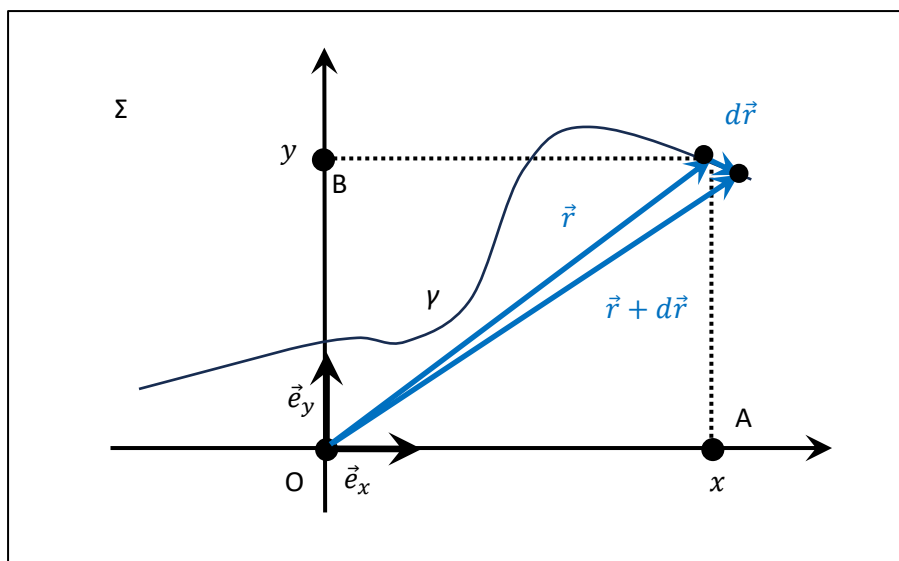


Είδαμε εχθές



Το διάνυσμα $d\vec{r}$ ενώνει δυο σημεία της τροχιάς που βρίσκονται απειροστά κοντά. Στο όριο όπου $dt \rightarrow 0$,

το διάνυσμα αυτό γίνεται εφαπτόμενο της τροχιάς.

Από τον ορισμό της ταχύτητας

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{dt} d\vec{r}$$

Επομένως η ταχύτητα $\vec{v}$ είναι ομόρροπή με το $d\vec{r}$ και άρα είναι και αυτή η εφαπτόμενη στην τροχιά. Κατά μέτρο

$$v = \frac{dr}{dt}$$

Είδαμε ότι ταχύτητα έχει συνιστώσες

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

Όπως και με τη μία διάσταση έτσι και εδώ ορίζω τις αντίστοιχες επιταχύνσεις

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

Παράδειγμα 2.4

Ένα υλικό σημείο κινείται έτσι ώστε οι συντεταγμένες του συναρτήσει του χρόνου να δίνονται από τις εκφράσεις $x(t) = b + ct$ και $y(t) = kt$ όπου $b = 3 \text{ m}$, $c = 0.6 \text{ m/s}$ και $k = 1.2 \text{ m/s}$.

Να βρεθούν (α) Το διάνυσμα και το μέτρο της ταχύτητας του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t (β) Το διάνυσμα και το μέτρο της επιτάχυνσης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t και (γ) Το είδος της τροχιάς που διαγράφει το κινητό.

Λύση:

(α)

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(b + ct) = c = 0.6 \text{ m/s}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(kt) = k = 1.2 \text{ m/s}$$

Επομένως το διάνυσμα της ταχύτητας είναι το

$$\vec{v} = (0.6, 1.2) = 0.6(1, 2) \text{ m/s}$$

$$\vec{v} = 0.6\vec{e}_x + 1.2\vec{e}_y = 0.6(\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \text{ m/s}$$

Μέτρο

$$v = 0.6\sqrt{1^2 + 2^2} = 0.6\sqrt{5} \text{ m/s}$$

(β) Οι συνιστώσες της επιτάχυνσης είναι

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dc}{dt} = 0$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{dk}{dt} = 0$$

Η επιτάχυνση είναι το μηδενικό διάνυσμα με μηδενικές συνιστώσες και άρα μηδενικό μέτρο

(γ) Για να βρω την τροχιά, απαλείψω τον χρόνο t Από τις εξισώσεις που δίνουν τις θέσεις του κινητού

$$x(t) = b + ct \text{ και } y(t) = kt$$

Από τη δεύτερη

$$t = \frac{y}{k}$$

Και όταν την αντικαταστήσουμε στην πρώτη

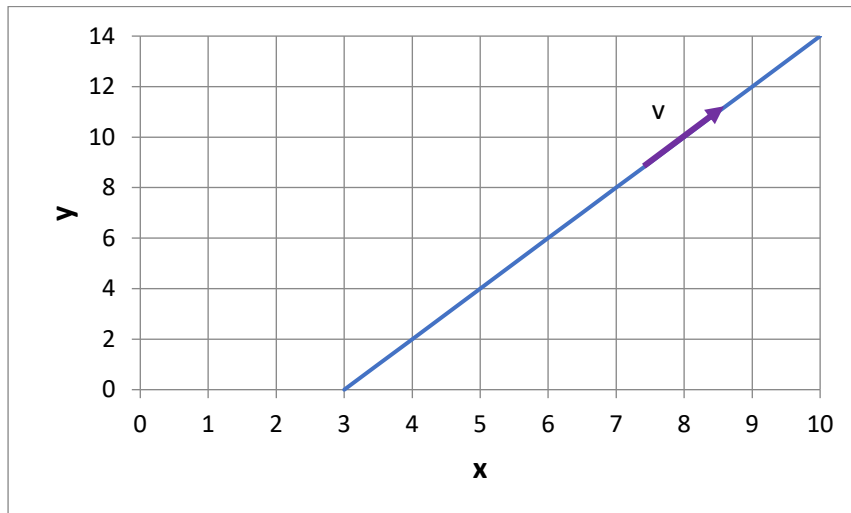
$$x = b + \frac{c}{k}y$$

Λύνω ως προς y

$$y = \frac{k}{c}(x - b)$$

$$y = 2(x - 3)$$

Ευθεία με κλίση 2 η οποία τέμνει τον άξονα x στο 3



Παράδειγμα 2.6 Ένα υλικό σημείο Σ εκτελεί αρμονική ταλάντωση πλάτους x_m και κυκλικής συχνότητας ω ως προς x και ελεύθερη πτώση ως προς y . Εάν την χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και η κατακόρυφη ταχύτητά του είναι μηδέν, να βρεθούν
(α) Οι συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας του κινητού κάθε χρονική στιγμή t , (β) Οι συνιστώσες του διανύσματος της επιτάχυνσης του κινητού κάθε χρονική στιγμή t και (γ) Η τροχιά που διαγράφει το κινητό στην περίπτωση που $x_m = 0.2 \text{ m}$ και $\omega = 3.14 \text{ rad/s}$. Έστω $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ για ευκολία.

Λύση:

Αφού στο $t = 0$ μας δίνεται ότι το κινητό βρίσκεται στην αρχή των αξόνων τότε η ταλαντωτική κίνηση στον άξονα x περιγράφεται από την εξίσωση

$$x = x_m \sin \omega t$$

Κατά y έχουμε σταθερή επιτάχυνση

$$a_y = -g$$

Ολοκληρώνω για να βρω την ταχύτητα

$$v_y = -gt + v_y(0)$$

Αφού στο $t = 0$ κατακόρυφη ταχύτητά του είναι μηδέν

$$v_y(0) = 0$$

και

$$v_y = -gt$$

Ξανά ολοκληρώνω για να βρω το y

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y(0)$$

αφού το κινητό ξεκινάει από την αρχή των συντεταγμένων $y(0) = 0$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2$$

Τροχιά, απαλείφω τον χρόνο Από την παραπάνω και αντικαθιστώ στο x

$$t = \sqrt{-\frac{2y}{g}}$$

και άρα

$$x = x_m \sin \left[\omega \sqrt{-\frac{2y}{g}} \right]$$

$$x = x_m \sin \left[\omega \sqrt{\frac{2}{g}} (-y)^{1/2} \right]$$

$$x = x_m \sin \left[\omega \sqrt{\frac{2}{-gy}} (-y) \right]$$

