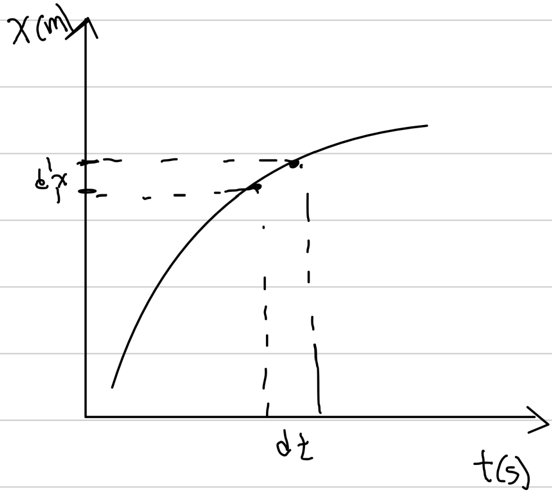
Κίνηση σε ευθεία - Υλικό Σημείο 02/10

- Στιγμιαία Ταχύτητα $u(t) = \dfrac{dx}{dt} = x'(t)$

- $\bar{u} = \dfrac{x}{t}$ (Μέση)

Γεωμετρική ερμηνεία → κλίση της καμπύλης



t: ανεξάρτητη μεταβλητή

x: εξαρτημένη -ιι-

$dt = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta t$

ανεξάρτητη μεταβλητή

$dx = x'(t)\,dt$ → διαφορικό της ανεξάρτητης μεταβλητής

Στιγμιαία επιτάχυνση

$$a(t) = u'(t) = \frac{du}{dt}$$

• π.χ Κινητό κινείται με απομ/ση που δίνεται από τον τύπο

$x(t) = bt^3 - ct + e$

i) Βρείτε τις μονάδες των σταθερών b, c, e με $b, c, e \neq 0$

ii) Για ποια t το κινητό ακινητοποιείται

iii) Θα μείνει στις θέσεις ακινητοποίησης;

i) $x(t) = bt^3 - ct + e$

$x(t) \to m$ άρα και $bt^3 - ct + e \to m$

$bt^3 \to m$

$\hookrightarrow s^3$ άρα $b \to m/s^3$

$ct \to m$ $c \to m/s$

$\hookrightarrow s$

$e \to m$

ii) Ακινησία $\to u = 0 \Rightarrow x'(t) = 0 \Rightarrow 3bt^2 - c = 0 \Rightarrow$

$3bt^2 = c$

$t = \pm\sqrt{\frac{c}{3b}}$ άρα για $t = t_1 = \sqrt{\frac{c}{3b}}$ $x'(t) = 0$

iii) Εξετάζουμε την επιτάχυνση

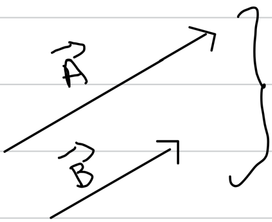
$x''(t_1) = \alpha(t_1) = 6bt_1 = 6b\sqrt{\frac{c}{3b}} = \sqrt{\frac{\cancel{36}^{12}\,\cancel{b^2}^{b}\,c}{\cancel{3b}}} = \sqrt{12b\,c}$

Αν $\alpha(t_1) = 0$ ακινητοποιείται

$\alpha(t_1) = 0 \Rightarrow \sqrt{12bc} = 0 \Rightarrow b = 0$ ή $c = 0$ άτοπο από υπόθεση

Άρα το κινητό δεν ακινητοποιείται αφού $\alpha(t) \neq 0$

Κίνηση υλικού σημείου σε δύο διαστάσεις 03/10



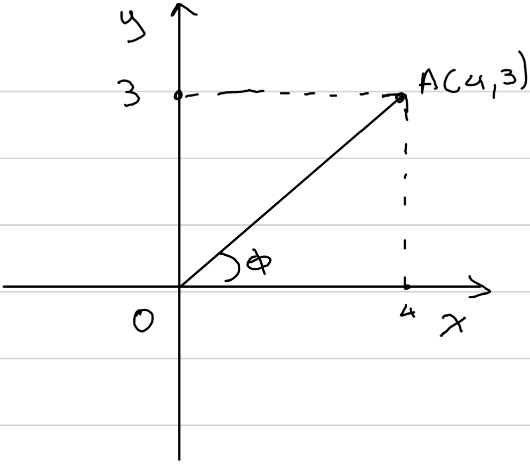
ομόρροπο

<u>Μέτρο</u> διανύσματος → μήκος του
δείχνει την ένταση της ποσότητας

<u>Φορά</u> → κατεύθυνση ποσότητας

Διανύσματα
→ Ίδιο μέτρο και ίδια φορά $\vec{A} = \vec{B}$
→ Ίδιο μέτρο αλλά αντίθετη φορά $\vec{A} = -\vec{B}$

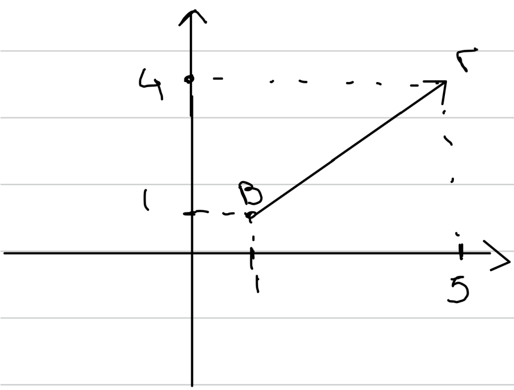
Μεταφέραμε το διάνυσμα στην αρχή των αξόνων ώστε οι συντ/νες του να είναι συντ/νες του $\vec{OA}$



$\tan\phi = \frac{y}{x} = \frac{3}{4}$

$\vec{OA} = (4,3)$

→ Εάν μετακινηθεί το διάνυσμα:



$\vec{OA} = \vec{B\Gamma}$

$\vec{B\Gamma} = \left((x_{τελ} - x_{αρχ}), (y_{τελ} - y_{αρχ})\right)$

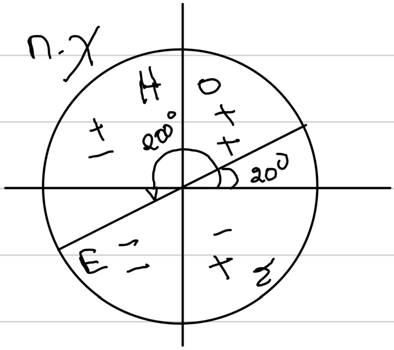
$\vec{B\Gamma} = (x_\Gamma - x_B, y_\Gamma - y_B) = 4,3$

Μέτρο του OA : $|\vec{OA}|$ → μήκος του OA $|OA| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\tan\phi = \frac{y}{x} = \frac{3}{4} = 0,75$

atan 0,75 ⇒ $\phi = 36,87^\circ$

π.χ



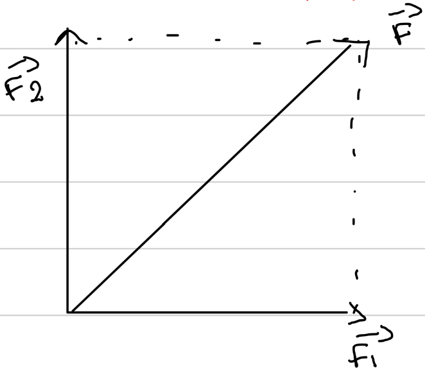
Διανύσματα: (3,4) $\text{atan}\frac{4}{3} = \phi = 53,1$

(−3,−4) $\text{atan}\frac{-4}{-3} = \phi = 53,1$

Η αριθμομηχανή δίνει αποτελέσματα για 1° και 4° τεταρτημόριο. Εάν η γωνία είναι 2° ή 3° ($x<0$) προσθέτω 180° (ή π)

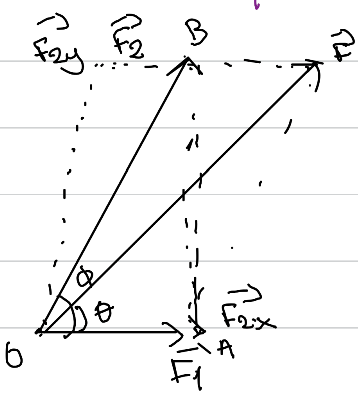
→ Στο (−3,−4): $\phi' = 53,1 + 180 = 233,1°$

Πράξεις με διανύσματα 09/10



$$\left.\begin{array}{l}\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} \\ \vec{F_1} = (F_1, 0) \\ \vec{F_2} = (0, F_2)\end{array}\right\} \vec{F} = (F_1, F_2)$$

Κανόνας Παραλληλογράμμου



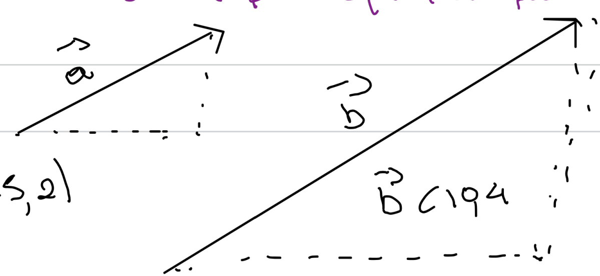
$$\left.\begin{array}{l}\vec{F_1} = (F_1, 0) \\ \vec{F_2} = (F_{2x}, F_{2y})\end{array}\right\} \vec{F} = (14, 5)$$

Γωνία $\theta = \arctan \frac{5}{14}$

→ Νόμος συνημιτόνων $|AB| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\phi} \Rightarrow$

$|F| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\phi}$

→ Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα



$\vec{a} = (5, 2)$

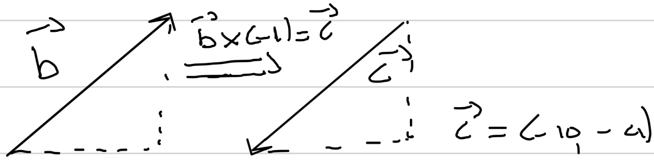
$\vec{b}$ (194

Εαν διπλασιάσουμε τις συνιστώσες προκύπτει διάνυσμα ίδιας φοράς - διπλάσιου μέτρου $\boxed{\vec{b} = 2\vec{a}}$

(Διαίρεση → πολλ/μος · $\frac{1}{b}$

Πολλ/μος με αρνητικό αριθμό → αντιστροφή φοράς

π.χ



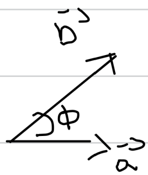
$\vec{b}$ (10,4)

- $κ > 0$ $\vec{b} = κ\vec{a}$ ίδια φορά
- $κ < 0$ $\vec{b} = |κ|\vec{a}$ αντίθετη φορά
- $κ = 0$ $\vec{b} = 0$ σημείο

Εσωτερικό γινόμενο
(Διάνυσμα x Διάνυσμα)

Προβολή διανυσμάτων σε άξονες

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos φ$ τύπος I
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$ τύπος II



$\vec{a} = (a_x, a_y)$

$\vec{b} = (b_x, b_y)$

⚠ Το εσωτερικό γινόμενο δίνει αριθμό

π.χ Να βρεθεί η γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$
με χρήση εσωτ. γινομένου
$\vec{a} = (8, 3)$ $\vec{b} = (-2, 6)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y b_y = 8(-2) + 3 \cdot 6 = -16 + 18 = +2$

Τύπος (Ι) : $\cos\phi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = 0{,}037$

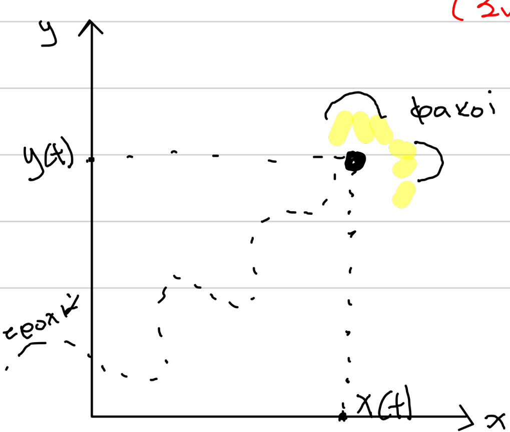
$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

$\cos\phi = 0{,}037 \Rightarrow \phi = \cos^{-1} 0{,}037 = 87{,}9^\circ$

$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$

• Αφαίρεση διανυσμάτων → πρόσθεση αντίθετων διανυσμάτων

Κίνηση σε δύο διαστάσεις
(σημειακή μάζα)



m σε τυχαίο χρόνο t

B: (σκιά) κατακόρυφη προβολή

A: οριζόντια προβολή

A, B → ευθύγραμμη κίνηση

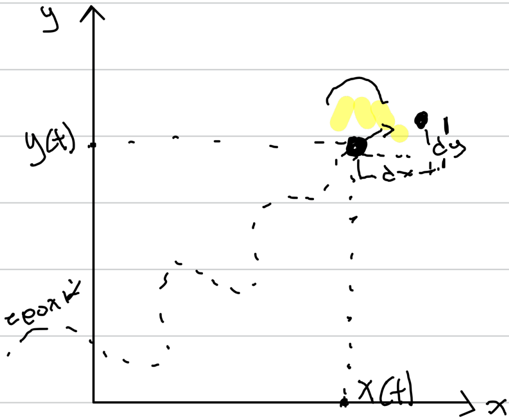
A: $u_x = x'(t) = \frac{dx}{dt}$

B: $u_y = y'(t) = \frac{dy}{dt}$

Σχηματίζω το διάνυσμα της ταχύτητας

$$\vec{u} = (u_x, u_y) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{dt}(dx, dy), \quad dt>0, \ \frac{1}{dt}>0$$

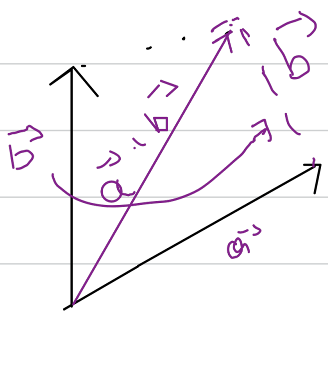
$\vec{u} \parallel (dx, dy)$



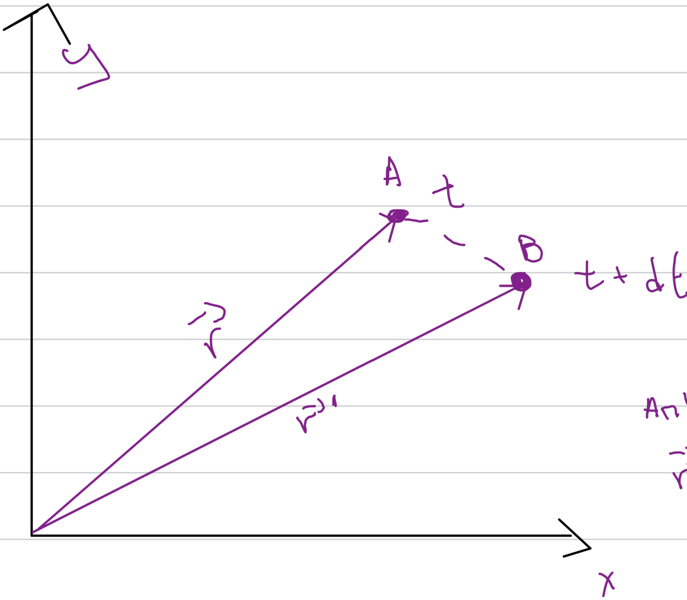
$d\vec{r} = (dx, dy)$

Στοιχειώδης μετατόπιση σε dt

Πρόσθεση Διανυσμάτων 10/10



Εάν φέρω την αρχή του $\vec{b}$ στο τέλος του $\vec{a}$: τότε το άθροισμα είναι αυτό που ενώνει τα άκρα



$\vec{AB} = \vec{r}' - \vec{r}$

Απ' το σχήμα

$\vec{r} + \vec{AB} = \vec{r}' \Rightarrow \vec{AB} = d\vec{r}$

- Ένα υλικό σημείο κινείται έτσι ώστε οι συνιστώσες του να δίνονται από το $x(t) = b\sin(\omega t)$ και $y(t) = -d\cos(\omega t)$. Γωνία (μοίρες) της ταχύτητας ($t = 1s$) στο 1^o δευτερ.

$b = 10m$

$d = 20m$

$\omega = 1,2\, rad/s$

Λύση

$x'(t) = b\cos(\omega t)\omega = 10 \cdot 1,2 \cos(\omega t) = 12\cos\omega t$

$y'(t) = d \cdot \omega \cdot \sin\omega t = 20 \cdot 1,2 \sin(\omega t) = 24\sin\omega t$

$x'(t) = 12\cos 1{,}2t$ $\quad x'(1) = 12 \cdot \cos 1{,}2$

$y'(t) = -24\sin 1{,}2t$ $\quad y'(1) = 24 \cdot \sin 1{,}2$

Το ω μας δίνεται σε rads

$$\tan\theta = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\overset{2}{\cancel{24}}\sin 1{,}2}{\cancel{12}\cdot\cos 1{,}2} = 2\cdot\tan(1{,}2) = 2\cdot 2{,}57 = 5{,}144$$

$$\theta = a\tan(5{,}144) \simeq 79^{\circ}$$

Σημειακό σώμα Α που βρίσκεται την $t=0$ σε ηρεμία στο $O(0,0)$, δέχεται ξαφνικά επιτάχυνση με συνιστώσες $a_x = c_1 t^2$ και $a_y = c_2 t$. $|u| = ;$ την $t = t_0$.

$c_1 = 9\,m/s^4$

$c_2 = 20\,m/s^3$

$t_0 = 2s$

$a_x = 9t^2$ $\quad u_x = \int a_x = \int 9t^2 = \frac{\cancel{9}\cdot t^3}{\cancel{3}} + c_3 = 3t^3 + c_3$

$a_y = 20t$

$u_y = \int a_y = \int 20t = \frac{\overset{10}{\cancel{20}}\cdot t^2}{\cancel{2}} + c_4 = 10t^2 + c_4$

Το σώμα ξεκινά από το $O(0,0)$ υπό ηρεμία άρα την $t=0$ $u_x = 0$, $u_y = 0$ άρα $c_3 = 0$ $c_4 = 0$

$$\int a_x = u_x = 3t^3 \quad u_y = 10t^2 \xrightarrow{t_0=2} u_x = 3\cdot 2^3 = 24\ m/s, \quad u_y = 10\cdot 2^2 = 40\ m/s$$

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{24^2 + 40^2} = \sqrt{2176} = 8\sqrt{34} \Rightarrow$$

$u \simeq 46{,}6\ m/s$

* Να βρεθεί η τροχιά του κινητού (σχέδιο)

Ουσιαστικά πρέπει να βρω $y = f(x)$ για να βρω την τροχιά

Μπορούμε να βρούμε με ολοκλήρωση των u_x, u_y τα $x(t)$ και $y(t)$. Στη συνέχεια απαλείφω από τα $x(t), y(t)$ τον χρόνο

$$u_x = 3t^3 \Rightarrow \int u_x = \int 3t^3 = \frac{3t^4}{4} + C_5$$

$$u_y = 10t^2 \Rightarrow \int u_y = \int 10t^2 = \frac{10t^3}{3} + C_6$$

$C_5 = C_6 = 0$ ομοίως

$x(t) = \frac{3t^4}{4}$ (1) $\qquad y(t) = \frac{10t^3}{3}$ (2)

Απαλείφω t $\overset{(2)}{\Rightarrow} y(t) = \dfrac{10t^3}{3} \Rightarrow t^3 = \dfrac{3y(t)}{10} \Rightarrow$

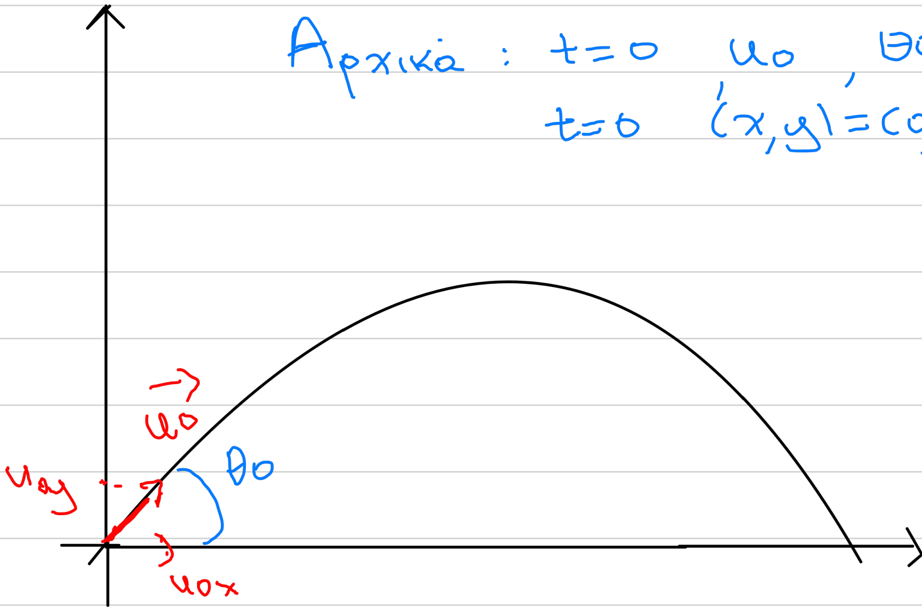
$t = \sqrt[3]{\dfrac{3y}{10}} = \left(\dfrac{3y}{10}\right)^{1/3}$ (3)

$(1) \overset{(3)}{\Rightarrow} x(t) = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{3y}{10}\right)^{4/3}$

$y =$ σταθ $\cdot\, x^{3/4}$

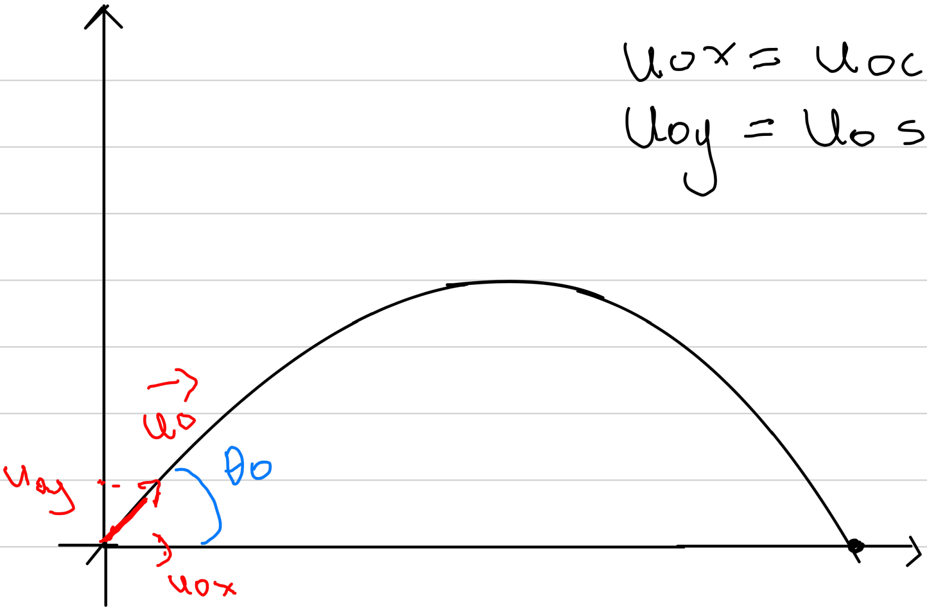
Αρχικά : $t=0$ u_0 , θ_0

$t=0$ $(x,y)=(0,0)$



Στον άξονα x δεν υπάρχουν δυνάμεις
Στον -//- y υπάρχει το βάρος άρα
έχω σταθερή επιτάχυνση $\vec{g}$

$$u_{0x} = u_0 \cos\theta_0$$
$$u_{0y} = u_0 \sin\theta_0$$



Γνωστό για επιτάχυνση $\vec{a} = (0, -g)$

Δηλ. $a_x = 0$

$a_y = -g$

$$\begin{cases} a_x \Rightarrow u_x = c_1 = \text{σταθ} \\ a_y = u_y = -gt + c_2 \end{cases}$$

$$u_y = -gt + c_2$$

Στον άξονα $x'x$ αφού $u_x = c_1 = \text{σταθ}$ το κινητό εκτελεί Ε.Ο.Κ.

$u_y = -g \cdot t + u_{oy} = -g \cdot t + u_o \sin\theta_o$

Στον y'y το κινητό εκτελεί επιβράδυνση και κάποια στιγμή μηδενίζεται και αρχίζει να "κατεβαίνει"

$\int u_x = x(t) = u_{ox} \cdot t = u_o \cos\theta_o t$

$\int u_y = y(t) = u_{oy} t = \frac{1}{2} g t^2$

$y(t) = \frac{1}{2} g t^2$

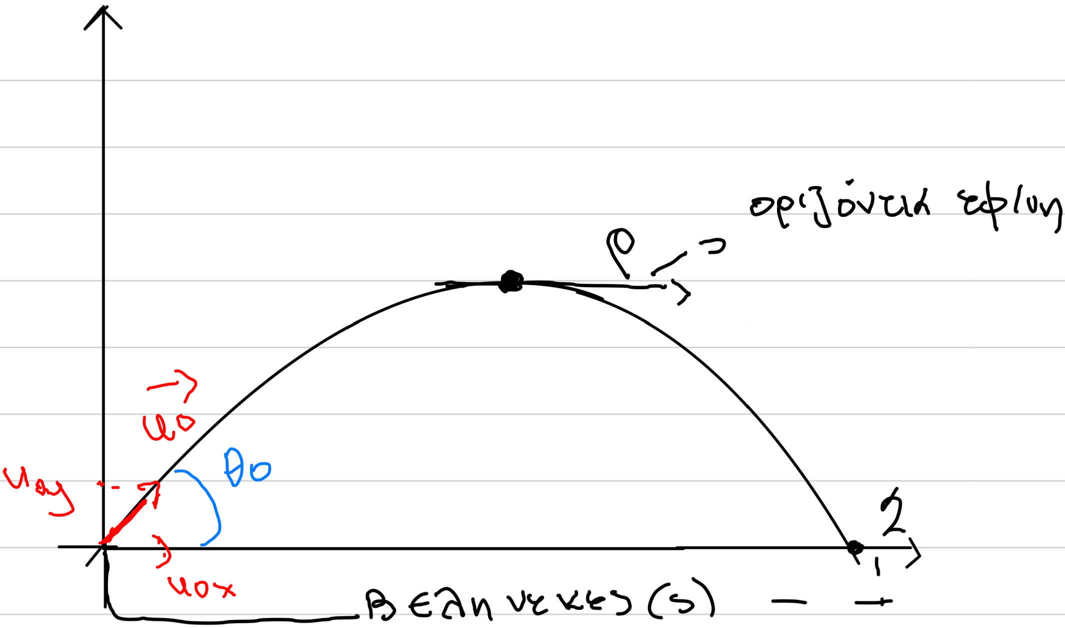
$x(t) = u_{ox} t = u \cos\theta_o$

$u_y = -gt + u_{oy}$

$u_x = u_{ox} = σταθ$

$a_x = 0$

$a_y = g$



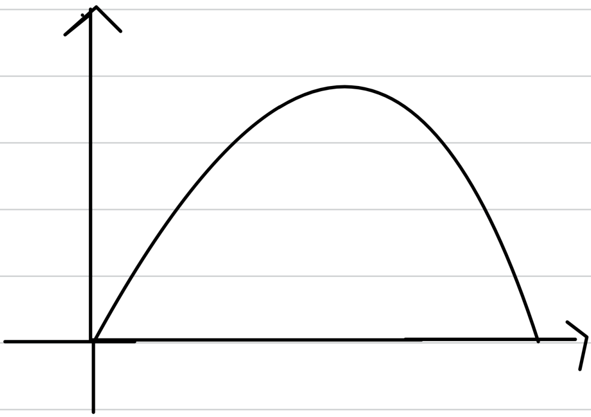
P → hmax : $u_y = 0$

2 → h=0 : $y(t)=0$

Στο 2 δεν έχω $u=0$!

Σημειακή μάζα ξεκινά από την αρχή των αξόνων με $u_0 = 10 m/s$ $\theta_0 = 60^\circ$ ως προς τον Ox'

$h_{max} = ;$ $t = ;$



$u_{0x} = u\cos 60^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 m/s$

$u_{0y} = u \sin 60^\circ = 10 \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} m/s$

Στο h_{max} $u_y = 0 \Rightarrow \cancel{u_y}^{\,0} = u_{0y} - gt \Rightarrow$

$5\sqrt{3} = 10t \Rightarrow t = 0{,}5\sqrt{3}$

$h = u_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 5\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 =$

$= \frac{5 \cdot 3}{2} - \frac{15}{4} = \frac{15}{4} \Rightarrow h_{max} = 3{,}75 m$

+ Να βρεθεί κατακόρυφη απόσταση του κινητού 0,5 s μετά το μέγιστο σημείο.

Την $t = 0,5\sqrt{3}\,s$ το κινητό φτάνει στο μέγιστο ύψος

$t' = 0,5 + 0,5\sqrt{3} = 1,36\,s$

$$y = u_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = 5\sqrt{3} \cdot 1,36 - \frac{1}{2} \cdot 10 (1,36)^2 = 2,5\,m$$

+ Να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος θέσης με την ταχύτητα στο εκ

Εσ. γινόμενο : $\vec{r} \cdot \vec{u} = (x, y)(u_x, u_y) =$

$x u_x + u_y \cdot y = 5 \cdot 6,83 - 5 \cdot 2,5 \Rightarrow$

$\vec{r} \cdot \vec{u} = 21,65$

• Να αποδειχθεί ότι η τροχιά είναι παραβολική και να δωθεί η έκφρασή της.

Λύση: $y = f(x)$ θα απαλείψω το t.

$$x = u_{0x} t \Rightarrow t = \frac{x}{u_{0x}}$$

$$y = \frac{u_{0y}\, x}{u_{0x}} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{u_{0x}^2}$$

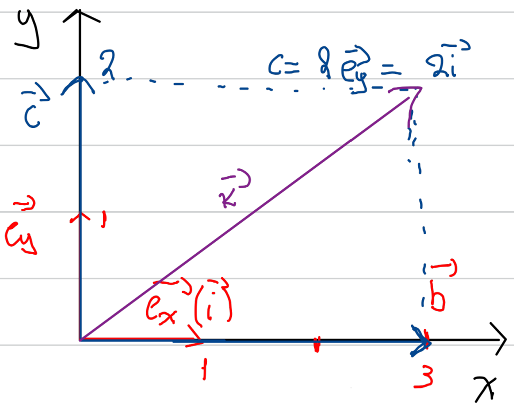
$$y = \tan\theta_0 \cdot x - \frac{g}{2u_0^2 \cos^2\theta_0} x^2$$

$y = ax - Bx^2$ παραβολή

ρίζες $x = 0$ $x = A/B$

Κυκλική Κίνηση 17/10

Μοναδιαίο διανυσμα: Διαν/τα που έχων μέτρο μονάδα
$\vec{a}$ με $|\vec{a}| = 1$

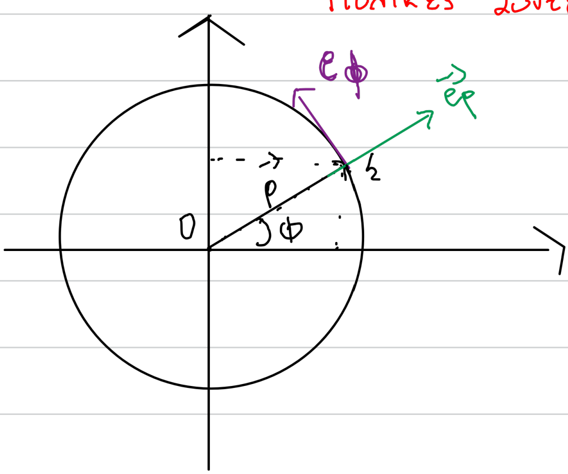


$\vec{k} = \vec{b} + \vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{e_y}$

$\vec{k} = (3,2)$

$\vec{b} = 3\vec{e_x} = 3\vec{i}$

Πολικές Συντεταγμένες



τα(ρ,φ) δεν είναι σταθερά

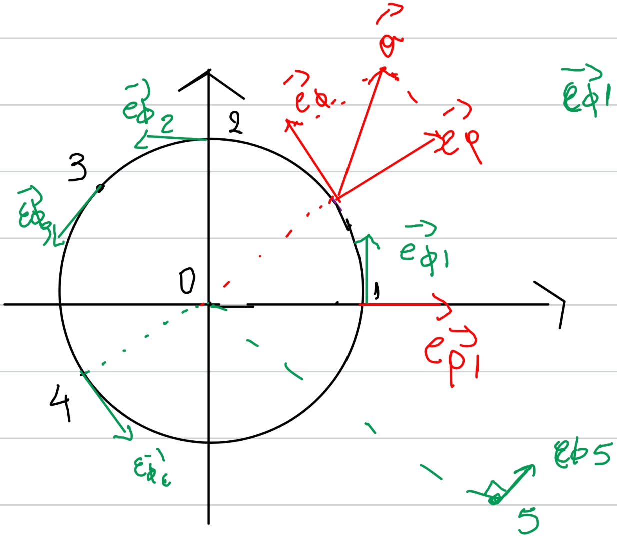
$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$\tan\phi = \frac{y}{x}$

e_ϕ: μοναδιαίο φ, εφαπτόμενο

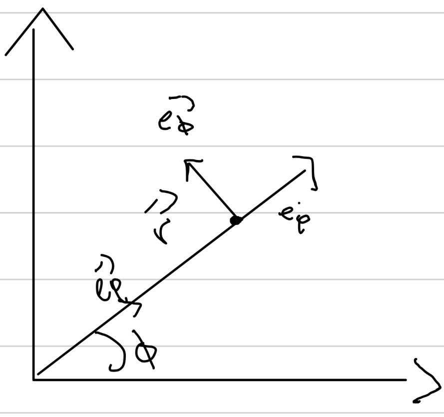
$|\vec{e_\phi}| = 1$

φορά φ: αντιορολογιακή



$\vec{e_{\phi 1}} = (0,1)$ $\quad e_{\rho 1} = (1,0)$

$\vec{a} = 1{,}5\,\vec{e_\rho} + 2\,\vec{e_\phi}$



$\rho\,(\cos\phi, \sin\phi)$

$\vec{r} = \rho \cdot \vec{e_\rho}$

$\vec{e_\rho} = (\cos\phi, \sin\phi)$

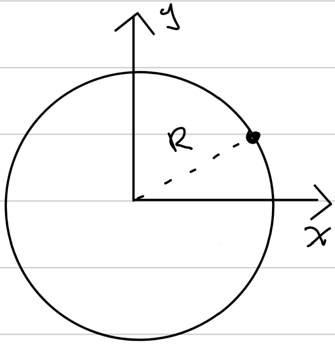
$\vec{e_\phi} = (-\sin\phi, \cos\phi)$

λογω κλισης $= -1$

αλλιως εαν μεταφερω το $\vec{e_\phi}$ στο $(0,0)$

τοτε προκυπτει $-\sin\phi$

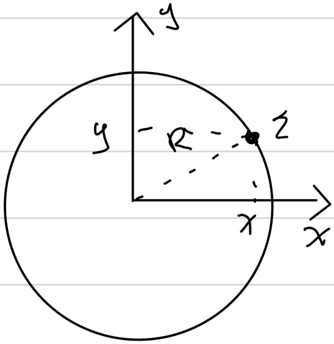
Κυκλική Κίνηση



$\rho = R$

Ομαλή Κυκλική $\phi =$ σταθ t (ωt)

σε ίσα χρ. διαστήματα
"σαρώνει" ίσες γωνίες



$x = R\cos\phi = R\cos\omega t$

$y = R\sin\phi = R\sin\omega t$

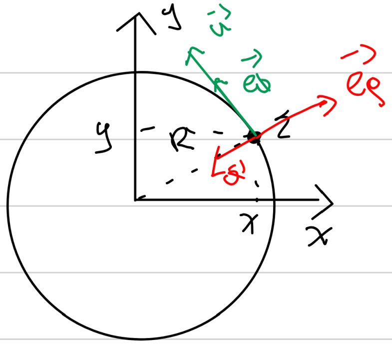
$x'(t) = u_x = -\omega R\sin\omega t$

$y'(t) = u_y = \omega R\cos\omega t$

$\vec{r}(x,y) = R(\cos\omega t, \sin\omega t) = R\vec{e_\rho}$

$\vec{u} = (u_x, u_y) = \omega R(-\sin\omega t, \cos\omega t) = \omega R\vec{e_\phi}$

$\vec{a} = \frac{du}{dt} = -\omega^2 R(\sin\omega t, \cos\omega t) = -\omega^2 R \cdot \vec{e_\rho}$


y
$\vec{u}$
$\vec{e_\theta}$
$\vec{e_\rho}$
y
R
z
$\vec{g}$
x
x