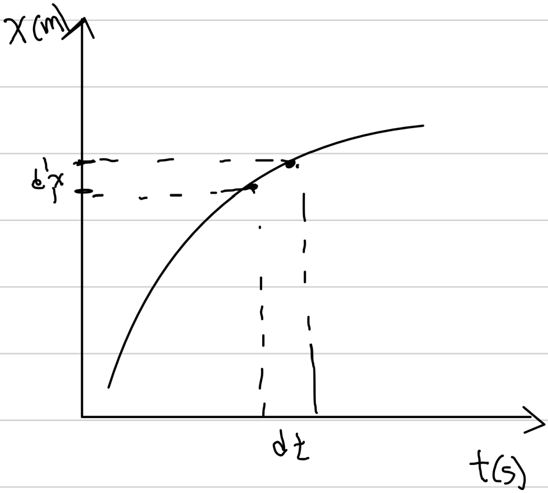
Κίνηση σε ευθεία - υλικό σημείο 02/10

- Στιγμιαία Ταχύτητα $u(t) = \frac{dx}{dt} = x'(t)$

- $\bar{u} = \frac{x}{t}$ (Μέση)

Γεωμετρική ερμηνεία → κλίση της καμπύλης



ανεξάρτητη μεταβλητή

t: ανεξάρτητη μεταβλητή

x: εξαρτημένη -||-

$$dt = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta t$$

$dx = x'(t)\,dt$ → διαφορικό της ανεξάρτητης μεταβλητής

Στιγμιαία επιτάχυνση

$$a(t) = u'(t) = \frac{du}{dt}$$

• π.χ Κινητό κινείται με απομ/ση που δίνεται από τον τύπο $x(t) = bt^3 - ct + e$

i) Βρείτε τις μονάδες των σταθερών b, c, e με $b, c, e \neq 0$

ii) Για ποια t το κινητό ακινητοποιείται

iii) Θα μείνει στις θέσεις ακινητοποίησης;

i) $x(t) = bt^3 - ct + e$

$x(t) \to m$ άρα και $bt^3 - ct + e \to m$

$bt^3 \to m$

$\hookrightarrow s^3$ άρα $b \to m/s^3$

$ct \to m$ $c \to m/s$

$\hookrightarrow s$

$e \to m$

ii) Ακινησία $\to u = 0 \Rightarrow x'(t) = 0 \Rightarrow 3bt^2 - c = 0 \Rightarrow$

$3bt^2 = c$

$t = \pm\sqrt{\frac{c}{3b}}$ άρα για $t = t_1 = \sqrt{\frac{c}{3b}}$ $x'(t) = 0$

iii) Εξετάζουμε την επιτάχυνση

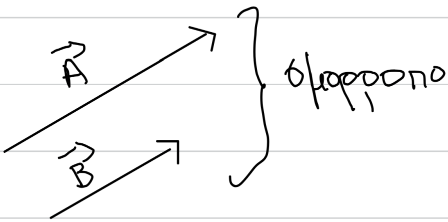
$$x''(t_1) = \alpha(t_1) = 6bt_1 = 6b\sqrt{\frac{c}{3b}} = \sqrt{\frac{\cancel{36}^{12}\,\cancel{b}^{2}\,c}{\cancel{3}\,\cancel{b}}} = \sqrt{12b\cdot c}$$

Αν $\alpha(t_1) = 0$ ακινητοποιείται

$\alpha(t_1) = 0 \Rightarrow \sqrt{12bc} = 0 \Rightarrow b = 0$ ή $c = 0$ άτοπο από υπόθεση

Άρα το κινητό δεν ακινητοποιείται αφού $\alpha(t) \neq 0$

Κίνηση υλικού σημείου σε δύο διαστάσεις 03/10

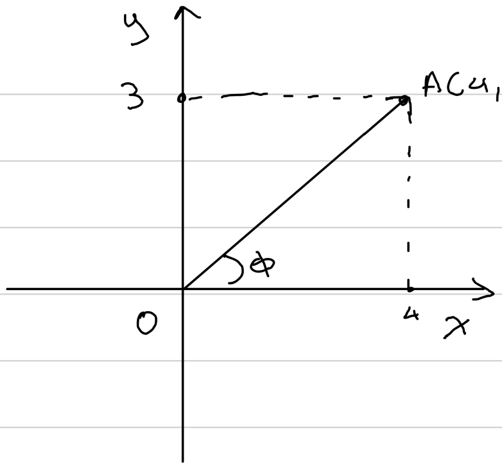


__Μέτρο__ διανύσματος → μήκος του
δείχνει την ένταση της ποσότητας

__Φορά__ → κατεύθυνση ποσότητας

Διανύσματα
- → ίδιο μέτρο και ίδια φορά $\vec{A} = \vec{B}$
- → ίδιο μέτρο αλλά αντίθετη φορά $\vec{A} = -\vec{B}$

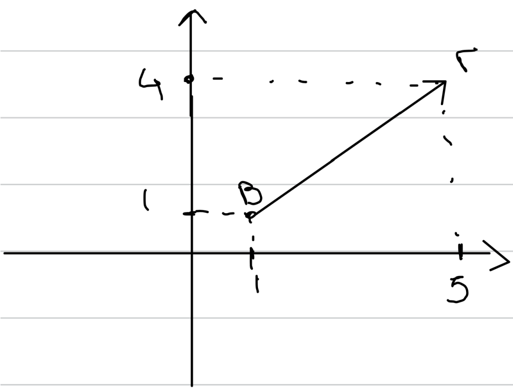
Μεταφέραμε το διάνυσμα στην αρχή των αξόνων ώστε οι συνιστώσες του να είναι συνιστώσες του $\vec{OA}$



$\tan\phi = \frac{y}{x} = \frac{3}{4}$

$\vec{OA} = (4,3)$

-> Εάν μετακινηθεί το διάνυσμα:



$\vec{OA} = \vec{B\Gamma}$

$\vec{B\Gamma} = ((x_{τελ} - x_{αρχ}), (y_{τελ} - y_{αρχ}))$

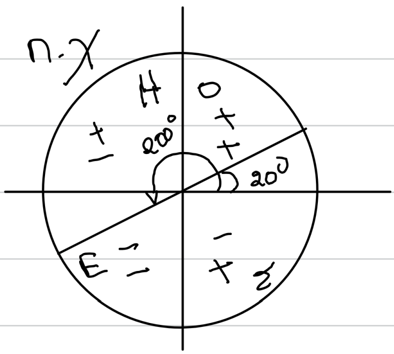
$\vec{B\Gamma} = (x_\Gamma - x_B, y_\Gamma - y_B) = 4,3$

Μέτρο του ΟΑ : $|\vec{OA}|$ -> μήκος του ΟΑ $|OA| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\tan\phi = \frac{y}{x} = \frac{3}{4} = 0,75$

$\operatorname{atan} 0,75 \Rightarrow \phi = 36,87^\circ$

π.χ



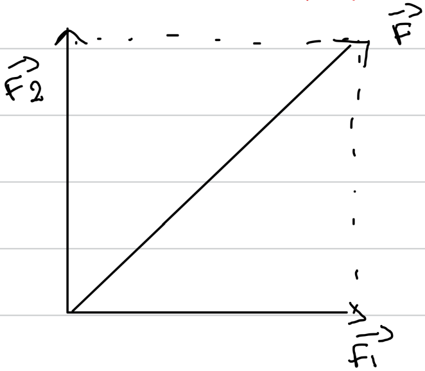
Διανύσματα: $(3,4)$ $\arctan\frac{4}{3} = \phi = 53{,}1$

$(-3,-4)$ $\arctan\frac{-4}{-3} = \phi = 53{,}1$

Η αριθμομηχανή δίνει αποτελέσματα για 1° και 4° τεταρτημόριο. Εάν η γωνία είναι 2° ή 3° $(x<0)$ προσθέτω 180° (ή π)

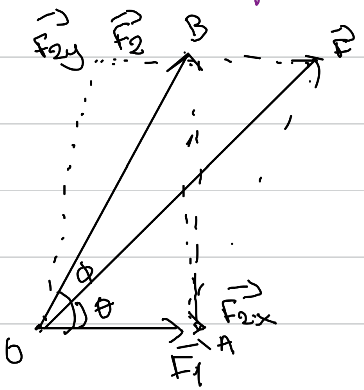
→ Στο $(-3,-4)$: $\phi' = 53{,}1 + 180 = 233{,}1^\circ$

Πράξεις με διανύσματα 09/10



$$\left.\begin{aligned}\vec F &= \vec F_1 + \vec F_2\\ \vec F_1 &= (F_1, 0)\\ \vec F_2 &= (0, F_2)\end{aligned}\right\}\ \vec F = (F_1, F_2)$$

- Κανόνας Παραλληλογράμμου



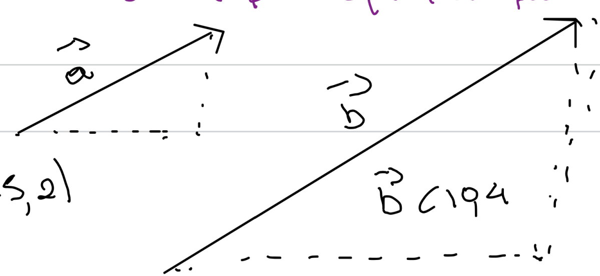
$$\left.\begin{aligned}\vec F_1 &= (F_1, 0)\\ \vec F_2 &= (F_{2x}, F_{2y})\end{aligned}\right\}\ \vec F = (14, 5)$$

Γωνία $\theta = \arctan\frac{5}{14}$

→ Νόμος συνημιτόνων $|AB| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\phi} \Rightarrow$

$$|F| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\phi}$$

→ Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα



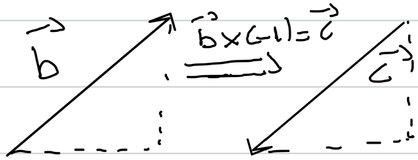
$\vec a = (5,2)$

Εαν διπλασιάσουμε τις συνιστώσες προκύπτει διάνυσμα ίδιας φοράς - διπλάσιου μέτρου $\boxed{\vec{b} = 2\vec{a}}$

(Διαίρεση → πολλ/μος $\cdot \frac{1}{b}$

Πολλ/μος με αρνητικό αριθμό → αντιστροφή φοράς

π.χ



$\vec{c} = (-10, -4)$

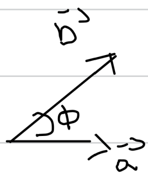
$\vec{b}\ (10, 4)$

- $k > 0$ $\quad \vec{b} = k\vec{a}$ $\quad$ ίδια φορά
- $k < 0$ $\quad \vec{b} = |k|\vec{a}$ $\quad$ αντίθετη φορά
- $k = 0$ $\quad \vec{b} = 0$ $\quad$ σημείο

Εσωτερικό Γινόμενο
(Διάνυσμα x Διάνυσμα)

Προβολή διανυσμάτων σε άξονες

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi$ τύπος Ι
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$ τύπος ΙΙ



$\vec{a} = (a_x, a_y)$

$\vec{b} = (b_x, b_y)$

⚠ Το εσωτερικό γινόμενο δίνει αριθμό

π.χ. Να βρεθεί η γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$
με χρήση εσωτ. γινομένου

$\vec{a} = (8,3)$ $\vec{b} = (-2,6)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y b_y = 8(-2) + 3 \cdot 6 = -16 + 18 = +2$

Τύπος (I) : $\cos\phi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = 0,037$

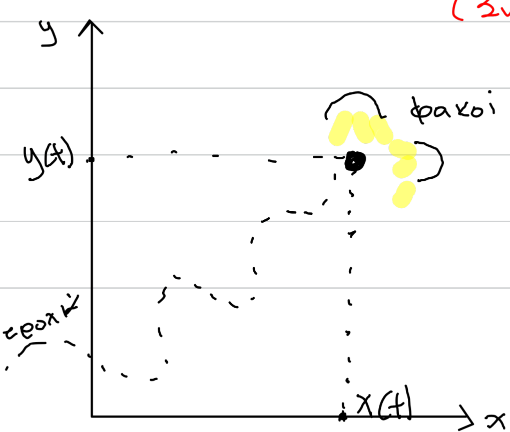
$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

$\cos\phi = 0,037 \Rightarrow \phi = \cos^{-1} 0,037 = 87,9^\circ$

$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$

• Αφαίρεση διανυσμάτων → πρόσθεση αντίθετων διανυσμάτων

Κίνηση σε δύο διαστάσεις
(σημειακή μάζα)



m σε τυχαίο χρόνο t

B: (σκιά) κατακόρυφη προβολή

A: οριζόντια προβολή

A, B → ευθύγραμμη κίνηση

A: $u_x = x'(t) = \frac{dx}{dt}$

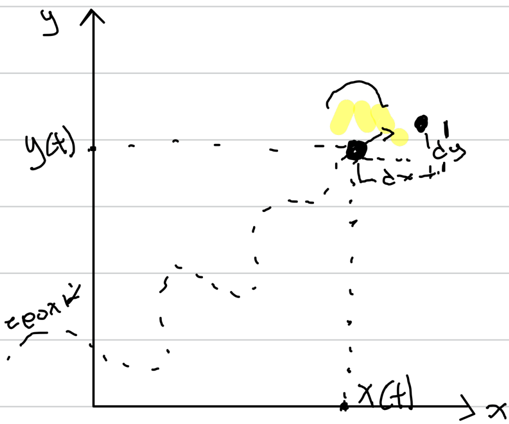
B: $u_y = y'(t) = \frac{dy}{dt}$

$\Big\}$ Σχηματίζω το διάνυσμα της ταχύτητας

$$\vec{u} = (u_x, u_y) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{dt}(dx, dy)$$

$dt > 0$, $\frac{1}{dt} > 0$

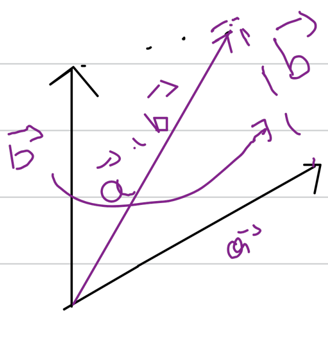
$\vec{u} \parallel (dx, dy)$



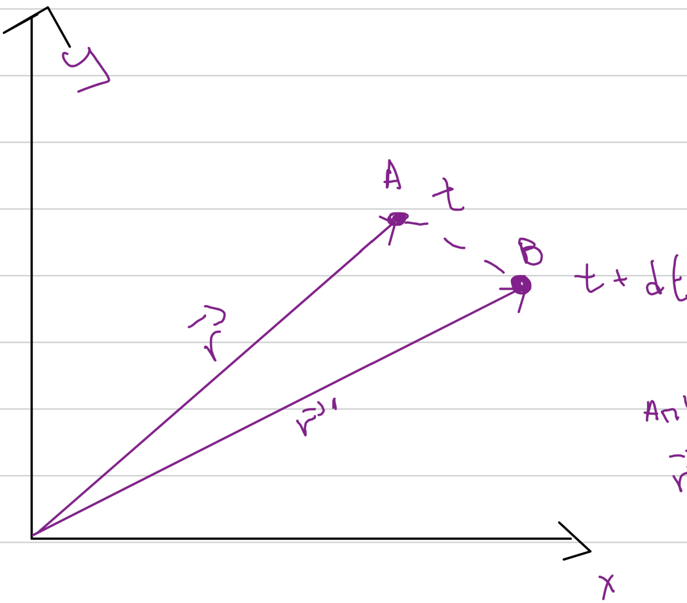
$d\vec{r} = (dx, dy)$

Στοιχειώδης μετατόπιση σε dt

Πρόσθεση Διανυσμάτων 10/10



Εάν φέρω την αρχή του $\vec{b}$ στο τέλος του $\vec{a}$: τότε το άθροισμα είναι αυτό που ενώνει τα άκρα



$\vec{AB} = \vec{r}' - \vec{r}$

Απ' το σχήμα

$\vec{r} + \vec{AB} = \vec{r}' \Rightarrow \vec{AB} = d\vec{r}$

- Ένα υλικό σημείο κινείται έτσι ώστε οι συντ/νες του να δίνονται από το $x(t) = b\sin(\omega t)$ και $y(t) = -d\cos(\omega t)$
Γωνία (μοίρες) της ταχύτητας ($t=1s$) στο 1° δευτερ.

$b = 10m$

$d = 20m$

$\omega = 1{,}2\, rad/s$

Λύση

$x'(t) = b\cos(\omega t)\omega = 10 \cdot 1{,}2\cos(\omega t) = 12\cos\omega t$

$y'(t) = d \cdot \omega \cdot \sin\omega t = 20 \cdot 1{,}2\sin(\omega t) = 24\sin\omega t$

$x'(t) = 12\cos 1{,}2t$ $\qquad x'(1) = 12 \cdot \cos 1{,}2$

$y'(t) = -24\sin 1{,}2t$ $\qquad y'(1) = 24 \cdot \sin 1{,}2$

Το ω μας δίνεται σε rads

$$\tan\theta = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\cancel{24}^{2}\sin 1{,}2}{\cancel{12}\cdot\cos 1{,}2} = 2\cdot\tan(1{,}2) = 2\cdot 2{,}57 = 5{,}144$$

$$\theta = \operatorname{atan}(5{,}144) \simeq 79^\circ$$

Σημειακό σώμα Α που βρίσκεται την $t=0$ σε ηρεμία στο $O(0,0)$, δέχεται ξαφνικά επιτάχυνση με συνιστώσες $a_x = c_1 t^2$ και $a_y = c_2 t$. $|u| = ;$ την $t = t_0$.

$c_1 = 9\, m/s^4$

$c_2 = 20\, m/s^3$

$t_0 = 2s$

$a_x = 9t^2$

$a_y = 20t$

$$u_x = \int a_x = \int 9t^2 = \frac{\cancel{9}\cdot t^3}{\cancel{3}} + c_3 = 3t^3 + c_3$$

$$u_y = \int a_y = \int 20t = \frac{\cancel{20}^{10}\cdot t^2}{\cancel{2}} + c_4 = 10t^2 + c_4$$

Το σώμα ξεκινά από το $O(0,0)$ υπό ηρεμία άρα την $t=0$ $u_x = 0$, $u_y = 0$ άρα $c_3 = 0$ $c_4 = 0$

$$\int a_x = u_x = 3t^3 \qquad u_x = 3\cdot 2^3 = 24 \, m/s$$

$$\int a_y = u_y = 10t^2 \qquad u_y = 10\cdot 2^2 = 40 \, m/s$$

$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{t_0=2}$

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{24^2 + 40^2} = \sqrt{2176} = 8\sqrt{34} \Rightarrow$$

$$u \simeq 46{,}6 \, m/s$$

* Να βρεθεί η τροχιά του κινητού (Σχέδιο)

Ουσιαστικά πρέπει να βρώ $y = f(x)$ για να βρώ την τροχιά

Μπορούμε να βρούμε με ολοκλήρωση των u_x, u_y τα $x(t)$ και $y(t)$. Στην συνέχεια απαλείφω από τα $x(t), y(t)$ τον χρόνο

$$u_x = 3t^3 \Rightarrow \int u_x = \int 3t^3 = \frac{3t^4}{4} + c_5$$

$$u_y = 10t^2 \Rightarrow \int u_y = \int 10t^2 = \frac{10t^3}{3} + c_6$$

$c_5 = c_6 = 0$ ομοίως

$$x(t) = \frac{3t^4}{4} \quad (1) \qquad y(t) = \frac{10t^3}{3} \quad (2)$$

Απαλείφω t $(2) \Rightarrow y(t) = \frac{10t^3}{3} \Rightarrow t^3 = \frac{3y(t)}{10} \Rightarrow$

$$t = \sqrt[3]{\frac{3y}{10}} = \left(\frac{3y}{10}\right)^{1/3} \quad (3)$$

$$(1) \overset{(3)}{\Longrightarrow} x(t) = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3y}{10}\right)^{4/3}$$

$$y = \text{σταθ} \cdot x^{3/4}$$