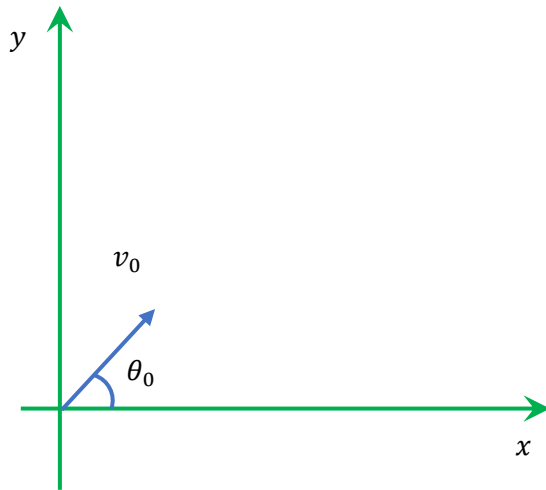


ΒΟΛΕΣ

Εκτόξευση μιας σημειακής μάζας με τυχαία αγωγή και τυχαία ταχύτητα μέσα σε πεδίο βαρύτητας.



Την αρχική ταχύτητα την αναλύουμε σε συνιστώσες

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0$$

Αυτές είναι οι αρχικές συνθήκες μαζί με τις

$$x = 0$$

$$y = 0$$

στο $t = 0$. Η μόνη πληροφορία που έχουμε είναι ότι βρισκόμαστε μέσα σε πεδίο βαρύτητας για επιτάχυνση του σώματος ισούται με

$$\vec{a} = (0, -g)$$

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σώματος και η ταχύτητά του σε τυχαίο χρόνο t μετά την εκτόξευση

Με ολοκλήρωση έχουμε

$$v_x = c_1$$

$$v_y = -gt + c_2$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$v_x = v_{0x}$$

$$v_y = -gt + v_{0y}$$

Ολοκληρώνουμε και δεύτερη φορά έχουμε

$$x = v_{0x}t + c_3$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + c_4$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$x = v_{0x}t$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t$$

να βρεθεί η τροχιά του κινητού. Από την πρώτη λύνω ως προς χρόνο και αντικαθιστώ στη δεύτερη

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 + v_{0y}\frac{x}{v_{0x}}$$

ή

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + \tan \theta x$$

Εξίσωση παραβολής. Ρίζες $y = 0$ η προφανής $x = 0$ και

$$0 = \left(-\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} x + \tan \theta\right) x$$

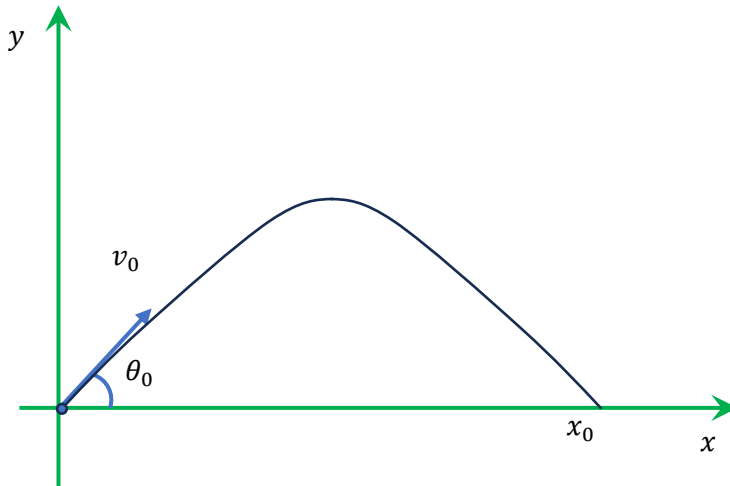
Δεύτερη

$$\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} x = \tan \theta$$

ή

$$x_0 = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos \theta_0 \sin \theta_0$$

Βεληνεκές (πόσο μακριά θα φτάσει)



Στο μέγιστο σημείο η εφαπτομένη είναι οριζόντια και αφού είπαμε ότι η ταχύτητα πάντα έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς, συνεπάγεται ότι έχει μόνο οριζόντια συνιστώσα, δηλαδή

$$v_y = 0$$

Εφαρμόζω αυτή τη συνθήκη στις εξισώσεις που βρήκα και έχω

$$0 = -gt + v_{0y}$$

ή

$$t_m = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0}{g} \sin \theta_0$$

Το μέγιστο ύψος μπορεί να βρεθεί με την αντικατάσταση του παραπάνω χρόνου στην εξίσωση του y

$$y_m = -\frac{1}{2}gt_m^2 + v_{0y}t_m$$

$$y_m = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 + v_{0y}\frac{v_{0y}}{g}$$

$$y_m = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

Παρέλειψα να συζητήσω λίγο τις παραμέτρους που επηρεάζουν το βεληνεκές

$$x_0 = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos \theta_0 \sin \theta_0$$

Όμως $\sin(2\theta_0) = 2\cos\theta_0\sin\theta_0$. Βάσει αυτής της τριγωνομετρικής ταυτότητας

$$x_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta_0)$$

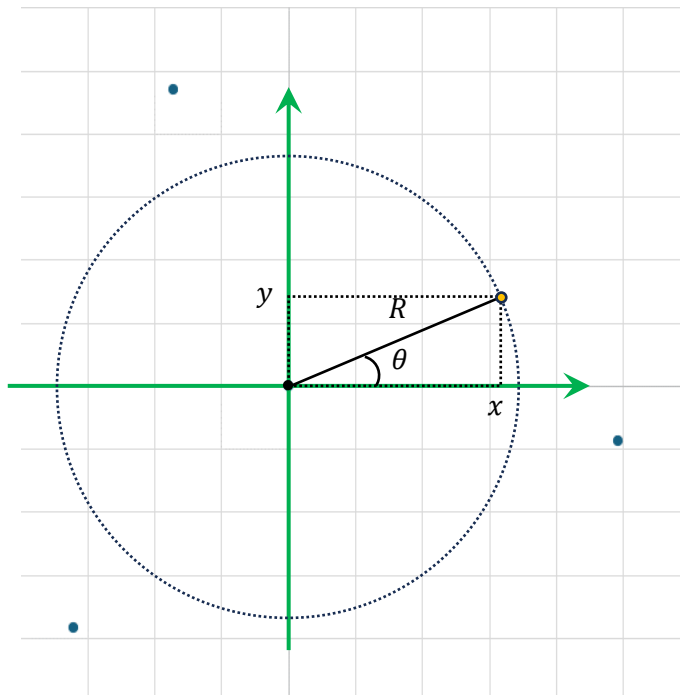
ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Σε κίνηση το κινητό είναι περιορισμένο να κινείται πάνω σε κύκλο οπότε υπόκειται στον περιορισμό $|\vec{r}| = R$

Σε τυχαίο χρόνο t βρίσκεται με γωνία θ ως προς τον άξονα x και άρα οι συντεταγμένες του δίνονται από τις

$$x = R\cos\theta$$

$$y = R\sin\theta$$



Για ομαλή κυκλική κίνηση $\theta = \omega t$ αλλά για τυχαία κίνηση το θ είναι γενικά μια τυχαία συνάντηση του χρόνου. Το μόνο που παίρνουμε γνωστό είναι η αρχική συνθήκη

$$\theta(0) = 0$$

Οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι οι (με παραγωγή των x και y)

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(R\cos\theta(t)) = -R\sin\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(R\sin\theta(t)) = R\cos\theta \frac{d\theta}{dt}$$

Ορίζω τη γωνιακή ταχύτητα

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

και έχουμε

$$v_x = -\omega R \sin \theta$$

$$v_y = \omega R \cos \theta$$

Να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος της ταχύτητας με το διάνυσμα θέσης σε τυχαία γωνία θ

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = x v_x + y v_y = 0$$

Ερμηνεία, από τον αρχικό τύπο

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = |\vec{r}| |\vec{v}| \cos \varphi = R \omega R \cos \varphi$$

$$\text{άρα } \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi/2 \Rightarrow$$

επομένως η ταχύτητα και το διάνυσμα θέσης είναι κάθετα μεταξύ τους το οποίο είναι γνωστό γιατί σε ένα κύκλο εφαπτομένη είναι κάθετη στην ακτίνα