ΘΕΜΑ 1

Κινητό κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ με συνιστώσες $v_x = atsin(\lambda t^2)$ και $v_y = btcos(\lambda t^2)$ όπου $a = 2\sqrt{3}\ m$, $b = 2\ m$ και $\lambda = \pi/2\ rad/s^2$. Εάν στο $t = 0$ οι αρχικές συντεταγμένες του είναι ίσες με $x = -2\sqrt{3}/\pi$ και $y = 0$, να βρεθούν: (α) Τα x και y ανά πάσα χρονική στιγμή $t > 0$, (β) Η τροχιά του κινητού (να σχεδιαστεί), και (γ) Ο μικρότερος χρόνος όπου η ταχύτητα σχηματίζει γωνία $-45°$ με τον άξονα x. Δίνονται τα ολοκληρώματα

$$\int xsinxdx = -xcosx + sinx$$

$$\int xcosxdx = xsinx + cosx$$

$$\int xsinx^2dx = -\frac{1}{2}cosx^2$$

$$\int xcosx^2dx = \frac{1}{2}sinx^2$$

<u>Λύση</u>:

Με ολοκλήρωση

$$x = \int v_x dt = 2\sqrt{3}\int tsin(\lambda t^2)dt = 2\sqrt{3}\int tsin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$$

Θέτω $z = \sqrt{\pi/2}t$ και το παραπάνω γίνεται

$$x = \frac{4\sqrt{3}}{\pi}\int zsin(z^2)dz$$

το οποίο δίνεται στο τυπολόγιο της άσκησης και έτσι

$$x = -\frac{2\sqrt{3}}{\pi}cosz^2 + c_x$$

$$x = -\frac{2\sqrt{3}}{\pi}cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) + c_x$$

Ομοίως

$$y = 2\int cos(\lambda t^2)dt = 2\int cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$$

$$y = \frac{2}{\pi}sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) + c_y$$

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες για x και y

$$-\frac{2\sqrt{3}}{\pi} = -\frac{2\sqrt{3}}{\pi}cos0 + c_x$$

$$0 = \frac{2}{\pi}sin0 + c_y$$

παίρνουμε

$$c_x = 0$$

$$c_y = 0$$

και έτσι

$$x = -\frac{2\sqrt{3}}{\pi} cos(\lambda t^2)$$

$$y = \frac{2}{\pi} sin(\lambda t^2)$$

(β) Για να βρεθεί η τροχιά, πρέπει να απαλείψουμε το t στις παραπάνω εξισώσεις. Αυτό γίνεται εύκολα από την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$cos^2\varphi + sin^2\varphi = 1$$

με $\varphi = \lambda t^2$ έχουμε

$$\left(\frac{\pi x}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\pi y}{2}\right)^2 = 1$$

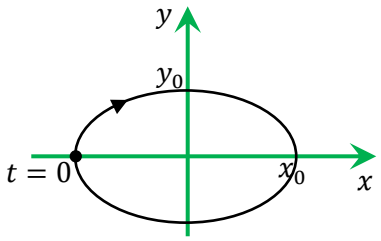
η οποία είναι εξίσωση έλλειψης της μορφής

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 = 1$$

με ημιάξονες

$$x_0 = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}$$

$$y_0 = \frac{2}{\pi}$$



(γ) Η γωνία θ της ταχύτητας δίνεται από την

$$tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{2btcos(\lambda t^2)}{2atsin(\lambda t^2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} cot(\lambda t^2)$$

Για $\theta = 135°$ έχουμε

$$-1 = \frac{1}{\sqrt{3}} cot(\lambda t^2)$$

ή

$$tan(\lambda t^2) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ή

$$tan(\lambda t^2) = tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

Η συνάρτηση "εφαπτομένη" είναι περιοδική με περίοδο π και επομένως η παραπάνω οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\lambda t^2 = -\frac{\pi}{6} + \kappa\pi$$

με $\kappa = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$. Οι αρνητικές τιμές απορρίπτονται επειδή οδηγούν σε αρνητικούς χρόνους. Από τις θετικές τιμές, αυτή που δίνει το μικρότερο t είναι η $\kappa = 1$. Χρησιμοποιώντας και την τιμή $\lambda = \pi/2$ έχουμε

$$\frac{\pi}{2} t^2 = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$$

ή

$$t^2 = \frac{5}{3}$$

ή (μόνο θετικό t)

$$t = \sqrt{\frac{5}{3}} = 1.29\ s$$

ΘΕΜΑ 2

Σημειακή μάζα εκτελεί τέτοια κίνηση ώστε το διάνυσμα της επιτάχυνσής της να έχει συνιστώσες

$$a_x = \kappa$$

$$a_y = \frac{\lambda}{\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^2}$$

όπου κ, λ και τ θετικές σταθερές, ενώ $t \geq 0$ ο χρόνος. Η ταχύτητα της για άπειρους χρόνους είναι οριζόντια ενώ στο $t = 0$ έχει μέτρο $\tau\lambda$ και η μάζα διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο. Να βρεθούν (α) Η απόσταση του κινητού από το Ο κατά την χρονική στιγμή $t = 0.5\tau$, και (β) Η εξίσωση της τροχιάς του κινητού (χωρίς γραφική παράσταση) για $0 \leq t < \tau$ σε μορφή $x = f(y)$, και (γ) Να δοθεί μια ποιοτική γραφική παράσταση της τροχιάς εάν γνωρίζετε ότι για μικρά z ισχύει η προσέγγιση $e^z \approx 1 + z$

<u>Λύση</u>:

(α) Με ολοκλήρωση βρίσκουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας:

$$v_x = \int a_x dt = \kappa t + c_1$$

$$v_y = \int a_y dt = \frac{\lambda\tau}{\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)} + c_2$$

Για άπειρους χρόνους, η $v_y \to 0$ και έτσι έχουμε

$$0 = 0 + c_2$$

ή $c_2 = 0$. Στο $t = 0$ έχουμε

$$v_x = c_1$$

$$v_y = \lambda\tau$$

και αφού το μέτρο είναι ίσο με $\lambda\tau$, τότε αναγκαστικά $c_1 = 0$ που σημαίνει

$$v_x = \kappa t$$

$$v_y = \frac{\lambda\tau}{\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)}$$

Ολοκληρώνοντας ακόμα μια φορά, παίρνουμε για τις συνιστώσες της απομάκρυνσης:

$$x = \int v_x dt = \frac{1}{2}\kappa t^2 + c_3$$

$$y = \int v_y dt = -\lambda\tau^2 ln\left|1 - \frac{t}{\tau}\right| + c_4$$

Αφού αρχικά το κινητό βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, τότε $c_3 = c_4 = 0$. Τελικά

$$x = \frac{1}{2}\kappa t^2$$

$$y = -\lambda\tau^2 ln\left|1 - \frac{t}{\tau}\right|$$

Στην δεδομένη χρονική στιγμή $t = 0.5\tau$ και έτσι

$$x = \frac{1}{8}\kappa\tau^2$$

$$y = \lambda\tau^2 ln2$$

Η απόσταση της μάζας από την αρχή των αξόνων δίνεται από το μέτρο του διανύσματος θέσης

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \tau^2\sqrt{\frac{1}{64}\kappa^2 + \lambda^2(ln2)^2}$$

(β) Για $0 < t < \tau$, μπορούμε να λύσουμε ως προς τον χρόνο την δεύτερη εξίσωση και να έχουμε

$$1 - \frac{t}{\tau} = e^{-\frac{y}{\lambda\tau^2}}$$

ή

$$t = \tau\left(1 - e^{-\frac{y}{\lambda\tau^2}}\right)$$

Με αντικατάσταση στην πρώτη, έχουμε

$$x = \frac{1}{2}\kappa\tau^2\left(1 - e^{-\frac{y}{\lambda\tau^2}}\right)^2$$

(γ) Γνωρίζουμε ότι για $t = 0$, ότι η μάζα βρίσκεται στην αρχή των αξόνων οπότε αυτό θα είναι το αρχικό σημείο. Από τις εκφράσεις των x και y που βρήκαμε παραπάνω, το x είναι προφανώς θετικό αλλά και το y είναι θετικό επειδή ο Νεπέριος είναι αρνητικός όταν το όρισμα του είναι μικρότερο της μονάδος, που γίνεται για $t < \tau$. Έτσι η γραφική παράσταση περιορίζεται στο πρώτο τεταρτημόριο. Επίσης για μεγάλα y ισχύει

$$e^{-\frac{y}{\lambda\tau^2}} \to 0$$

οπότε και

$$x \to \frac{1}{2}\kappa\tau^2 = x_0$$

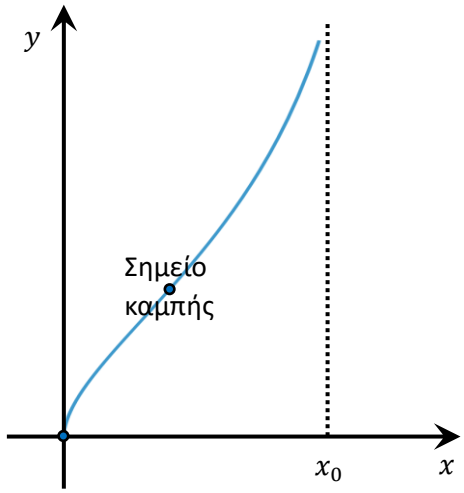
που είναι μια σταθερή τιμή και άρα η γραφική παράσταση πιάνει κατακόρυφο ασύμπτωτο στο x_0. Επίσης, για μικρά y, χρησιμοποιούμε τη δεδομένη προσέγγιση και έχουμε

$$1 - e^{-\frac{y}{\lambda\tau^2}} \approx 1 - 1 + \frac{y}{\lambda\tau^2} = \frac{y}{\lambda\tau^2}$$

οπότε το x γίνεται

$$x \approx \frac{\kappa}{\lambda^2 \tau^2} y^2$$

Δηλαδή κοντά στην αρχή των συντεταγμένων έχουμε παραβολή της μορφής $y \sim \sqrt{x}$. Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, η γραφική παράσταση μοιάζει ποιοτικώς όπως η παρακάτω. Αναγκαστικά υπάρχει ένα σημείο καμπής ώστε η συνάρτηση να πιάσει την ασύμπτωτο



ΘΕΜΑ 3

Σημειακή μάζα εκτελεί τέτοια κίνηση ώστε το διάνυσμα της επιτάχυνσής της να έχει συνιστώσες

$$a_x = \frac{\kappa}{\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^2}$$

$$a_y = \lambda$$

όπου κ, λ και τ θετικές σταθερές, ενώ $t \geq 0$ ο χρόνος σε δευτερόλεπτα. Η ταχύτητα της για άπειρους χρόνους είναι κατακόρυφη ενώ στο $t = 0$ έχει μέτρο $\kappa\tau$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο. Να βρεθούν (α) Οι μονάδες των σταθερών κ και τ, (β) Η εξίσωση της τροχιάς του κινητού (χωρίς γραφική παράσταση) σε μορφή $y = f(x)$ για χρόνους $0 \leq t \leq \tau$, και (γ) Να βρεθεί εάν η τροχιά έχει κάποιο φράγμα για πολύ μεγάλα και θετικά x.

<u>Λύση</u>:

(α) Αφού η μονάδα στον παρανομαστή είναι καθαρός αριθμός, το ίδιο πρέπει να συμβαίνει και με τον όρο t/τ και άρα το τ πρέπει να είναι σε δευτερόλεπτα. Αυτό σημαίνει ότι η παρένθεση είναι αδιάστατη και έτσι το κ είναι σε μονάδες επιτάχυνσης m/s^2.

(β) Με ολοκλήρωση βρίσκουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας:

$$v_x = \int a_x dt = \frac{\kappa\tau}{\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)} + c_1$$

$$v_y = \int a_y dt = \lambda t + c_2$$

Για άπειρους χρόνους, η $v_x \to 0$ και έτσι έχουμε

$$0 = 0 + c_1$$

ή $c_1 = 0$. Στο $t = 0$ έχουμε

$$v_x = \kappa\tau$$

$$v_y = c_2$$

και αφού το μέτρο είναι ίσο με $\kappa\tau$, τότε αναγκαστικά $c_2 = 0$ που σημαίνει

$$v_x = \frac{\kappa\tau}{1 - \frac{t}{\tau}}$$

$$v_y = \lambda t$$

Ολοκληρώνοντας ακόμα μια φορά, παίρνουμε για τις συνιστώσες της απομάκρυνσης:

$$x = \int v_x dt = -\kappa\tau^2 ln\left|1 - \frac{t}{\tau}\right| + c_3$$

$$y = \int v_y dt = \frac{\lambda}{2} t^2 + c_4$$

Αφού αρχικά το κινητό βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, τότε $c_3 = c_4 = 0$. Τελικά

$$x = -\kappa\tau^2 ln\left|1 - \frac{t}{\tau}\right|$$

$$y = \frac{1}{2}\lambda t^2$$

Για $0 < t < \tau$, μπορούμε να λύσουμε ως προς τον χρόνο την πρώτη εξίσωση και να έχουμε

$$1 - \frac{t}{\tau} = e^{-\frac{x}{\kappa\tau^2}}$$

ή

$$t = \tau\left(1 - e^{-\frac{x}{\kappa\tau^2}}\right)$$

Με αντικατάσταση στην δεύτερη, έχουμε

$$y = \frac{1}{2}\lambda\tau^2\left(1 - e^{-\frac{x}{\kappa\tau^2}}\right)^2$$

(γ) Για $x \to \infty$ έχουμε

$$e^{-\frac{x}{\kappa\tau^2}} \to 0$$

και έτσι

$$y \to \frac{1}{2}\lambda\tau^2 = y_0$$

επομένως το y δεν μπορεί να ξεπεράσει την οριακή τιμή y_0. Επειδή για $x > 0$ ισχύει

$$e^{-\frac{x}{\kappa\tau^2}} \leq 1$$

τότε

$$1 - e^{-\frac{x}{\kappa\tau^2}} \geq 0$$

που σημαίνει ότι παντού $y \geq 0$ και άρα το y πιάνει την οριακή του τιμή y_0 από κάτω, δηλαδή το y_0 είναι ένα άνω φράγμα για το y

ΘΕΜΑ 4

Σημειακή μάζα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση έτσι ώστε στο $t = 0$ να βρίσκεται επάνω στον άξονα x. Εάν κατά τη χρονική στιγμή $t = 1\ s$ η ταχύτητα του δίνεται από την έκφραση

$$\vec{v} = \pi\left(-0.6\vec{e}_x + 0.8\vec{e}_y\right)$$

(α) Να βρεθεί το διάνυσμα της θέσης του κατά τη χρονική στιγμή $t = 2\ s$, και (β) Να υπολογισθεί το εσωτερικό γινόμενο $\vec{r}(1) \cdot \vec{r}(2)$ μεταξύ των διανυσμάτων θέσεις κατά τις χρονικές στιγμές $t = 1\ s$ και $t = 2\ s$.

<u>Λύση</u>:

(α) 1ος τρόπος: Αφού το κινητό εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση έτσι ώστε στο $t = 0$ να βρίσκεται επάνω στον άξονα x, τότε οι συντεταγμένες του δίνονται από τις εκφράσεις

$$x = Rcos\omega t$$

$$y = Rsin\omega t$$

και έτσι οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι οι

$$v_x = -\omega Rsin\omega t$$

$$v_y = \omega Rcos\omega t$$

Στο $t = 1$ οι παραπάνω γίνονται

$$v_x(1) = -\omega Rsin\omega$$

$$v_y(1) = \omega Rcos\omega$$

Συγκρίνοντας με τα δεδομένα έχουμε

$$\omega Rsin\omega = 0.6\pi$$

$$\omega Rcos\omega = 0.8\pi$$

Διαιρώντας κατά μέλη

$$tan\omega = 0.75$$

ή

$$\omega = 0.643\ rad/s$$

Τώρα που γνωρίζουμε το ω, μπορούμε να βρούμε το R από μια από τις παραπάνω σχέσεις, π.χ. από τη πρώτη

$$R = \frac{0.6\pi}{\omega sin\omega} = 4.88\ m$$

Οι συντεταγμένες κατά την χρονική στιγμή $t = 2\ s$ δίνονται από τις εκφράσεις

$$x(2) = Rcos2\omega = 1.37$$

$$y(2) = Rsin2\omega = 4.68$$

και έτσι το διάνυσμα της θέσης δίνεται από την

$$\vec{r} = 1.37\vec{e}_x + 4.68\vec{e}_y$$

2ος τρόπος: Η γωνία της δεδομένης ταχύτητας δίνεται από την έκφραση

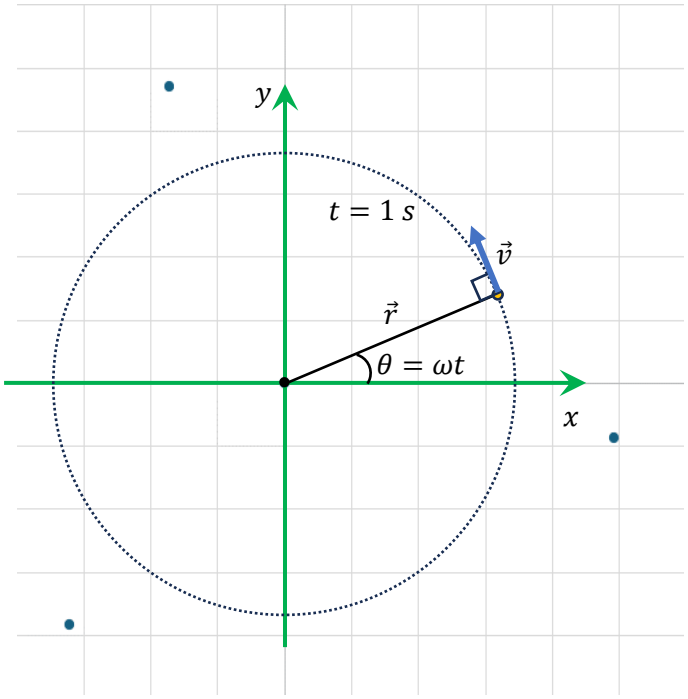
$$tan\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{0.8\pi}{-0.6\pi}$$

ή

$$\varphi = 2.21\, rad = 127°$$

(προσέξτε ότι η x-συνιστώσα της είναι αρνητική και έτσι η γωνία είναι στο 2ο τεταρτημόριο). Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η ταχύτητα είναι κάθετη στο διάνυσμα θέσης και έτσι η γωνία του $\vec{r}$ στο $t = 1\, s$ είναι ίση με

$$\theta = 127° - 90° = 34° = 0.643\, rad$$



Όμως στην ομαλή κυκλική κίνηση $\theta = \omega t$ και αφού η δεδομένη ταχύτητα είναι στο $t = 1\, s$, παίρνουμε $\omega = 0.643\, rad/s$. Από την άλλη μεριά, το μέτρο της δεδομένης ταχύτητας είναι ίσο με

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \pi$$

και ως γνωστόν, στην ομαλή κίνηση δίνεται από την έκφραση $v = \omega R$ οπότε

$$R = \frac{\pi}{0.643} = 4.88\, m$$

Έτσι, όπως στον 1ο τρόπο, το διάνυσμα της θέσης δίνεται από την

$$\vec{r} = 1.37\vec{e}_x + 4.68\vec{e}_y$$

(β) Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου

$$\vec{r}(1) \cdot \vec{r}(2) = |\vec{r}(1)||\vec{r}(2)|cos\theta_{12}$$

όπου θ_{12} είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων. Για κυκλική κίνηση $|\vec{r}(t)| = R = 4.88\, m$ και επιπλέον, είδαμε ότι για ομαλή κυκλική κίνηση $\theta = \omega t$ οπότε

$$\theta_{12} = \theta(2) - \theta(1) = \omega(t_2 - t_1) = 0.643(2 - 1) = 0.643\, rad$$

Τελικά

$$\vec{r}(1) \cdot \vec{r}(2) = 4.88 \times 0.643 = 3.14\, m^2$$

ΘΕΜΑ 5

Σημειακή μάζα κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου b κατά τον άξονα $+y$ ενώ η ταχύτητα του κατά τον άξονα x δίνεται από την έκφραση

$$v_x = a\left[1 + \left(\frac{t}{\tau} - 1\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

όπου a, b και τ θετικές σταθερές και $t \geq 0$ ο χρόνος. Εάν στο $t = 0$ το κινητό διέρχεται από την αρχή των αξόνων, να βρεθούν (α) Οι μονάδες των σταθερών a και τ, (β) Η εξίσωση της τροχιάς του κινητού σε μορφή $x = f(y)$ (χωρίς γραφική παράσταση), και (γ) η γραφική παράσταση της τροχιάς του κινητού για μεγάλους χρόνους. <u>Σημείωση</u>: Για μη αρνητικό ακέραιο n, υπάρχει ο εξής γενικός τύπος:

$$\int x^n e^{-x} dx = -e^{-x}[x^n + (x^n)' + (x^n)'' + \cdots]$$

(δηλαδή η σειρά μέσα στην παρένθεση έχει διαδοχική αυξανόμενη τάξη παραγώγισης)

<u>Λύση</u>:

(α) Οι μαθηματικές συναρτήσεις πρέπει να έχουν αδιάστατα ορίσματα που σημαίνει ότι στο εκθετικό, ο όρος t/τ πρέπει να είναι αδιάστατη ποσότητα και έτσι το τ είναι σε δευτερόλεπτα. Έτσι, όλη η παρένθεση με τις τετράγωνες αγκύλες είναι αδιάστατη και έτσι το a πρέπει να έχει μονάδες m/s.

(β) Με ολοκλήρωση έχουμε

$$x = \int v_x dt = a\int\left[1 + \left(\frac{t}{\tau} - 1\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\right]dt$$

$$x = a\left[\int dt + \int \frac{t}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}dt - \int e^{-\frac{t}{\tau}}dt\right]$$

Με την βοήθεια του δεδομένου τύπου, έχουμε

$$\int e^{-z}dz = e^{-z}$$

$$\int ze^{-z}dz = e^{-z}(z+1)$$

και έτσι για $z = t/\tau$ έχουμε

$$x = a\left[t - \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\frac{t}{\tau} + 1\right) + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right] + c_x$$

$$x = a\left[t - \frac{t}{\tau}\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right] + c_x$$

$$x = at\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + c_x$$

Από την άλλη, στην y διεύθυνση

$$y = \int v_y dt = bt + c_y$$

Αφού στο $t = 0$ το κινητό διέρχεται από την αρχή των αξόνων, έχουμε

$$x(0) = 0 => 0 = 0 + c_x$$

$$y(0) = 0 => 0 = 0 + c_y$$

που σημαίνει $c_x = c_y = 0$ και έτσι οι συντεταγμένες του κινητού είναι οι

$$x = at\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$y = bt$$

Διαιρούμε τις παραπάνω κατά μέλη για να απλοποιηθεί ο χρόνος και έχουμε

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Εύκολα λύνουμε την δεύτερη ως προς χρόνο και με αντικατάσταση στην παραπάνω παίρνουμε

$$x = \frac{a}{b}y\left(1 - e^{-\frac{y}{b\tau}}\right)$$

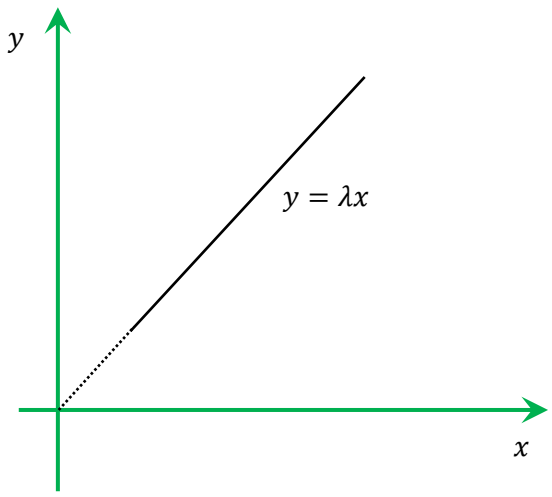
(γ) Για άπειρους χρόνους $t \to \infty$ έχουμε

$$x = at\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \to at$$

η αντίστοιχη εξίσωση του y παραμένει η ίδια σε μεγάλους χρόνους $y = bt$ και διαιρώντας τις δυο κατά μέλη έχουμε

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$$

η οποία είναι εξίσωση ευθείας $y = \lambda x$ με κλίση $\lambda = b/a$



ΘΕΜΑ 6

Σημειακή μάζα κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου a κατά τον άξονα x ενώ η ταχύτητα του κατά τον άξονα y δίνεται από την έκφραση

$$v_y = b\left[1 + \left(\frac{t}{\tau} - 1\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

όπου a, b και τ θετικές σταθερές και $t \geq 0$ ο χρόνος. Εάν στο $t = 0$ το κινητό διέρχεται από την αρχή των αξόνων, να βρεθούν (α) Οι μονάδες των σταθερών b και τ, (β) Η απόσταση του κινητού από την αρχή των αξόνων σε τυχαία χρονική στιγμή $t \geq 0$, και (γ) να δειχθεί ότι αυτή η απόσταση για μεγάλους χρόνους αυξάνει γραμμικά και να βρεθεί ο ρυθμός αύξησής της.
<u>Σημείωση</u>: Για μη αρνητικό ακέραιο n, υπάρχει ο εξής γενικός τύπος:

$$\int x^n e^{-x} dx = -e^{-x}[x^n + (x^n)' + (x^n)'' + \cdots]$$

(δηλαδή η σειρά μέσα στην παρένθεση έχει διαδοχική αυξανόμενη τάξη παραγώγισης)

<u>Λύση</u>:

(α) Οι μαθηματικές συναρτήσεις πρέπει να έχουν αδιάστατα ορίσματα που σημαίνει ότι στο εκθετικό, ο όρος t/τ πρέπει να είναι αδιάστατη ποσότητα και έτσι το τ είναι σε δευτερόλεπτα. Έτσι, όλη η παρένθεση με τις τετράγωνες αγκύλες είναι αδιάστατη και έτσι το b πρέπει να έχει μονάδες m/s.

(β) Με ολοκλήρωση έχουμε

$$x = \int v_x dt = at + c_x$$

Από την άλλη, στην y διεύθυνση

$$y = \int v_y dt = b\int \left[1 + \left(\frac{t}{\tau} - 1\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\right] dt$$

$$y = b\left[\int dt + \int \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} dt - \int e^{-\frac{t}{\tau}} dt\right]$$

Με την βοήθεια του δεδομένου τύπου, έχουμε

$$\int e^{-z} dz = e^{-z}$$

$$\int z e^{-z} dz = e^{-z}(z + 1)$$

και έτσι για $z = t/\tau$ καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$y = b\left[t - \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\frac{t}{\tau} + 1\right) + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right] + c_y$$

$$y = b\left[t - \frac{t}{\tau}\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right] + c_y$$

$$y = bt\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + c_y$$

Αφού στο $t = 0$ το κινητό διέρχεται από την αρχή των αξόνων, έχουμε

$$x(0) = 0 => 0 = 0 + c_x$$

$$y(0) = 0 => 0 = 0 + c_y$$

που σημαίνει $c_x = c_y = 0$ και έτσι οι συντεταγμένες του κινητού είναι οι

$$y = bt\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$x = at$$

Η απόσταση r από την αρχή των συντεταγμένων ανά πάσα χρονική στιγμή, δίνεται από το μέτρο του διανύσματος θέσης ως

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(at)^2 + (bt)^2\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2}$$

(γ) Για άπειρους χρόνους $t \to \infty$ έχουμε

$$e^{-\frac{t}{\tau}} \to 0$$

και

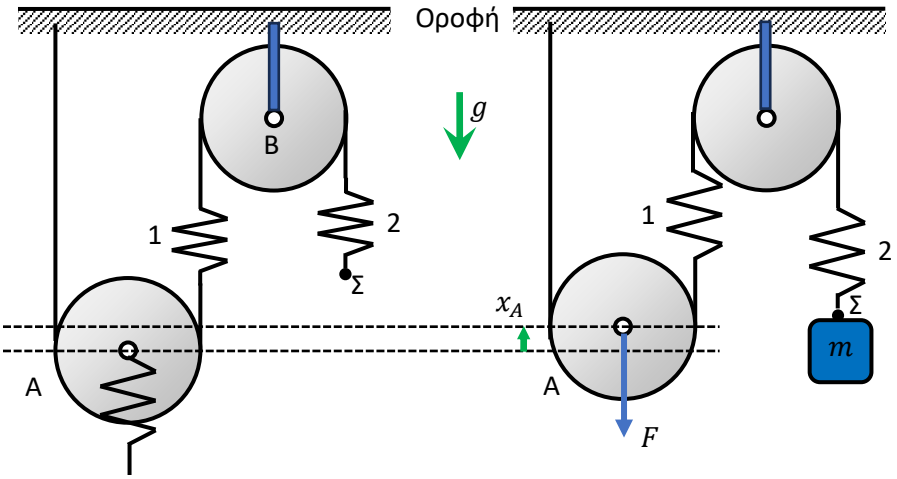
$$r \to \sqrt{(at)^2 + (bt)^2} = t\sqrt{a^2 + b^2}$$

και αφού ο δεύτερος όρος είναι σταθερός, τότε το r αυξάνει γραμμικά με τον χρόνο t. Ο ρυθμός αύξησης είναι ο

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ΘΕΜΑ 7

Στο παρακάτω σχήμα στα αριστερά, το σύστημα των δυο ιδανικών τροχαλιών Α και Β και δυο απαραμόρφωτων ελατηρίων 1 και 2, ηρεμεί μέσα σε πεδίο βαρύτητας. Το αριστερό νήμα της τροχαλίας Α και η ράβδος της τροχαλίας Β είναι στερεωμένα σε ακλόνητα σημεία στην οροφή. Όπως φαίνεται στο σχήμα στα δεξιά, μια μάζα $m = 2\ kg$ αναρτάται στο ίδιο σύστημα στο σημείο Σ του κάτω άκρου του ελατηρίου 2 και (ταυτόχρονα μια δύναμη F ασκείται στο κέντρο της τροχαλίας Β, δεν υπήρχε στην αρχική εκφώνηση αλλά δεν επηρεάζει την λύση) και έτσι το σύστημα έρχεται σε νέα θέση ισορροπίας όπου και τα δυο ελατήρια έχουν επεκταθεί και το κέντρο της τροχαλίας Α έχει μετατοπιστεί προς τα πάνω κατά απόσταση $x_A = 0.1\ m$. Οι σταθερές των δυο ελατηρίων είναι ίσες με $k_1 = 100\ N/m$ και $k_2 = 200\ N/m$. (α) Να σχεδιαστούν όλες οι δυνάμεις που δρουν στο σύστημα με τη βοήθεια ελεύθερων σχημάτων στην περίπτωση στα δεξιά, (β) να βρεθεί πόσο ξετυλίχθηκε το νήμα στην τροχαλία Β, και (γ) να βρεθεί η μετατόπιση του σημείου Σ. Πάρτε $g = 10\ m/s^2$ για ευκολία.

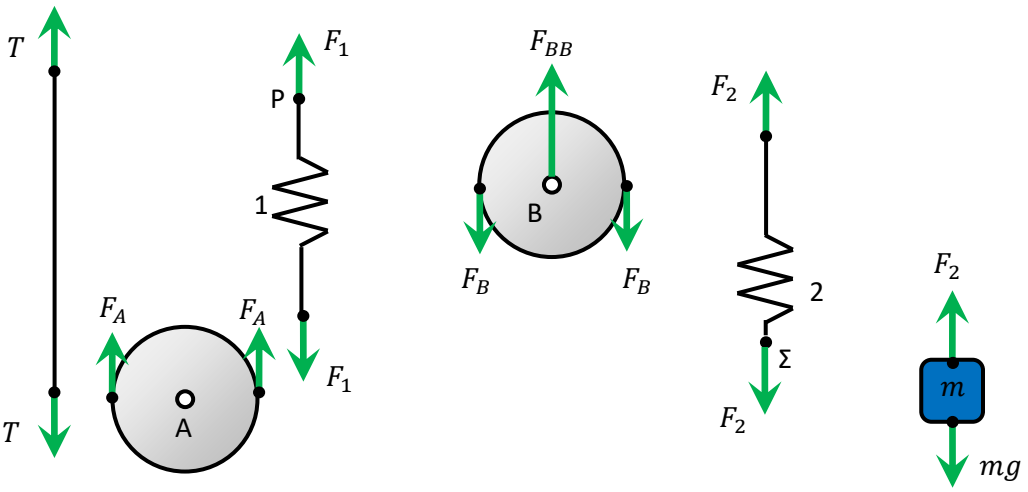


<u>Λύση</u>:

(α) Οι δυνάμεις που δραν στο κάθε σώμα ξεχωριστά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Πηγαίνοντας από δεξιά προς τα αριστερά έχουμε τα εξής:

Το βάρος mg δρα <u>στη μάζα</u> m και λόγω ισορροπίας, η δύναμη F_2 που δέχεται από το ελατήριο 2 είναι ίσες, δηλαδή

$$F_2 = mg = 20\ N$$



Το <u>ελατήριο 2</u> δεν επιταχύνεται και άρα οι δυνάμεις στα άκρα του πρέπει να είναι ίσες. Λόγω δράσης-αντίδρασης, η κάτω δύναμη στο σημείο του Σ, πρέπει να ισούται με τη δύναμη που δρα στο πάνω μέρος της μάζας και για αυτό χρησιμοποιήσαμε το ίδιο σύμβολο F_2

Στην <u>τροχαλία Β</u> ασκούνται δυο δυνάμεις απ'τις δύο τις μεριές αλλά επειδή είναι ιδανική (δηλαδή το νήμα της είναι ιδανικό) αυτές οι δυο είναι ίσες μεταξύ τους και για αυτό χρησιμοποιήσαμε το ίδιο σύμβολο F_B. Λόγω δράσης-αντίδρασης μεταξύ της τροχαλίας Β και ελατηρίου 2 θα ισχύει

$$F_B = F_2 = 20\ N$$

Η δύναμη F_{BB} είναι αυτή που ασκείται από την εγώ στην τροχαλία κι αφού αυτή ισορροπεί τότε θα ισχύει

$$F_{BB} = 2F_B = 40\ N$$

Το <u>ελατήριο 1</u> δεν επιταχύνεται και άρα οι δυνάμεις στα άκρα του πρέπει να είναι ίσες και για αυτό χρησιμοποιήσαμε το ίδιο σύμβολο F_1. Λόγω δράσης-αντίδρασης, η πάνω δύναμη στο σημείο του Ρ, πρέπει να ισούται με τη δύναμη που δέχεται από την τροχαλία Β, επομένως

$$F_1 = F_B = 20\ N$$

Στην <u>τροχαλία Α</u> ασκούνται δυο δυνάμεις απ'τις δύο τις μεριές αλλά επειδή είναι ιδανική (δηλαδή το νήμα της είναι ιδανικό) αυτές οι δυο είναι ίσες μεταξύ τους και για αυτό χρησιμοποιήσαμε το ίδιο σύμβολο F_A. Λόγω δράσης-αντίδρασης μεταξύ της τροχαλίας Α και ελατηρίου 1 θα ισχύει

$$F_A = F_1 = 20\ N$$

Τελικά η τάση στο νήμα στα αριστερά, είναι και αυτή ίση με

$$T = F_A = 20\ N$$

Επομένως όλες οι δυνάμεις κατά μήκος του νήματος είναι ίσες με το βάρος της μάζας $20\ N$.

(β) Έστω στο παρακάτω σχήμα x_1 η μετατόπιση το κάτω άκρου του ελατηρίου 1, x_Σ η μετατόπιση του σημείου Σ και x_B το μήκος του νήματος της τροχαλίας Β που ξετυλίχτηκε. Όπως έχει αναφερθεί στο μάθημα, στην περίπτωση της τροχαλίας με στερεωμένο το ένα τμήμα του νήματος του, το άλλο τμήμα του νήματος κινείται με ταχύτητα διπλάσια του κέντρου της τροχαλίας και έτσι συμπεραίνουμε ότι

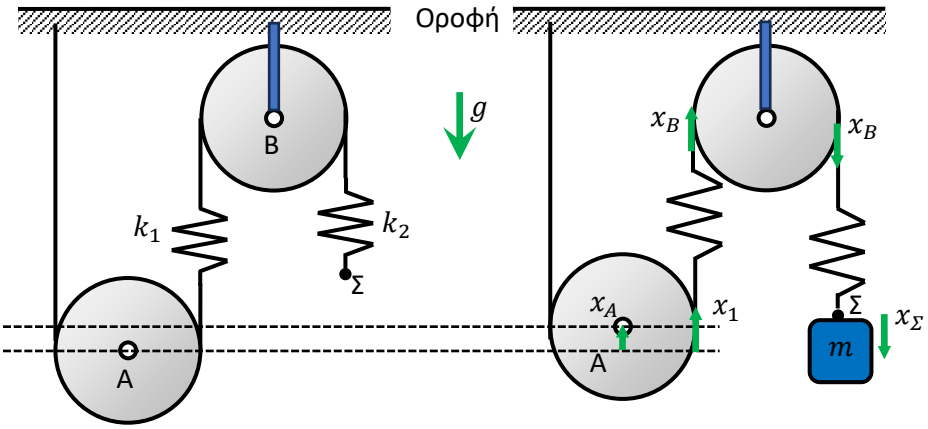
$$x_1 = 2x_A = 0.2\ m$$

(είναι σαν να εκτελεί κύλιση η τροχαλία Α επάνω στο αριστερό τμήμα του νήματος που είναι ακίνητο). Η συνολική παραμόρφωση του ελατηρίου 1 είναι ίση με

$$\Delta x_1 = x_B - x_1$$

και ομοίως αυτή του ελατηρίου 2

$$\Delta x_2 = x_\Sigma - x_B$$



Νόμος ελατηρίου

$$F_1 = k_1 \Delta x_1 => 20 = 100(x_B - 0.2)$$

$$F_2 = k_2 \Delta x_2 => 20 = 200(x_\Sigma - x_B)$$

Λύνοντας την πρώτη $x_B = 0.4\ m$ που είναι το μήκος που ξετυλίχθηκε το νήμα στην τροχαλία Β.

(γ) Αντικαθιστώντας το παραπάνω αποτέλεσμα στη δεύτερη εξίσωση μας δίνει

$$20 = 200(x_\Sigma - 0.4)$$

η οποία λύνεται με $x_\Sigma = 0.5\ m$ που είναι η μετατόπιση του σημείου Σ προς τα κάτω.