

1.13 Ένα υλικό σημείο κινείται στη μια διάσταση έτσι ώστε η απομάκρυνσή του να περιγράφεται από την εξίσωση $x(t) = x_m e^{-bt} \cos(\omega t)$ όπου $x_m = 2 \text{ m}$, $b = 0.5 \text{ s}^{-1}$ και $\omega = 2\pi \text{ rad/s}$ αντίστοιχα. (α) Να βρεθεί η στιγμιαία ταχύτητα και επιτάχυνση του κινητού. (β) Να σχεδιασθεί η γραφική παράσταση $x - t$ για χρόνους από 0 έως 5 s. (γ) Από την κλίση της γραφικής παράστασης να βρεθεί το πρόσημο της ταχύτητας του κινητού στα 3 πρώτα μηδενικά της γραφικής παράστασης. (δ) Να επαληθευτεί το προηγούμενο αποτέλεσμα από την έκφραση της στιγμιαίας ταχύτητας που βρήκατε στο β παραπάνω. (ε) Να σχολιασθεί το είδος της κίνησης για $t \rightarrow \infty$.

... ΣΥΝΕΧΕΙΑ από το ερώτημα β από την προηγούμενη φορά

(β) Ποιοτική γραφική παράσταση

Ρίζες, το εκθετικό δεν έχει ρίζες, έχει μόνο το συνημίτονο, μηδενίζει εκεί όπου

$$\omega t = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

Δίνεται

$$\omega = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Αντικαθιστώ στην παραπάνω

$$2\pi t = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$t = \frac{1}{4} + \frac{n}{2}$$

Για $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

n	t
0	0.25
1	0.75
2	1.25
3	1.75

... $t = 0.25, 0.75, 1.25 \dots 4.75$

Λόγω της φθίνουσας συμπεριφοράς του εκθετικού αλλά και το ότι έχω συνημίτονο, περιμένω στο $t = 0$ να έχουμε μέγιστο, παίρνω το x

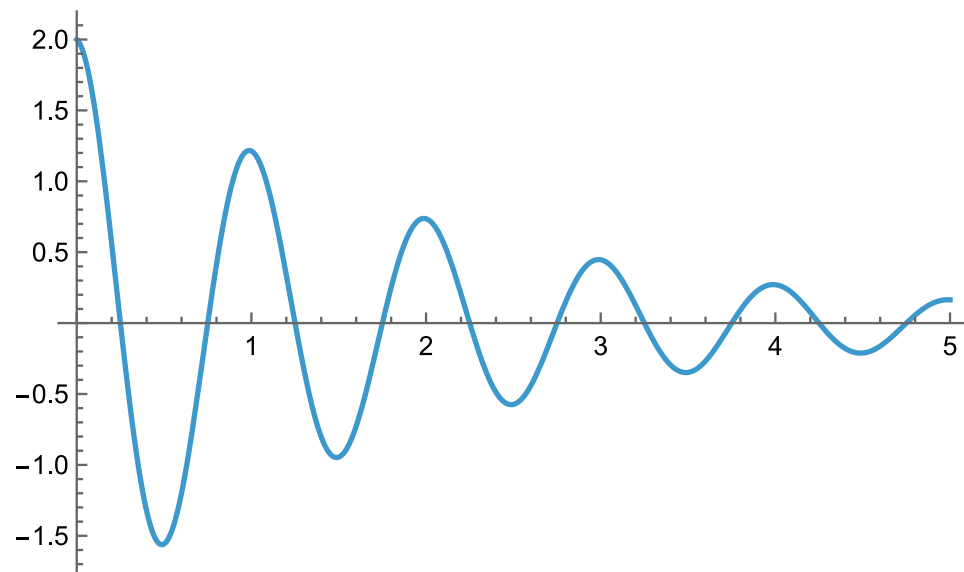
$$x(t) = 2e^{-0.5t} \cos(2\pi t)$$

(αντικατέστησα $x_m = 2 \text{ m}$, $b = 0.5 \text{ s}^{-1}$ και $\omega = 2\pi \text{ rad/s}$) και θέτω $t = 0$

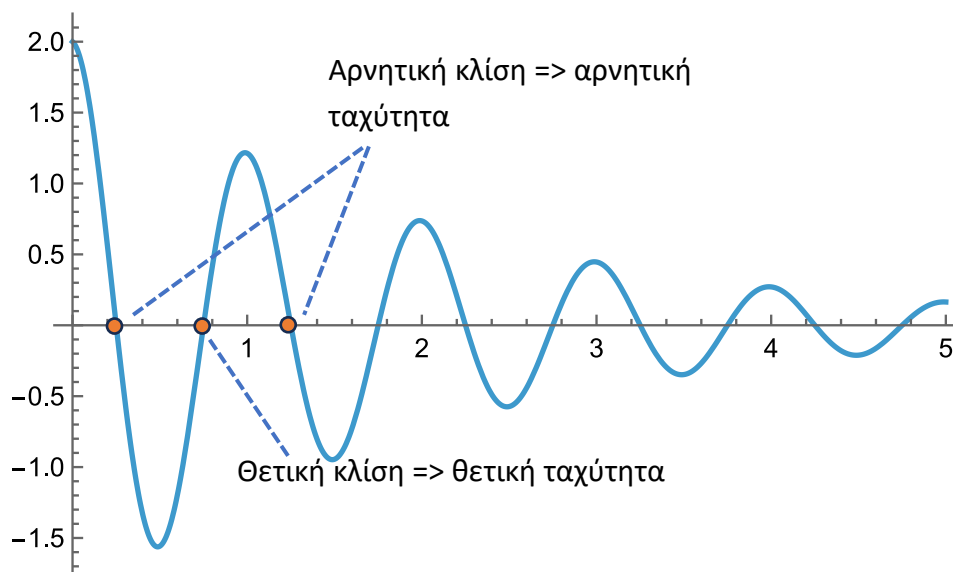
$$x(0) = 2e^{-0} \cos(0) = 2$$

Τελευταία τιμή

$$x(5) = 2e^{-2.5} \cos(10\pi) = 0.16$$



(γ) Αφού η ταχύτητα είναι ίση με την παράγωγο της απομάκρυνσης, και η παράγωγος στα μαθηματικά είναι ίση με την τοπική κλίση, έχουμε το εξής στα 3 σημεία



(δ) Αφήνεται ως άσκηση. (ε) Εδώ έχω πλήρη ακινησία επειδή

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v = 0$$

αλλά και η επιτάχυνση a η οποία επίσης περιλαμβάνει τον εκθετικό όρο (αφήνεται ως άσκηση)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a = 0$$

1.15 Σημειακό σώμα Α κινείται με σταθερή ταχύτητα $v = -5 \text{ m/s}$ για $t \leq 0$. Στο $t = 0$ και ενώ το κινητό βρίσκεται στο $x = 0$ εφαρμόζεται επιτάχυνση $a = 2\pi \cos(c_1 t)$ όπου $c_1 = \pi \text{ rad/s}$. Να βρεθεί η απομάκρυνση του Α κατά την χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$.

Λύση:

Ολοκληρώνω την δεδομένη έκφραση της επιτάχυνσης για να βρω την ταχύτητα

$$v = \int a \, dt = 2\pi \int \cos(c_1 t) \, dt =$$

$$2\pi \int \cos(c_1 t) \frac{1}{c_1} d(c_1 t)$$

Θέτω $\varphi = c_1 t$

$$v = \frac{2\pi}{c_1} \int \cos \varphi d\varphi = \frac{2\pi}{c_1} \sin \varphi + c_2$$

Όπου η c_2 είναι η σταθερά ολοκλήρωσης. Αντικαθιστώ τα δεδομένα και επαναφέρω το χρόνο στην παραπάνω σχέση

$$v(t) = 2\sin(\pi t) + c_2$$

Από τις αρχικές συνθήκες $v(0) = -5 \Rightarrow c_2 = -5$ και έτσι

$$v(t) = 2\sin(\pi t) - 5$$

Ολοκληρώνουμε ακόμη μία φορά για να βρούμε την απομάκρυνση

$$x(t) = \int v dt = \int [2\sin(\pi t) - 5] dt =$$

$$2 \int \sin(\pi t) dt - \int 5 dt =$$

$$\frac{2}{\pi} \int \sin(\pi t) d(\pi t) - 5 \int dt \Rightarrow$$

$$x(t) = -\frac{2}{\pi} \cos(\pi t) - 5t + c_3$$

Εφαρμόζω την αρχική συνθήκη $x(0) = 0$ και παίρνω

$$0 = -\frac{2}{\pi} + c_3$$

ή

$$c_3 = \frac{2}{\pi}$$

Επομένως

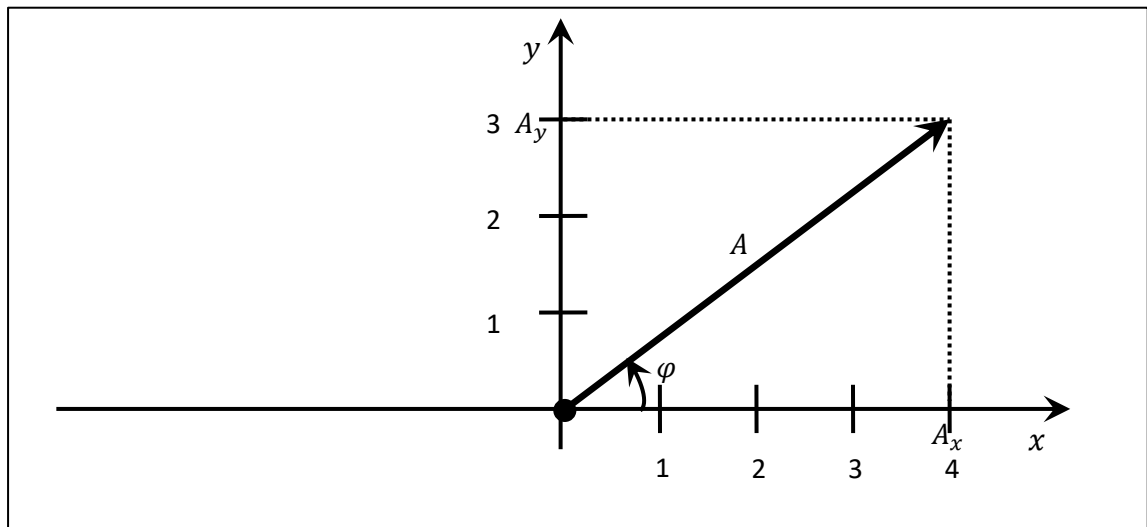
$$x(t) = \frac{2}{\pi} [1 - \cos(\pi t)] - 5t$$

Για να βρω το ζητούμενο αντικαθιστώ το δεδομένο χρόνο $t = 2 s$

$$x(2) = \frac{2}{\pi} [1 - \cos(2\pi)] - 5 \times 2 = -10 m$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΙΣ 2 ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Μαθηματική επανάληψη στα διανύσματα



Είναι ευκολότερο να μεταφέρουμε το διάνυσμα ούτως ώστε η αρχή του να συμπίπτει με την αρχή των αξόνων. Τότε, οι συντεταγμένες του περάματος (του τέλους) του διανύσματος είναι και συνταγμένες του διανύσματος