A

Κινητό κινείται με ταχύτητα με συνιστώσες

$$v_x = \frac{\gamma}{c}\frac{1}{1+\frac{t^2}{c^2}}$$

$$v_y = 2\frac{\beta}{c}\frac{\frac{t}{c}}{\left(1+\frac{t^2}{c^2}\right)^2}$$

όπου β, γ και c είναι θετικές σταθερές. Στο $t = 0$ το κινητό βρίσκεται στο σημείο $(0, -\beta)$.

(α) Να βρεθούν οι μονάδες των παραπάνω τριών σταθερών εάν η ταχύτητά του είναι σε μονάδες S.I.

(β) Να βρεθούν οι απομακρύνσεις των προβολών του κινητού επάνω στους άξονες x και y συναρτήσει για χρόνους $t \geq 0$

(γ) Να βρεθεί η τροχιά του κινητού για $t \geq 0$ με την μορφή εξίσωσης αλλά και γραφικής παράστασης (ποιοτικός σχεδιασμός αλλά να φαίνονται τα βασικά χαρακτηριστικά όπως τυχόν ρίζες, μέγιστα/ελάχιστα, ασύμπτωτες κλπ.)

Σημείωση: Χρήσιμα αόριστα ολοκληρώματα

Λύση:

(α) Από την v_x γίνεται φανερό ότι η σταθερά c είναι σε s ώστε να είναι καθαρός αριθμός ο όρος t^2/τ^2 στον παρανομαστή εφόσον είναι μαζί με την μονάδα (1) που είναι αδιάστατη. Έτσι εάν το v_x είναι σε m/s, τότε αναγκαστικά το γ είναι σε m. Ομοίως στη δεύτερη εξίσωση αναγκαστικά και το β είναι σε m.

Επίσης (από λύση φοιτητή!) αφού δίνεται ότι στο $t = 0$ το κινητό βρίσκεται στο σημείο $(0, -\beta)$ τότε το β είναι αναγκαστικά σε m !

(β) Από τις δοθείσες συνιστώσες της ταχύτητας

$$v_x = \frac{\gamma}{c}\frac{1}{1+\frac{t^2}{c^2}}$$

$$v_y = 2\frac{\beta}{c}\frac{\frac{t}{c}}{\left(1+\frac{t^2}{c^2}\right)^2}$$

έχουμε με ολοκλήρωση για κάθε συνιστώσα (χρησιμοποιούμε τα δεδομένα αόριστα ολοκληρώματα με $x = t/c$, $dx = dt/c$)

$$x = \gamma\, atan\left(\frac{t}{c}\right) + c_x$$

$$y = -\frac{\beta}{1+\frac{t^2}{c^2}} + c_y$$

όπου c_x και c_y είναι οι σταθερές ολοκλήρωσης. Για $t = 0$ το κινητό έρχεται στο σημείο $(0, -\beta)$ οπότε από τις παραπάνω

$$0 = 0 + c_x$$

$$-\beta = -\frac{\beta}{1+0} + c_y$$

οπότε οι σταθερές ολοκλήρωσης μηδενίζονται. Έτσι

$$x = \gamma\, atan\left(\frac{t}{c}\right)$$

$$y = -\frac{\beta}{1 + \frac{t^2}{c^2}}$$

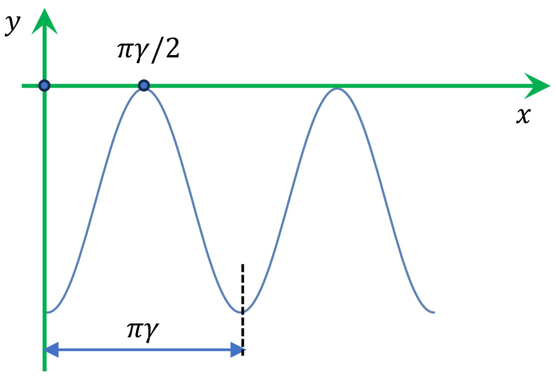
Λύνουμε την πρώτη ως προς το χρόνο και έχουμε

$$\frac{t}{c} = tan\left(\frac{x}{\gamma}\right)$$

η οποία όταν αντικατασταθεί στη δεύτερη οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$y = -\frac{\beta}{1 + tan^2\left(\frac{x}{\gamma}\right)} = -\beta\, cos^2\left(\frac{x}{\gamma}\right)$$

Η γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω. Είναι παντού αρνητική και περιοδική με περίοδο ίση με $\pi\gamma$.



Β

Κινητό κινείται με διάνυσμα επιτάχυνσης

$$\vec{a} = -2\left(\frac{\beta}{t^2}\vec{e}_x + 3\gamma\frac{\tau^2}{t^4}\vec{e}_y\right)$$

όπου β, γ και τ θετικές σταθερές, με την τρίτη να έχει ως μονάδες τα δευτερόλεπτα. Κατά την χρονική στιγμή $t=\tau$, το κινητό βρίσκεται στην αρχή των αξόνων ενώ για άπειρους χρόνους η ταχύτητά του μηδενίζεται

(α) Να βρεθούν οι μονάδες των σταθερών β και γ εάν το $\vec{a}$ είναι σε μονάδες S.I.

(β) Να βρεθεί η απομάκρυνσή του κινητού κατά τους άξονες x και y σε τυχαία χρονική στιγμή $t \geq \tau$

(γ) Να σχεδιαστεί ποιοτικά η τροχιά του κινητού για $t \geq \tau$

<u>Λύση</u>:

(α) Αναλύοντας τη δοθείσα επιτάχυνση σε συνιστώσες, έχουμε ότι

$$a_x = -2\frac{\beta}{t^2}$$

$$a_y = -6\gamma\frac{\tau^2}{t^4}$$

Από την πρώτη φαίνεται ότι εάν το a_x είναι σε m/s^2 τότε αναγκαστικά το β είναι σε μέτρα. Στη δεύτερη εξίσωση μας δίνεται ότι το τ είναι σε δευτερόλεπτα κι έτσι όπως και στην πρώτη εξίσωση, εάν το a_y είναι σε m/s^2 τότε αναγκαστικά και το γ είναι σε m.

(β) Από την δοθείσα επιτάχυνση

$$\vec{a} = -2\left(\frac{\beta}{t^2}\vec{e}_x + 3\gamma\frac{\tau^2}{t^4}\vec{e}_y\right)$$

έχουμε με ολοκλήρωση για κάθε συνιστώσα

$$v_x = 2\frac{\beta}{t} + c_x$$

$$v_y = 2\gamma\frac{\tau^2}{t^3} + c_y$$

όπου c_x και c_y είναι οι σταθερές ολοκλήρωσης. Για άπειρους χρόνους $\vec{v} \to 0$ οπότε από τις παραπάνω

$$0 = 0 + c_x$$

$$0 = 0 + c_y$$

οπότε οι σταθερές ολοκλήρωσης μηδενίζονται. Ξαναολοκληρώνουμε

$$x = 2\beta lnt + c_x{}'$$

$$y = -\gamma\frac{\tau^2}{t^2} + c_y{}'$$

όπου $c_x{}'$ και $c_y{}'$ είναι οι νέες σταθερές ολοκλήρωσης. Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε $(x,y) = (0,0)$ για $t=\tau$ οπότε από τις παραπάνω

$$0 = 2\beta ln\tau + c_x{}'$$

$$0 = -\gamma + c_y{}'$$

από όπου βρίσκουμε

$$c_x' = -2\beta ln\tau$$

$$c_y' = \gamma$$

και οι παραπάνω γίνονται

$$x = 2\beta ln\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

$$y = \gamma\left(1 - \frac{\tau^2}{t^2}\right)$$

(γ) Πρέπει να απαλείψουμε το χρόνο μεταξύ των δυο εξισώσεων. Η πρώτη από αυτές γράφεται και ως

$$\frac{x}{\beta} = ln\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$$

ή

$$\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 = e^{\frac{x}{\beta}}$$

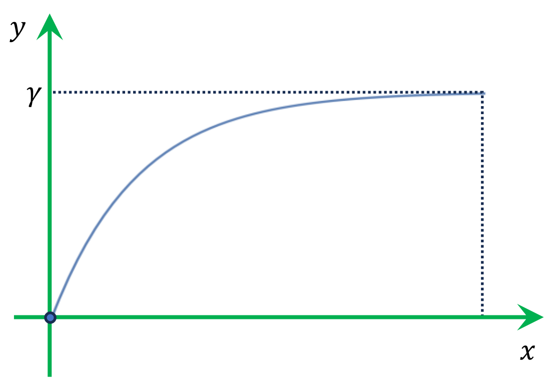
ή

$$\frac{\tau^2}{t^2} = e^{-\frac{x}{\beta}}$$

Η οποία όταν αντικατασταθεί στη δεύτερη οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\frac{y}{\gamma} = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}$$

Γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω. Τα βασικά χαρακτηριστικά είναι το σημείο $(0,0)$ καθώς και η ασύμπτωτος $y \to \gamma$ καθώς το $x \to \infty$



Γ

Κινητό κινείται έτσι ώστε οι απομακρύνσεις των προβολών του κινητού επάνω στους άξονες x και y (σε μέτρα) συναρτήσει του χρόνου t (σε δευτερόλεπτα) να δίνονται από τις εκφράσεις

$$x = \gamma\left(sin^2 c - \frac{\tau^2}{t^2}\right)^{1/2}$$

$$y = \beta\left(cos^2 c + \frac{\tau^2}{t^2}\right)^{1/2}$$

όπου β, γ, τ και c θετικές σταθερές και $t \geq \tau/sinc$.

(α) Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα του κινητού με τον άξονα x κατά τις χρονικές στιγμές $t = \tau/sinc$ και $t \ \rightarrow \infty$

(β) Από τις δεδομένες εκφράσεις, να βρεθούν οι μονάδες των παραπάνω τριών σταθερών β, γ και τ (η c είναι αδιάστατη).

(γ) Να βρεθεί η τροχιά του κινητού για $t \geq \tau/sinc$ με την μορφή εξίσωσης αλλά και γραφικής παράστασης (ποιοτικός σχεδιασμός αλλά να φαίνονται τα βασικά χαρακτηριστικά όπως τυχόν ρίζες, μέγιστα/ελάχιστα, ασύμπτωτες κλπ)

Λύση:

(α) Για να βρούμε την ταχύτητα παραγωγίζουμε τις δεδομένες εκφράσεις ως προς τον χρόνο:

$$v_x = \frac{1}{2}\gamma\left(sin^2 c - \frac{\tau^2}{t^2}\right)^{-1/2}\left(2\frac{\tau^2}{t^3}\right) = \gamma\frac{\tau^2}{t^3}\frac{1}{\sqrt{sin^2 c - \frac{\tau^2}{t^2}}}$$

$$v_y = \frac{1}{2}\beta\left(cos^2 c + \frac{\tau^2}{t^2}\right)^{-1/2}\left(-2\frac{\tau^2}{t^3}\right) = -\beta\frac{\tau^2}{t^3}\frac{1}{\sqrt{cos^2 c + \frac{\tau^2}{t^2}}}$$

Η γωνία της ταχύτητας θ δίνεται από την έκφραση

$$tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{\beta}{\gamma}\sqrt{\frac{sin^2 c - \frac{\tau^2}{t^2}}{cos^2 c + \frac{\tau^2}{t^2}}}$$

Στις υπο-εξέταση χρονικές στιγμές έχουμε

Για $t = \tau/sinc$, η υπόριζος ποσότητα $sin^2 c - \tau^2/t^2$ μηδενίζεται οπότε έχουμε $tan\theta = 0$ που σημαίνει $\theta = 0$

Για $t \ \rightarrow \infty$, ο λόγος τ/t τείνει στο μηδέν και έτσι

$$tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{\beta}{\gamma}\sqrt{\frac{sin^2c}{cos^2c}} = -\frac{\beta}{\gamma}tanc$$

οπότε

$$\theta = -arctan\left(\frac{\beta}{\gamma}tanc\right)$$

(β) Αφού οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι αδιάστατες, τότε και ο όρος t/τ πρέπει να είναι αδιάστατος που σημαίνει ότι η σταθερά c πρέπει να είναι σε δευτερόλεπτα. Αυτομάτως τότε, τα β και γ πρέπει να είναι σε μέτρα.

(γ) Υψώνουμε τις δεδομένες σχέσεις στο τετράγωνο και έχουμε

$$x^2 = \gamma^2\left(sin^2c - \frac{\tau^2}{t^2}\right)$$

$$y^2 = \beta^2\left(cos^2c + \frac{\tau^2}{t^2}\right)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ποσότητες

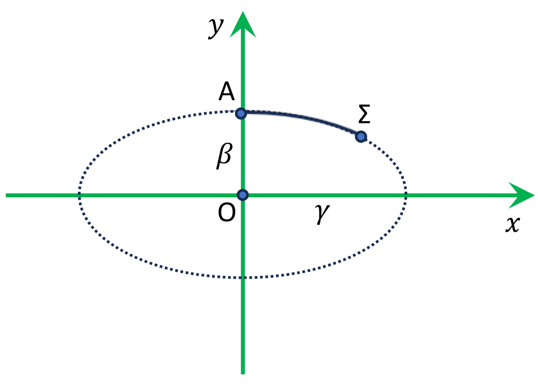
$$\frac{x^2}{\gamma^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = sin^2c + cos^2c = 1$$

πρόκειται δηλαδή για την εξίσωση μιας έλλειψης με κέντρο την αρχή των αξόνων και ημιάξονες με μήκη γ και β, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Κατά την αρχική χρονική στιγμή $t = \tau/sinc$, η υπόριζος ποσότητα $sin^2c - \tau^2/t^2$ μηδενίζεται οπότε $x = 0$ ενώ $y = \beta$ που αντιστοιχεί στο σημείο Α. Για μεταγενέστερους χρόνους τα x και y παραμένουν θετικά και άρα το κινητό παραμένει στο 1^{o} τεταρτημόριο με οριακό σημείο αυτό για το οποίο ισχύει $t \to \infty$, δηλαδή το σημείο Σ στο σχήμα με συντεταγμένες που δίνονται από τις

$$x \to \gamma(sin^2c - 0)^{1/2} = \gamma sinc$$

$$y \to \beta(cos^2c + 0)^{1/2} = \beta cosc$$

Έτσι η τροχιά του κινητού είναι το καμπυλόγραμμο τμήμα ΑΣ της έλλειψης:



Δ

Κινητό κινείται με επιτάχυνση με συνιστώσες $a_x = 2\gamma$ και $a_y = -\beta cos\omega t$ όπου β, γ και ω είναι θετικές σταθερές και $t \geq 0$ ο χρόνος. Στο $t = 0$ το κινητό ξεκινάει από την ηρεμία από το σημείο Α με συντεταγμένες $(0, \beta/\omega^2)$.

(α) Να βρεθεί η μικρότερη χρονική στιγμή $t > 0$ όπου η ταχύτητα θα γίνει οριζόντια.

(β) Κατά την στιγμή αυτή που βρήκατε στο α, να βρείτε την απόσταση που απέχει το κινητό από την αρχή των συντεταγμένων και

(γ) Να βρεθεί η τροχιά του κινητού με την μορφή εξίσωσης αλλά και γραφικής παράστασης, μέχρι και την 4η ρίζα (ποιοτικός σχεδιασμός αλλά να φαίνονται τα βασικά χαρακτηριστικά της όπως τυχόν ρίζες, μέγιστα/ελάχιστα, ασύμπτωτες κλπ.)

<u>Λύση</u>:

(α) Ολοκληρώνοντας τις δεδομένες επιταχύνσεις, παίρνουμε για τις αντίστοιχες ταχύτητες

$$v_x = 2\gamma t + c_x$$

$$v_y = -\frac{\beta}{\omega} sin\omega t + c_y$$

όπου c_x και c_y σταθερές. Στο $t = 0$ οι παραπάνω γίνονται

$$v_x(0) = c_x$$

$$v_y(0) = c_y$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα, το κινητό εκκινεί από την ηρεμία και άρα οι παραπάνω δυο συνιστώσες είναι μηδέν που σημαίνει ότι $c_x = 0$, $c_y = 0$ και έτσι

$$v_x = 2\gamma t$$

$$v_y = -\frac{\beta}{\omega} sin\omega t$$

Η ταχύτητα θα γίνει οριζόντια όταν η γωνία της θ σε σχέση με τον οριζόντιο άξονα γίνει μηδέν οπότε και $tan\theta = 0$. Όμως γνωρίζουμε ότι η γωνία της ταχύτητας δίνεται από τον γενικό τύπο

$$tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

ή

$$tan\theta = -\frac{\beta}{2\gamma\omega t} sin\omega t$$

Επομένως ο μηδενισμός της θ συνεπάγεται και τον μηδενισμό του $sin\omega t$ που γίνεται πρώτα (εκτός από το $t = 0$) στο $\omega t = \pi$ δηλαδή στον χρόνο

$$t = \frac{\pi}{\omega}$$

(β) Ολοκληρώνοντας τις παραπάνω ταχύτητες, παίρνουμε για τις αντίστοιχες απομακρύνσεις

$$x = \gamma t^2 + c_x{}'$$

$$y = \frac{\beta}{\omega^2} cos\omega t + c_y{}'$$

όπου $c_x{}'$ και $c_y{}'$ σταθερές. Στο $t = 0$ οι παραπάνω γίνονται

$$x(0) = c_x{}'$$

$$y(0) = \frac{\beta}{\omega^2} + c_y{}'$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα, το κινητό για $t = 0$ ξεκινάει από το $(0, \beta/\omega^2)$ πράγμα που σημαίνει ότι $c_x{}' = 0$, $c_y{}' = 0$ και έτσι

$$x = \gamma t^2$$

$$y = \frac{\beta}{\omega^2} cos\omega t$$

Η απόσταση από την αρχή των συντεταγμένων δίνεται ως γνωστόν από το μέτρο του διανύσματος θέσης $\vec{r} = (x, y)$, δηλαδή από την έκφραση

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ή

$$r = \sqrt{\gamma^2 t^4 + \frac{\beta^2}{\omega^4} cos^4 \omega t}$$

Κατά την χρονική στιγμή $t = \pi/\omega$ που βρήκαμε στο α έχουμε ότι

$$cos\omega t = 1$$

και έτσι

$$r = \sqrt{\gamma^2 \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^4 + \frac{\beta^2}{\omega^4}} = \frac{1}{\omega^2}\sqrt{\gamma^2 \pi^4 + \beta^2}$$

(γ) Για να βρούμε την τροχιά του κινητού, αρκεί να απαλείψουμε τον χρόνο μεταξύ των x και y ως εξής: Από το x εύκολα λύνουμε

$$t = \sqrt{\frac{x}{\gamma}}$$

την οποία όταν την αντικαταστήσουμε στην έκφραση του y βρίσκουμε

$$y = \frac{\beta}{\omega^2} cos\left(\frac{\omega}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{x}\right)$$

Λόγω του συνημιτόνου, η παραπάνω συνάρτηση είναι φραγμένη μεταξύ των ορίων όπου αυτό παίρνει τις τιμές ± 1, δηλαδή μεταξύ των τιμών

$$y = \pm \frac{\beta}{\omega^2}$$

Επίσης λόγω του ημιτόνου, μπορούμε εύκολα να βρούμε τις ρίζες της συνάρτησης αφού το συνημίτονο μηδενίζεται στα περιττά πολλαπλάσια του $\pi/2$, δηλαδή οι ρίζες εμφανίζονται εκεί όπου

$$\frac{\omega}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{x} = \frac{n\pi}{2}$$

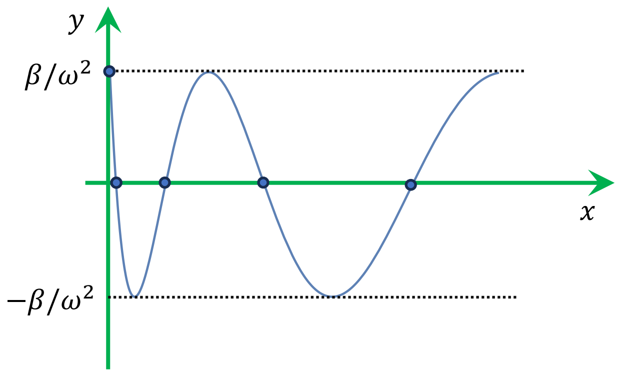
με $n = 1,3,5,7 \ldots$, ή

$$x = n^2\gamma\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = n^2\kappa$$

όπου

$$\kappa = \gamma\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2$$

μια σταθερά. Βλέπουμε δηλαδή ότι οι ρίζες συνεχώς απομακρύνονται κατά μήκος του άξονα x με τετραγωνικό τρόπο. Η γραφική παράσταση λοιπόν θα μοιάζει κάπως έτσι:



E

Σώμα βρίσκεται μέσα σε κατακόρυφο βαρυτικό πεδίο το οποίο του προσδίδει κατά τα γνωστά επιτάχυνση $\vec{g} = -10\vec{e}_y$. Ταυτόχρονα το σώμα δέχεται και μια οριζόντια δύναμη λόγω του αέρα ώστε να του προσδίδει και μια οριζόντια σταθερή επιτάχυνση $\vec{a} = 5\vec{e}_x$. Το σώμα εκτοξεύεται στο $t = 0$ από την αρχή των αξόνων με ταχύτητα μέτρου v_0 και γωνία ίση με $60°$ ως προς τον άξονα x. Όλα τα δεδομένα είναι στο S.I.

(α) Να βρεθεί η χρονική στιγμή όπου η τροχιά του κινητού θα σχηματίζει γωνία ίση με $45°$ ως τον άξονα x.

(β) Κατά την στιγμή αυτή που βρήκατε στο α, βρείτε την απόσταση που απέχει η προβολή του κινητού επάνω στον άξονα x από την αρχή των συντεταγμένων.

(γ) Έστω ότι το σώμα εκτοξεύεται στο χείλος γκρεμού έτσι ώστε να μην υπάρχει δάπεδο και να ταξιδεύει συνεχώς χωρίς στάση. Να βρεθεί η τροχιά του κινητού για πολύ μεγάλους χρόνους

Λύση:

(α) Από τα δεδομένα, υπάρχουν δυο επιταχύνσεις, μια κατά τον άξονα y ίση με $a_y = -g$, και μια κατά τον άξονα x ίση με $a_x = a$. Ολοκληρώνοντας τις δεδομένες επιταχύνσεις ως προς τον χρόνο, παίρνουμε για τις αντίστοιχες ταχύτητες ως

$$v_x = at + c_x$$

$$v_y = -gt + c_y$$

όπου c_x και c_y σταθερές. Στο $t = 0$ οι παραπάνω γίνονται

$$v_x(0) = c_x$$

$$v_y(0) = c_y$$

δηλαδή οι σταθερές είναι ίσες με τις δυο συνιστώσες της αρχική ταχύτητας και αφού μας δίνεται ότι αυτή έχει μέτρο $v_0 = 2\, m/s$ και γωνία $\theta_0 = 60°$, τότε αυτές θα είναι ίσες αντίστοιχα με

$$c_x = v_0 cos\theta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} v_0$$

$$c_y = v_0 sin\theta_0 = \frac{1}{2} v_0$$

Έτσι οι παραπάνω ταχύτητες για τυχαίο χρόνο t, γράφονται ως

$$v_x = at + \frac{1}{2} v_0$$

$$v_y = -gt + \frac{\sqrt{3}}{2} v_0$$

Όπως όμως γνωρίζουμε, η γωνία της ταχύτητας δίνεται από τον γενικό τύπο

$$tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

οπότε για τυχαίο χρόνο t

$$tan\theta = \frac{-gt + \frac{\sqrt{3}}{2} v_0}{at + \frac{1}{2} v_0}$$

Η ταχύτητα είναι εφαπτόμενη συνεχώς της τροχιάς του κινητού έτσι κατά την ζητούμενη χρονική θα σχηματίζει γωνία ίση με $45°$ ως τον άξονα x και έτσι

$$tan\theta = tan45° = 1$$

και η παραπάνω γίνεται

$$\frac{-gt + \frac{\sqrt{3}}{2}v_0}{at + \frac{1}{2}v_0} = 1$$

ή

$$at + \frac{1}{2}v_0 = -gt + \frac{\sqrt{3}}{2}v_0$$

από όπου παίρνουμε

$$t = \frac{1}{2}\frac{v_0}{a+g}\left(\sqrt{3}-1\right) = \frac{v_0}{30}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

(β) Η ζητούμενη απόσταση είναι απλά η οριζόντια απομάκρυνση x του κινητού. Για να βρούμε τις απομακρύνσεις x και y, ξανα-ολοκληρώνουμε τις παραπάνω ταχύτητες ως προς τον χρόνο

$$x = \frac{1}{2}at^2 + \frac{1}{2}v_0 t$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 t$$

Έτσι για τον χρόνο

$$t = \frac{v_0}{30}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

έχουμε

$$x = \frac{1}{2}t(v_0 + at)$$

$$x = \frac{1}{2}\frac{v_0}{30}\left(\sqrt{3}-1\right)v_0\left(1 + \frac{5}{30}\left(\sqrt{3}-1\right)\right) = 0.0136\, {v_0}^2$$

(γ) Από τις εκφράσεις των x και y που βρήκαμε παραπάνω, παίρνουμε τα όρια για $t \to \infty$. Ως γνωστό, στις πολυωνυμικές συναρτήσεις για άπειρα όρια της μεταβλητής τους, επιβιώνουν μόνο οι μεγαλύτερες δυνάμεις. Έτσι έχουμε

$$x \to \frac{1}{2}at^2$$

$$y \to -\frac{1}{2}gt^2$$

Απαλείφουμε τον χρόνο παίρνοντας λόγους

$$\frac{y}{x} = -\frac{g}{a}$$

ή

$$y = -\frac{g}{a}x$$

που είναι η εξίσωση ευθείας.