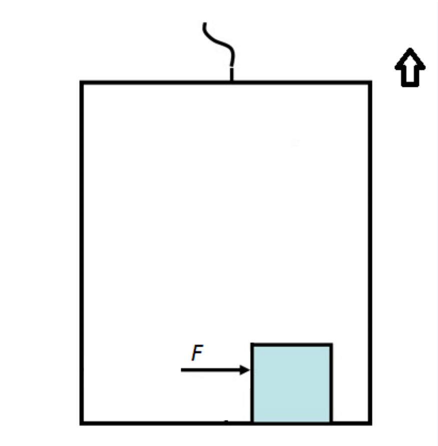
4.12 Ξεκινώντας από την ηρεμία, ένας ανελκυστήρας επιταχύνει με σταθερή επιτάχυνση από το ισόγειο στον δεύτερο όροφο και επιβραδύνει επίσης με σταθερή επιβράδυνση από τον πέμπτο έως τον έκτο όροφο έως ότου σταματήσει εντελώς. Μεταξύ του δεύτερου και του πέμπτου ορόφου κινείται με σταθερή ταχύτητα καλύπτοντας κάθε όροφο απόστασης 6 μέτρων σε 1 δευτερόλεπτο. Στο εσωτερικό του ανελκυστήρα υπάρχει ζυγαριά πάνω στην οποία στέκεται φοιτητής. Κατά τη διάρκεια της κίνησης από τον δεύτερο στον πέμπτο όροφο ο φοιτητής "διαβάζει" στην οθόνη της ζυγαριάς την ένδειξη $80\ kg$. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη ένδειξη στην οθόνη της ζυγαριάς κατά την διάρκεια του ταξιδιού; Θεωρήστε ότι όλοι οι όροφοι, συμπεριλαμβανομένου και του ισογείου είναι ισοϋψείς.

<u>Απάντηση</u>: 88 και $64\ kg$

4.13 Στο παρακάτω σχήμα ένας ανελκυστήρας ανέρχεται με επιτάχυνση a προς τα πάνω. Στο δάπεδο του ανελκυστήρα υπάρχει κιβώτιο το οποίο είναι συνδεδεμένο μέσω ελατηρίου με ένα από τα τοιχώματα του ανελκυστήρα. Ένας φοιτητής εφαρμόζει μια τέτοια δύναμη F στο κιβώτιο προς τα δεξιά ώστε αυτό να κινείται οριζόντια με σταθερή ταχύτητα. (α) Να βρεθεί η δύναμη F όταν το ελατήριο έχει παραμορφωθεί κατά $+x_0$ από την θέση ισορροπίας του. (β) Να απαντηθεί το ίδιο ερώτημα εάν το συρματόσχοινο ανάρτησης του ανελκυστήρα σπάσει οπότε και πέφτει στο κενό με επιτάχυνση g.

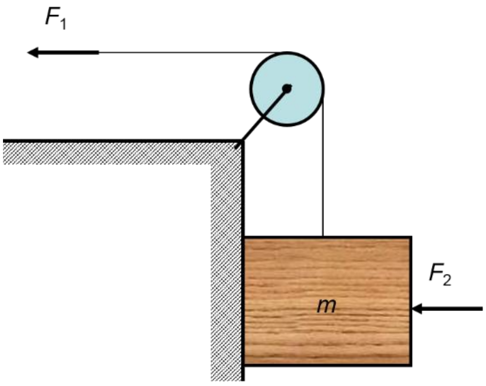


4.14 Φοιτητής ωθεί κιβώτιο μάζας $m = 4.5\ kg$ εφαρμόζοντας δύναμη F ώστε αυτό να κινείται με σταθερή οριζόντια ταχύτητα κατά μήκος του δαπέδου ενός ανελκυστήρα ο οποίος αρχικά είναι ακίνητος. Ο συντελεστής της τριβής ολίσθησης μεταξύ δαπέδου και κιβωτίου είναι μ. Ξαφνικά ο ανελκυστήρας ανέρχεται με επιτάχυνση λg όπου $\lambda = 0.4$ και ο φοιτητής παρατηρεί ότι χρειάζεται διαφορετική δύναμη F' για να προκαλέσει το ίδιο αποτέλεσμα όπως πριν (σταθερή οριζόντια ταχύτητα). Εάν $F' = 2\ N$, να βρεθεί ο συντελεστής της τριβής ολίσθησης. Πάρτε $g = 10\ m/s^2$ για ευκολία.



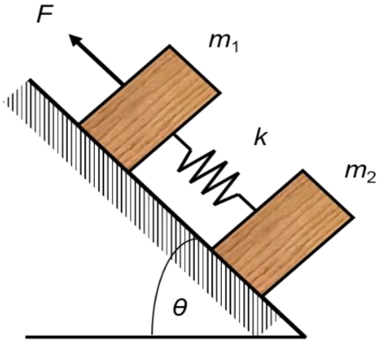
Απάντηση: 0.03

4.15 Στο παρακάτω σχήμα το κιβώτιο μάζας $m = 0.2\ kg$ βρίσκεται σε ακινησία εάν η δύναμη F_2 είναι αρκετά μεγάλη λόγω τριβής με την επιφάνεια επαφής. Εάν την ελαττώσουμε, σε κάποια οριακή της τιμή το κιβώτιο ξεκινάει να ανέρχεται με σταθερή επιτάχυνση $a = 2.5\ m/s^2$ (λόγω της F_1). Εάν θεωρηθεί ότι η F_2 είναι απειροστά χαμηλότερη από αυτήν την οριακή τιμή και ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι ο μισός από τον συντελεστή στατικής τριβής, να βρεθεί η δύναμη F_1. Πάρτε $g = 10\ m/s^2$ για ευκολία.

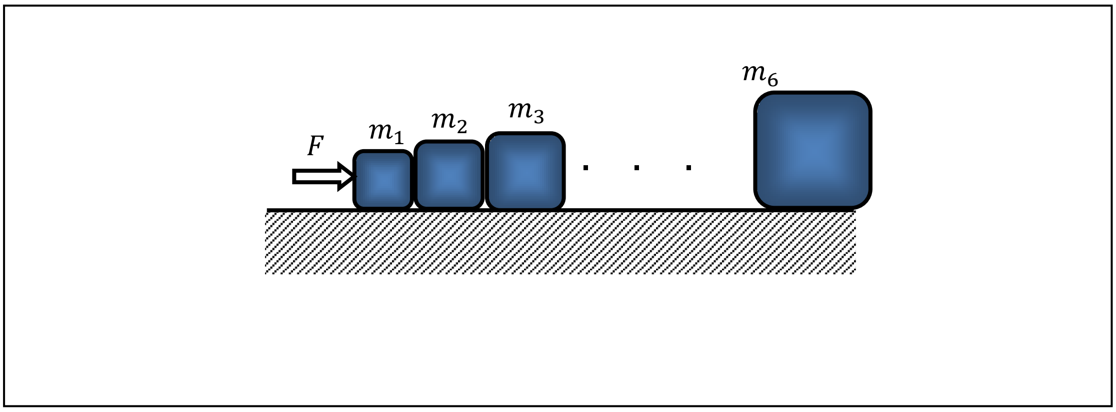


Απάντηση: $2.5\ N$

4.16 Τα δυο κιβώτια στο παρακάτω σχήμα συνδέονται μεταξύ τους με ελατήριο σταθεράς k. Όταν εφαρμόζεται μια σταθερή δύναμη F στο πάνω κιβώτιο, τότε τα δυο κιβώτια κινούνται με σταθερή (κοινή) επιτάχυνση. Εάν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης του κάθε κιβωτίου με το δάπεδο είναι μ_1 και μ_2 αντίστοιχα, τότε να βρεθεί η παραμόρφωση Δx του ελατηρίου.



4.17 Μια δύναμη F δρα στο αριστερό άκρο ενός συστήματος έξι κιβωτίων με μάζες $m_1 = m$ η πρώτη και $m_i = \lambda m_{i-1}$ οι υπόλοιπες όπου $i = 2{,}3 \ldots 6$ και $\lambda > 1$ ένας καθαρός αριθμός. Εάν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης με το δάπεδο είναι μ, να βρεθεί η διαφορά $N_{23} - N_{34}$ όπου $N_{i,i\pm1}$ είναι η δύναμη αλληλεπίδρασης του κιβωτίου i με το γειτονικό του κιβώτιο $i \pm 1$ (Υπαινιγμός: Δουλέψτε πρώτα στο όλο συσσωμάτωμα σαν να ήταν ένα ενιαίο σώμα).

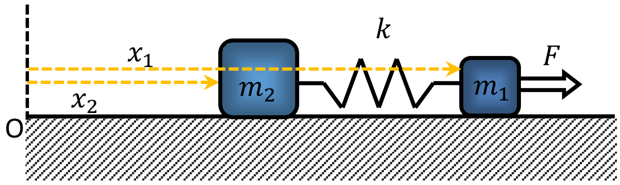


<u>Απάντηση</u>: $F\lambda^2(1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots \lambda^5)^{-1}$

4.18 Τα δυο κιβώτια στο παρακάτω σχήμα συνδέονται μεταξύ τους με ελατήριο σταθεράς k και αρχικά κρατιούνται ακίνητα σε τέτοια απόσταση ώστε το ελατήριο να έχει το φυσικό του μήκος L. Στο $t = 0$ εφαρμόζεται μια εξωτερική μεταβλητή δύναμη F και τα δυο κιβώτια κινούνται προς τα δεξιά με διαφορετικές ταχύτητες $x_1'(t)$ και $x_2(t)$ όπου x_1 και x_2 είναι οι συντεταγμένες του κάθε κιβωτίου αντίστοιχα από κάποιο σημείο αναφοράς O. Δεν υπάρχει τριβή μεταξύ δαπέδου και κιβωτίων. Εάν η εξωτερική δύναμη αυτοπροσαρμόζεται ώστε σε κάθε χρονική στιγμή να είναι ίση με

$$F = \frac{(m_1 + m_2)\lambda}{m_2} \Delta x$$

όπου $\Delta x = x_2 - x_1$ η παραμόρφωση του ελατηρίου, τότε να βρεθούν (α) η διαφορική εξίσωση (Δ.Ε.) που ικανοποιεί το Δx με τη βοήθεια του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα και (β) μια έκφραση του Δx συναρτήσει του χρόνου. Εάν δυσκολεύεστε να λύσετε τη Δ.Ε., μπορείτε να ακολουθήσετε την απλή μέθοδο που παρουσιάζεται στο βιβλίο στο παράδειγμα με τον αλεξιπτωτιστή).



<u>Απάντηση</u>: (β) $Lcos(\omega t)$ όπου $\omega = \sqrt{(m_1 + m_2)(k + \lambda)/m_1 m_2}$