ΘΕΜΑ 1. Δυο κύματα ταξιδεύουν επάνω στην ίδια χορδή. Τα στιγμιότυπά τους κατά την χρονική στιγμή $t = 0$ περιγράφονται από τις εξισώσεις

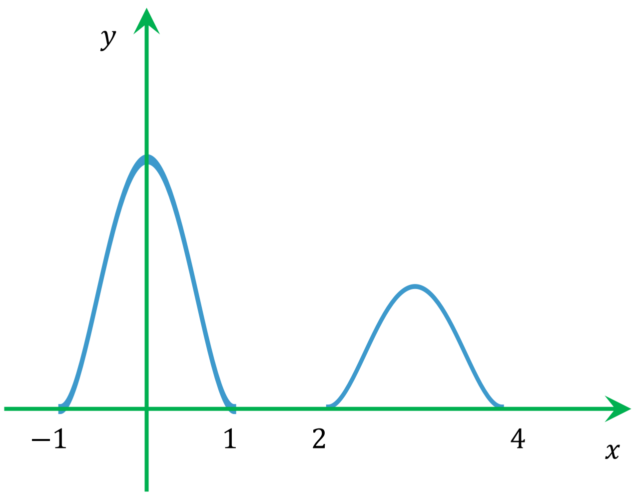
$$y_1(x,0) = \begin{cases} A_1(x+1)^2(x-1)^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$y_1(x,0) = \begin{cases} A_2(x-2)^2(x-4)^2, & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & x < 2 \text{ ή } x > 4 \end{cases}$$

όπου $A_1 = 0.8\ m$ και $A_2 = 0.4\ m$ και το y είναι η κατακόρυφη απομάκρυνση των μορίων της χορδής από τη θέση ισορροπίας τους, που θεωρείται ο άξονας x. Για μεγαλύτερους χρόνους, παρατηρούνται τα εξής: (α) Το κύμα 1 ταξιδεύει προς τα δεξιά ενώ το κύμα 2 προς τα αριστερά. (β) Το μέγιστο του κύματος 1 στο στιγμιότυπο $t = 0$, απαιτεί χρόνο $6\ s$ για να φτάσει στην ίδια θέση που βρισκόταν το μέγιστο του κύματος 2 στο ίδιο στιγμιότυπο. Βάσει αυτών των πληροφοριών, να βρεθεί η απομάκρυνση των μορίων της χορδής κατά την χρονική στιγμή $t = 2\ s$ στην τοποθεσία $x = 0.5\ m$.

<u>Λύση</u>:

Η γραφική παράσταση των δεδομένων στιγμιότυπων φαίνεται παρακάτω. Η αριστερή έχει ρίζες στα ± 1 ενώ η δεξιά στα 2,4.



Από την πληροφορία της μετακίνησης του μεγίστου παίρνουμε για την ταχύτητα του κύματος 1 το εξής:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Επειδή οι δεδομένες συναρτήσεις είναι συμμετρικές, το μέγιστο τους είναι στο μέσο των ριζών. Έτσι στο $t = 0$, το μέγιστο του y_1 είναι στο $x = 0$ ενώ του y_2 είναι στο $x = 3$. Επομένως έχουμε

$$v = \frac{3-0}{6} = 0.5\ m/s$$

Επειδή πρόκειται για το ίδιο μέσο, η ταχύτητα είναι κατά μέτρο η ίδια, το μόνο που αλλάζει είναι η φορά. Για κύματα που διαδίδονται δεξιά – αριστερά, έχουμε συναρτήσεις της μορφής $f(x-vt)$ και $f(x+vt)$ αντίστοιχα. Έτσι, οι δεδομένες για $t>0$ γίνονται

$$y_1(x,t) = 0.2(x-0.5t+1)^2(x-0.5t-1)^2$$

$$y_2(x,t) = 0.4(x+0.5t-2)^2(x+0.5t-4)^2$$

(με τον περιορισμό ότι τα y_1 και y_2 είναι μηδενικές εκτός των ριζών τους). Κατά την χρονική στιγμή $t=2\ s$ στην τοποθεσία $x=1\ m$ έχουμε

$$y_1(0.5,2) = 0.8(0.5-1+1)^2(0.5-1-1)^2 = 0.45\ m$$

$$y_2(0.5,2) = 0.4(0.5+1-2)^2(0.5+1-4)^2 = 0.625\ m$$

Από την αρχή της επαλληλίας

$$y = y_1 + y_2 = 1.07\ m$$

ΘΕΜΑ 2. Η κόρνα μιας αμαξοστοιχίας (τρένου) βρίσκεται στο μπροστινό της μέρος, εκπέμπει στα 20 Hz (βαρύτονος ήχος) και δημιουργεί ένα μικρό κύμα πίεσης $P = P_0 sin(kx - \omega t)$ το οποίο προστίθεται στην σταθερή ατμοσφαιρική. Το κύμα αυτό διαδίδεται με την ταχύτητα του ήχου που σε διαφορετικές θερμοκρασίες θ (σε βαθμούς Κελσίου) δίνεται από τον εμπειρικό τύπο

$$v = 331\sqrt{\frac{\theta + 273}{273}}$$

Ένα τέτοιο τρένο βρίσκεται ακινητοποιημένο στην είσοδο μιας σήραγγας μήκους 202.74 m και στο $t = 0$ ενεργοποιεί την κόρνα του. Ένας σταθμάρχης που βρίσκεται στην άλλη μεριά στην έξοδο καταγράφει μετά από 2 s το κύμα της πίεσης που λαμβάνει λόγω της κόρνας. Όταν κάνει το πείραμα μια χειμωνιάτικη μέρα με θερμοκρασία θ βρίσκει ένα μέγιστο της πίεσης ενώ όταν κάνει το ίδιο πείραμα μια παγωμένη μέρα στους 0°, το μέγιστο έχει μετατοπιστεί ελαφριά προς τα δεξιά και παίρνει $P = 0.866P_0 \approx \sqrt{3}P_0/2$. Να βρεθεί η θερμοκρασία θ.

<u>Λύση</u>: Τα δυο κύματα κατά τις δυο διαφορετικές μέρες είναι αντίστοιχα τα

$$P_1 = P_0 sin(kx - \omega t)$$

$$P_2 = P_0 sin(k'x - \omega t)$$

όπου η συχνότητα είναι η ίδια με αυτή της πηγής και άρα το ω είναι κοινό, ενώ λόγω της θερμοκρασίας η ταχύτητα v είναι διαφορετική και άρα και το $k = \omega/v$. Στην έξοδο της σήραγγας $x = L$ έχουμε:

$$P_1 = P_0 sin(kL - \omega t)$$

$$P_2 = P_0 sin(k'L - \omega t)$$

Αντικαθιστούμε τις μετρήσεις και έχουμε

$$1 = sin(kL - \omega t)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = sin(k'L - \omega t)$$

Το ημίτονο παίρνει την τιμή $\sqrt{3}/2$ στις γωνίες $\pi/3$ και $2\pi/3$ (πρώτο και δεύτερο τεταρτημόριο αντίστοιχα) αλλά θα επιλέξουμε τη δεύτερη τιμή επειδή από την εκφώνηση γνωρίζουμε ότι το κύμα μετατοπίζεται ελαφριά προς τα δεξιά και άρα η τιμή του $sin()$ είναι σε κάθοδο. Συμπεριλαμβάνοντας πολλαπλά μέγιστα $n = 0,1,2,3 \ldots$, οι παραπάνω δυο εξισώσεις έχουν τις εξής λύσεις

$$kL - \omega t = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

$$k'L - \omega t = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$$

Χρησιμοποιήσαμε το ίδιο n και στις δυο περιπτώσεις επειδή πρόκειται για το ίδιο μέγιστο στην έξοδο

Αφαιρώντας

$$L(k' - k) = \frac{\pi}{6}$$

ή

$$L\omega\left(\frac{1}{v'} - \frac{1}{v}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Χρησιμοποιούμε $\omega = 2\pi f$ όπου f η συχνότητα και έχουμε

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v'} - \frac{1}{12Lf}$$

ή

$$v = \frac{1}{\left(\frac{1}{v'} - \frac{1}{12Lf}\right)}$$

$$v^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{v'} - \frac{1}{12Lf}\right)^2}$$

Από τον δεδομένο τύπο της ταχύτητας

$$331^2 \frac{\theta + 273}{273} = \frac{1}{\left(\frac{1}{v'} - \frac{1}{12Lf}\right)^2}$$

Αντικαθιστώντας $\theta = 3.75°$

ΘΕΜΑ 3. Ένας φοιτητής τανύζει οριζόντια κατά μήκος του άξονα x ένα νήμα μήκους $L = 20\ m$ και μάζας $m = 50\ g$ με δύναμη 25 N, με σταθερή άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο και δονεί την ελεύθερη άκρη του με μια συχνότητα $f = 5\ Hz$ δημιουργώντας έτσι ένα τρέχον κύμα με εξίσωση $y = y_0 sin(kx - \omega t)$, όπου y είναι η κατακόρυφη απομάκρυνση των μορίων του νήματος από τη θέση ισορροπίας τους. Καταγράφει σε βίντεο το κύμα και το σταματάει στο χρόνο $t_S = 0.187\ s$ και παρατηρεί στο σημείο $x = 0.6L$ όπου έχει τοποθετήσει μια κατακόρυφη κλίμακα, ότι $y = \sqrt{3}y_0/2$ (το μέτωπο του κύματος δεν έχει φτάσει ακόμα στον τοίχο ώστε να μην υπάρχουν φαινόμενα ανάκλασης και στάσιμου κύματος). Επαναλαμβάνει το πείραμα και θέλει να πετύχει στο ίδιο σημείο ένα μέγιστο οπότε ρυθμίζει ελαφρά τη συχνότητά του σε νέα τιμή f' και το πετυχαίνει παρατηρώντας τον ίδιο συνολικό αριθμό μηδενικών σημείων όπως και πριν μέσα στο ίδιο μήκος $0.6L$. Να βρεθεί η νέα συχνότητα f'.

<u>Λύση</u>:

Ταχύτητα κύματος σε χορδή

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{FL}{m}} = 100\ m/s$$

Δυο διαφορετικά κύματα. Ίδιο μέσο => ίδια ταχύτητα. Διαφορετικές συχνότητες => διαφορετικά $k = \omega/v$, οπότε:

$$y_1 = y_0 sin(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$y_2 = y_0 sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

Αντικαθιστούμε $k = \omega/v$ και έχουμε

$$y_1 = y_0 sin\left(\frac{\omega_1}{v}x - \omega_1 t\right)$$

$$y_2 = y_0 sin\left(\frac{\omega_2}{v}x - \omega_2 t\right)$$

Αντικαθιστούμε τιμές y στο $x = 0.6L$, χρόνος t_S:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = sin\left(\frac{\omega_1}{v}0.6L - \omega_1 t_S\right)$$

$$1 = sin\left(\frac{\omega_2}{v}0.6L - \omega_2 t_S\right)$$

Συμπεριλαμβάνοντας πολλαπλά μέγιστα $n = 0{,}1{,}2{,}3 \ldots$, οι παραπάνω δυο εξισώσεις έχουν τις εξής λύσεις

$$\frac{\omega_1}{v}0.6L - \omega_1 t_S = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$$

$$\frac{\omega_2}{v}0.6L - \omega_2 t_S = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

(το ημίτονο γίνεται επίσης $\sqrt{3}/2$ και στο $2\pi/3 + 2n\pi$ αλλά μας δίνεται η πληροφορία ότι το νήμα είναι σε ανοδική πορεία και άρα δεν ισχύει αυτή η επιλογή επειδή σε αυτή το ημίτονο φθίνει). Αντικαθιστούμε $\omega = 2\pi f$ οπότε

$$2\pi f_1\left(\frac{0.6L}{v} - t_S\right) = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$$

$$2\pi f_2\left(\frac{0.6L}{v} - t_S\right) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

ή

$$2f_1(0.12 - 0.187) = \frac{1}{3} + 2n$$

$$2f_2(0.12 - 0.187) = \frac{1}{2} + 2n$$

Όμως

$$0.12 - 0.187 = -0.067 \approx -0.2/3$$

οπότε αφαιρώντας

$$-2(f_2 - f_1)\frac{0.2}{3} = \frac{1}{6}$$

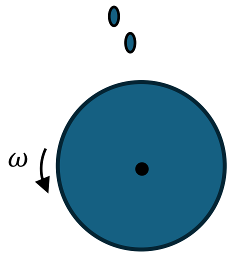
ή

$$f_2 = f_1 - 1.25$$

Τελικά

$$f_2 = 3.75\ Hz$$

ΘΕΜΑ 4. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, κυκλικός δίσκος από πολυμερές έχει αρχική ακτίνα και μάζα r_0 και m_0 αντίστοιχα και περιστρέφεται ελεύθερα με γωνιακή ταχύτητα ω_0 γύρω από άξονα ο οποίος βρίσκεται στο κέντρο του και κάθετα στη σελίδα. Στο $t = 0$ προστίθεται στον δίσκο με σταθερό ρυθμό το ίδιο πολυμερικο υλικό σε μορφή υγρών λιωμένων σταγόνων, ώστε η μάζα του να δίνεται από τον τύπο $m = m_0 + \kappa t$, με κ: θετική σταθερά. Οι σταγόνες στερεοποιούνται πάνω στο δίσκο και αυξάνουν και την ακτίνα του με τέτοιο τρόπο ώστε η επιφανειακή του πυκνότητα να παραμένει σταθερή. Να δοθεί μια έκφραση για την γωνιακή ταχύτητα του δίσκου σε κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$.



Λύση:

Αφού η επιφανειακή πυκνότητα του δίσκου είναι σταθερή, τότε η αναλογία μαζών είναι ίση με την αναλογία επιφανειών. Παίρνοντας αυτές τις αναλογίες για $t = 0$ και για $t > 0$, έχουμε

$$\frac{\pi r^2}{\pi {r_0}^2} = \frac{m}{m_0}$$

$$r^2 = {r_0}^2 \frac{m}{m_0}$$

Η ροπή αδράνειας του συστήματος ανά πάσα χρονική στιγμή δίνεται από τον τύπο

$$I = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} \frac{{r_0}^2}{m_0} m^2 = \frac{1}{2} \frac{{r_0}^2}{m_0} (m_0 + \kappa t)^2$$

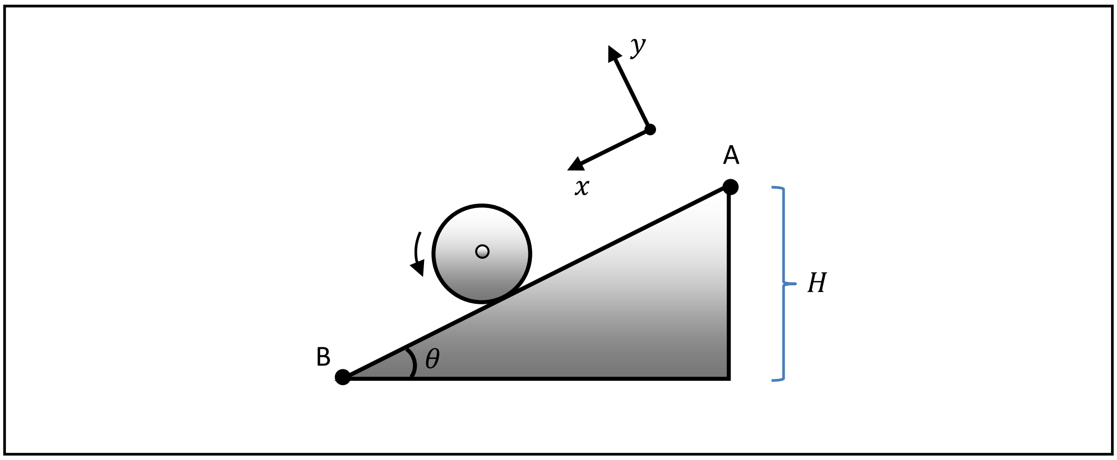
Εάν θεωρήσουμε όλη την μάζα των σταγόνων συν του δίσκου ως ένα σύστημα, τότε η μεταξύ τους αλληλεπίδραση είναι εσωτερική δύναμη και έτσι δεν επηρεάζει την στροφορμή του συστήματος οπότε αυτή παραμένει σταθερή. Εφαρμόζοντας αυτή την αρχή για $t = 0$ και για $t > 0$, έχουμε

$$L = L_0 \Rightarrow I\omega = I_0 \omega_0$$

ή

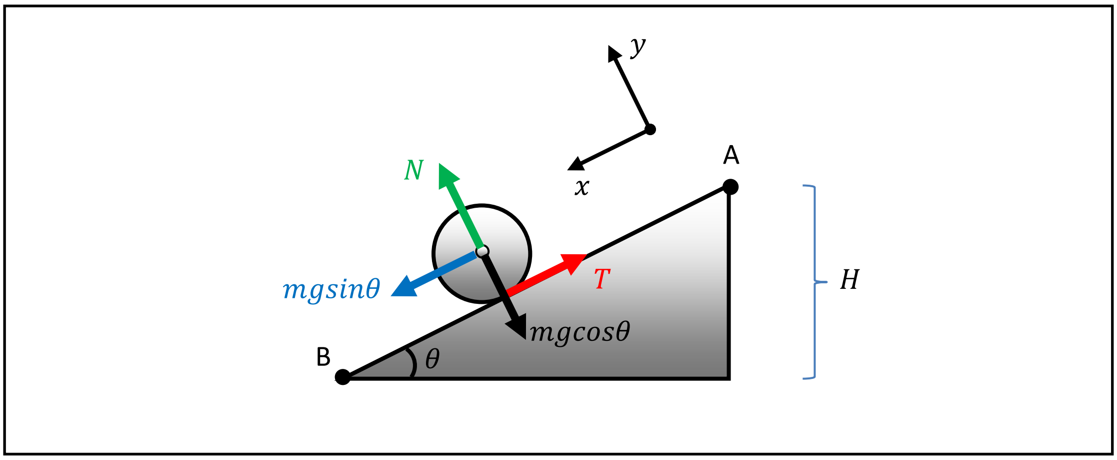
$$\omega = \frac{I_0}{I} \omega_0 = \frac{\frac{1}{2} m_0 {r_0}^2}{\frac{1}{2} \frac{{r_0}^2}{m_0} (m_0 + \kappa t)^2} = \frac{{m_0}^2 \omega_0}{(m_0 + \kappa t)^2}$$

ΘΕΜΑ 5. Μια κοίλη σφαίρα μάζας $m = 0.2\ kg$ και ακτίνας $R = 0.15\ m$, αφήνεται να κινηθεί επάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\theta = \pi/6$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η σφαίρα βρίσκεται στο υψηλότερο σημείο Α και εκτοξεύεται με μεταφορική ταχύτητα $v_0 = 7\ m/s$ παράλληλα προς το κεκλιμένο επίπεδο και προς τα κάτω, χωρίς καθόλου περιστροφή (δηλαδή $\omega_0 = 0$). Ο συντελεστής κινητικής τριβής είναι $\mu = \sqrt{3}/4$ και μπορείτε να πάρετε $g \approx 10\ m/s^2$ για ευκολία. Να βρεθούν ξεχωριστά (α) το έργο της τριβής λόγω μεταφοράς $W_{T\mu}$ και (β) το έργο της τριβής λόγω περιστροφής $W_{T\pi}$ από το υψηλότερο σημείο μέχρι και την στιγμή που θα επέλθει καθαρή κύλιση χωρίς ολίσθηση (ενώ η σφαίρα δεν έχει φτάσει ακόμα στο χαμηλότερο σημείο Β). Να συγκριθούν τα δυο έργα.



Λύση:

Ως γνωστόν, σε κεκλιμένο επίπεδο η συνιστώσα της βαρύτητας κατά μήκος του επιπέδου είναι ίση με $B_x = mgsin\theta$ ενώ η κάθετη σε αυτό συνιστώσα είναι ίση με $B_y = mgcos\theta$. Από ισορροπία στην κάθετη διεύθυνση, έχουμε ότι για την κάθετη αντίδραση $N = B_y$. Εφόσον αρχικά έχουμε ολίσθηση προς τα κάτω, δυο πράγματα ισχύουν, πρώτον η τριβή T είναι προς τα πάνω και δεύτερον ισχύει ο τύπος της τριβής ολίσθησης $T = \mu N = \mu mgcos\theta = 0.75\ N$



Έτσι έχουμε: Δεύτερος νόμος του Νεύτωνα λόγω μεταφοράς

$$mgsin\theta - \mu mgcos\theta = ma$$

ή

$$a = g(sin\theta - \mu cos\theta) = 1.25\ m/s^2$$

Ολοκλήρωση

$$v = v_0 + at = 7 + 1.25t$$

Δεύτερη ολοκλήρωση

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 7t + \frac{1.25}{2}t^2$$

Δεύτερος νόμος του Νεύτωνα λόγω περιστροφής

$$\mu mgcos\theta R = Ia_\Gamma$$

ή

$$\mu mgcos\theta R = \frac{2}{3}mR^2 a_\Gamma$$

ή

$$\mu gcos\theta = \frac{2}{3}Ra_\Gamma$$

ή

$$a_\Gamma = \frac{3}{2R}\mu gcos\theta = 37.5\ rad/s^2$$

Ολοκλήρωση

$$\omega = a_\Gamma t = 37.5t$$

Δεύτερη ολοκλήρωση

$$\theta = \frac{1}{2}a_\Gamma t^2 = \frac{1}{2}37.5t^2$$

Συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση $v = \omega R$ σε χρονική στιγμή t_1 που σημαίνει

$$7 + 1.25t_1 = 0.15 \times 37.5t_1$$

$$t_1 = \frac{7}{(5.625 - 1.25)} = 1.6\ s$$

Η τριβή είναι μια σταθερή δύναμη και άρα το έργο της υπολογίζεται εύκολα. Στη μεταφορά

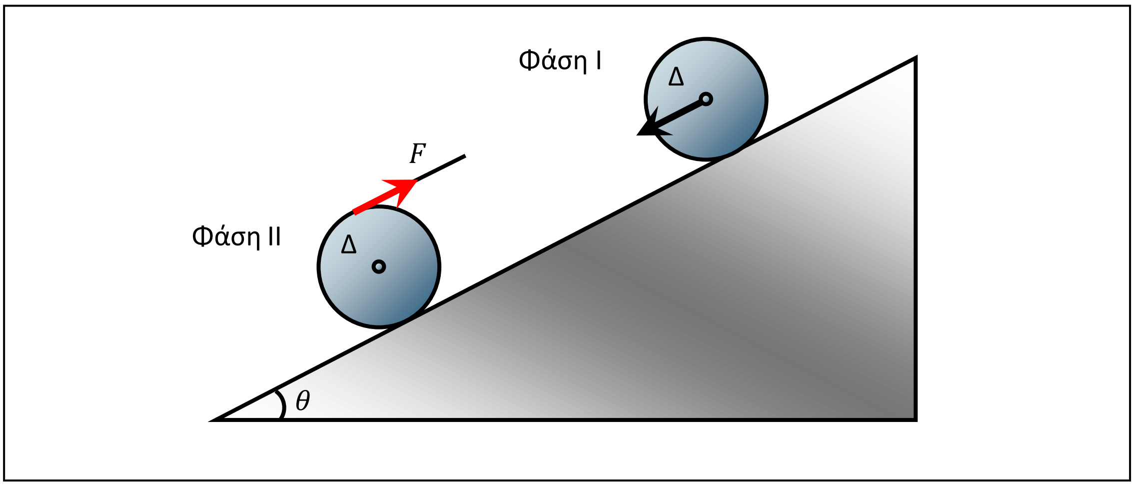
$$W_{T\mu} = T\Delta x = 0.75\ \left(7t_1 + \frac{1.25}{2}{t_1}^2\right) = 9.6\ J$$

Στην περιστροφή

$$W_{T\pi} = TR\Delta\theta = 0.75 \times 0.15 \times \frac{1}{2}37.5{t_1}^2 = 5.4\ J$$

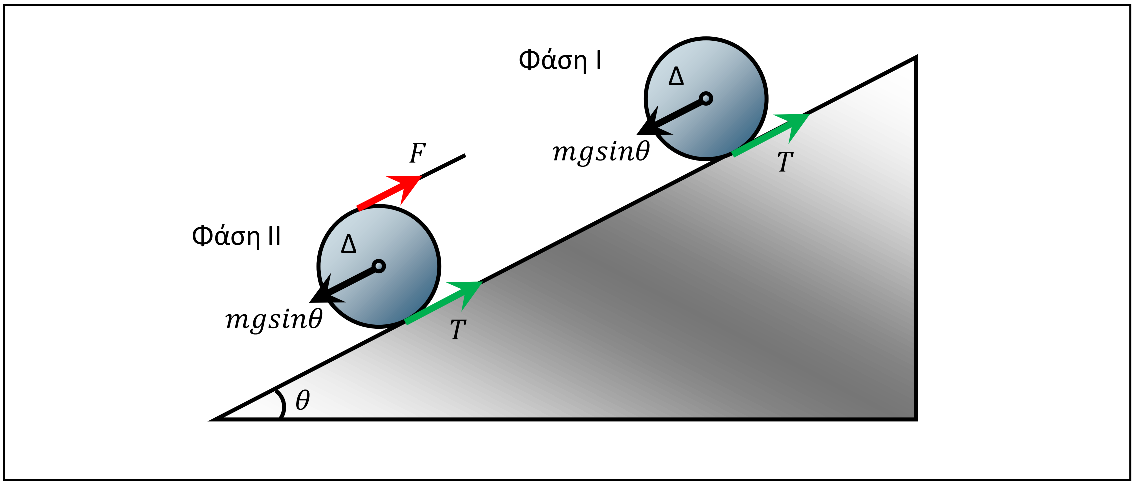
Και τα δυο έργα είναι θετικά επειδή η σφαίρα επιταχύνεται τόσο μεταφορικά όσο και περιστροφικά αλλά λόγω ολίσθησης, το τόξο $R\Delta\theta$ της περιστροφής είναι μικρότερο από το μήκος μεταφοράς Δx, οπότε $R\Delta\theta < \Delta x => TR\Delta\theta < T\Delta x => W_{T\pi} < W_{T\mu}$

ΘΕΜΑ 6. Δίσκος Δ μάζας m και ακτίνας r αφήνεται να κυλήσει ελεύθερα από το ψηλότερο σημείο ενός κεκλιμένου επιπέδου γωνίας θ. Λόγω τριβής με το επίπεδο, ο δίσκος εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση και όταν αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα ω_0, εφαρμόζεται στην περιφέρεια του μια επιπλέον σταθερή δύναμη F παράλληλα με το κεκλιμένο επίπεδο και προς τα πάνω, ούτως ώστε να επιβραδυνθεί η κίνησή του. Ο συντελεστής κινητικής τριβής είναι μ και υπάρχει επιτάχυνση της βαρύτητας g προς τα κάτω. Να βρεθεί η ταχύτητα του κέντρου του δίσκου, μετά από χρόνο τ από την εφαρμογή της δύναμης.



Λύση:

Οι δυνάμεις είναι όπως στο παρακάτω σχήμα:



Δεύτερος νόμος του Νεύτωνα λόγω μεταφοράς

$$mgsin\theta - F - T = ma$$

Εξ. (1)

Δεύτερος νόμος του Νεύτωνα λόγω περιστροφής, ροπή αδράνειας δίσκου $mr^2/2$:

$$Tr - Fr = Ia_{\Gamma}$$

$$Tr - Fr = \frac{1}{2}mra_{\Gamma}$$

$$T - F = \frac{mra_\Gamma}{2}$$

Εξ. (2)

Προσθέτοντας τις (1) και (2) ώστε να απαλειφθεί η τριβή T, μας οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$mgsin\theta - 2F = ma + \frac{mra_\Gamma}{2}$$

Εξ. (3)

Στην κύλιση χωρίς ολίσθηση ισχύει $a = ra_\Gamma$ επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$mra_\Gamma = ma$$

και να αντικαταστήσουμε αυτό το αποτέλεσμα στην (3) ώστε να έχουμε:

$$mgsin\theta - 2F = \frac{3ma}{2}$$

ή

$$a = \frac{2}{3}(gsin\theta - 2F)$$

Ολοκληρώνοντας, έχουμε σε χρόνο τ μετά την εφαρμογή της δύναμης:

$$v = v_0 + a\tau$$

όπου το v_0 είναι η ταχύτητα την στιγμή που πρωτοεμφανίζεται η δύναμη F. Από την συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση $v_0 = \omega_0 r$ και έτσι η παραπάνω γίνεται

$$v = \omega_0 r + \frac{2}{3}(gsin\theta - 2F)\tau$$