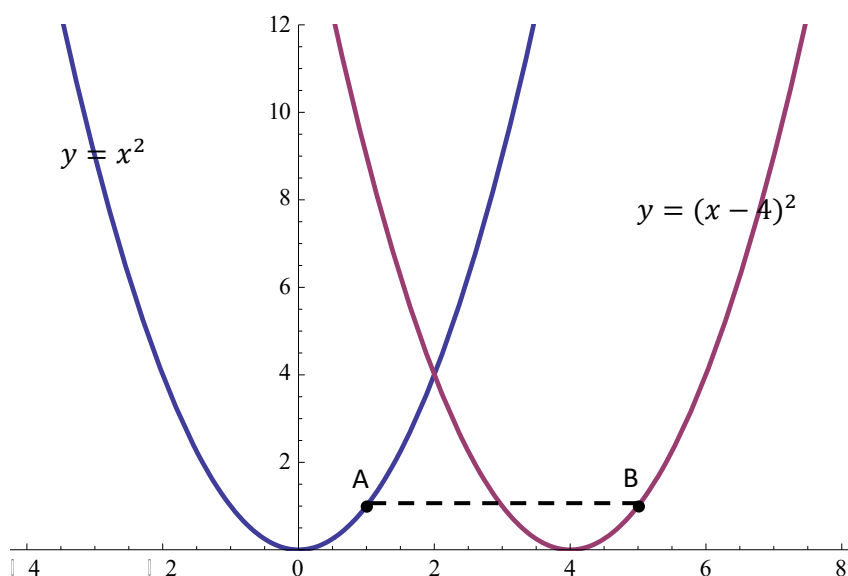


Μαθηματική Περιγραφή του Κύματος

Είχαμε πει εχθές ότι εάν πάρουμε μια μαθηματική συνάρτηση και αφαιρέσουμε μια ποσότητα Δx από το x της συνάντησης τότε αυτή μετατοπίζεται οριζοντίως δεξιά κατά Δx



Το κύμα πάντα μετακινείται με σταθερή ταχύτητα επειδή η ταχύτητά του εξαρτάται από το μέσο και εάν δεν αλλάξει μέσο, δεν αλλάζει ταχύτητα. Επομένως, από την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση έχουμε ανά πάσα στιγμή

$$\Delta x = vt$$

Εάν γνωρίζω τη συνάρτηση που περιγράφει τη μορφή του κύματος $y = f(x)$ στο $t = 0$ τότε μπορώ να την ξέρω ανά πάσα χρονική στιγμή, για κάθε $t > 0$, ως εξής

$$y(x, t) = f(x - \Delta x) = f(x - vt)$$

Αυτό ονομάζεται μαθηματική περιγραφή του κύματος, επίσης γνωστό και ως εξίσωση του κύματος.

Παράδειγμα 12.1

Χορδή βρίσκεται τανυσμένη επάνω στον άξονα x . Ξαφνικά ένα κύμα σε μορφή παλμού διαδίδεται επάνω σε αυτή προς τα δεξιά με ταχύτητα $v = 2 \text{ m/s}$ έτσι ώστε τα μέρη της να ταλαντεύονται κατακόρυφα όταν ο παλμός περνάει από αυτά. Εάν στο $t = 0$ ο παλμός περιγράφεται από την εξίσωση $y = 20e^{-0.5x^2}$, να βρεθεί η κατακόρυφη απόσταση από τον άξονα x ενός σημείου της χορδής το οποίο βρίσκεται στο $x = 3.5$ κατά τις χρονικές στιγμές $t = 0, 1, 2, 3$ (όλες οι μονάδες σε S.I.).

Λύση:

Στο $t = 0$ ο παλμός περιγράφεται από την συνάρτηση

$$y(x, 0) = 20e^{-0.5x^2}$$

Για κάθε χρονική στιγμή

$$y(x, t) = 20e^{-0.5(x-vt)^2}$$

$$y(x, t) = 20e^{-0.5(x-2t)^2}$$

(κίνηση προς τα δεξιά, εάν είχα προς τα αριστερά θα αντικαθιστούσα $x \rightarrow x + vt$). Το y περιγράφει την κατακόρυφη απόσταση των μορίων της χορδής και είναι αυτό που ζητάω. Πρέπει να το υπολογίσω για σταθερό $x = 3.5$ σε διάφορες χρονικές στιγμές $t = 0, 1, 2, 3$

$$y(3.5, t) = 20e^{-0.5(3.5-2t)^2}$$

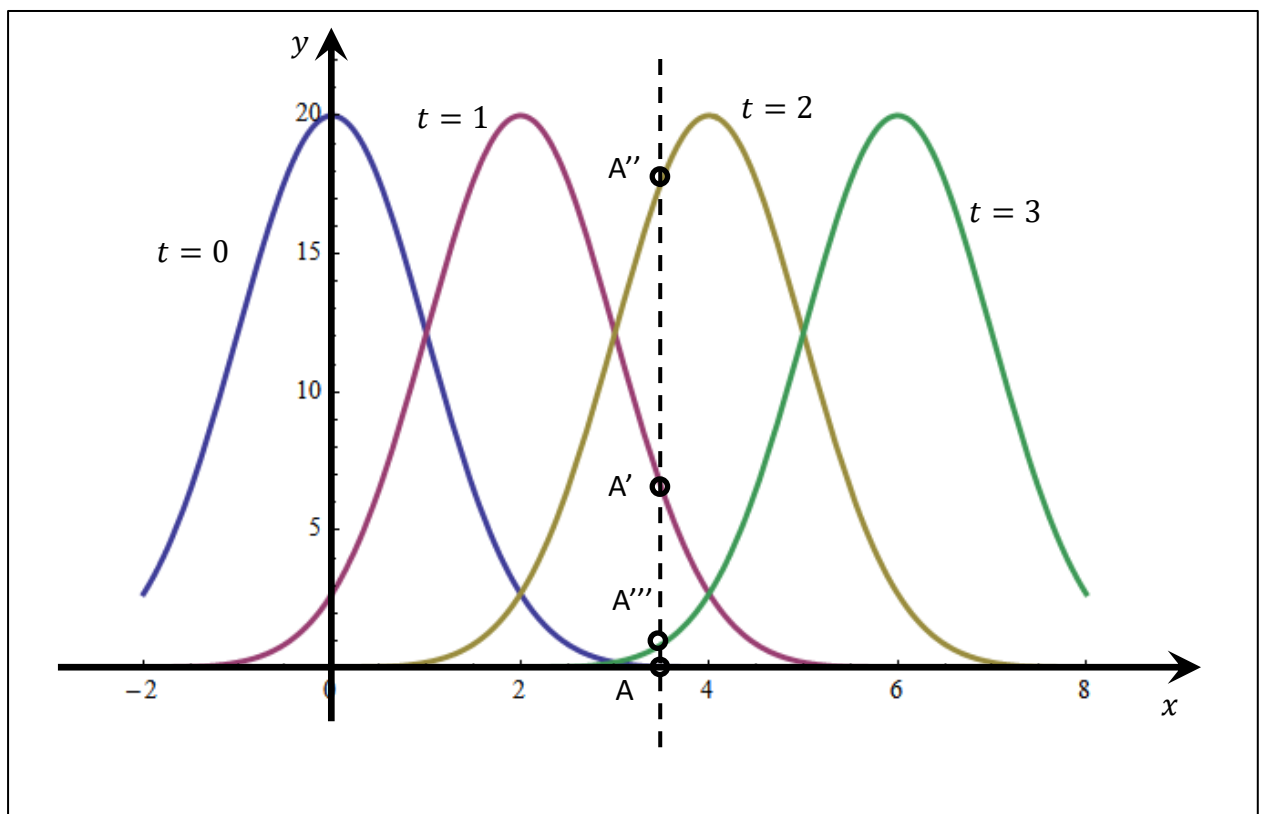
για $t = 0, 1, 2, 3$

$$y(3.5, 0) = 0.04$$

$$y(3.5, 1) = 6.5$$

$$y(3.5, 2) = 17.6$$

$$y(3.5, 3) = 0.9$$



Αρμονικά κύματα.

Δημιουργούνται όταν η πηγή εκτελεί ταλάντωση κυκλικής συχνότητας ω . Η αντίστοιχη συνάρτηση που παράγουν είναι ένα ημίτονο δηλαδή στο $t = 0$ έχουμε

$$y(x, 0) = A \sin kx$$

όπου k μια σταθερά. Σύμφωνα με αυτά που είπαμε για χρόνους $t > 0$ θα έχουμε

$$y(x, t) = A \sin(k(x - vt))$$

ή

$$y(x, t) = A \sin(kx - kvt)$$

Έστω ότι η πηγή είναι στο $x = 0$. Εκεί έχουμε

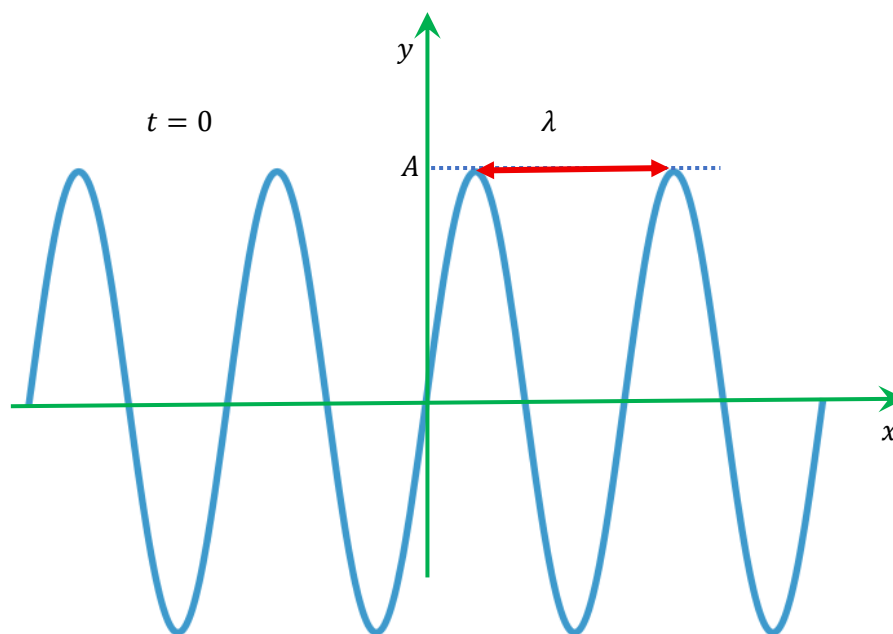
$$y(0, t) = A \sin(-kvt) = -A \sin(kvt)$$

Εξίσωση ταλαντωτή $\Rightarrow \omega = kv$

Επιστρέφω στο στιγμιότυπο $t = 0$

$$y(x, 0) = A \sin kx$$

Γραφική παράσταση



Η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών μεγίστων σε ένα στιγμιότυπο του κύματος ονομάζεται μήκος κύματος και τη συμβολίζουμε με το γράμμα λ και είναι πολύ σημαντική ποσότητα στα αρμονικά κύματα όπως είναι και η συχνότητα ω

Αποδεικνύεται ότι

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

γνωστό ως «κυματάριθμος», αντίστοιχο του

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Έτσι, η γενική μορφή ενός αρμονικού κύματος είναι η

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

όπου $\omega = kv$, ονομάζεται θεμελιώδης κυματική εξίσωση, εναλλακτική μορφή

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\lambda} v \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T}$$

ή

$$v = \lambda f$$

Παράδειγμα 12.3

Ένας ψαράς που στέκεται κοντά στην αποβάθρα παρατηρεί κάποια κύματα της θάλασσας τα οποία κτυπούν ένα κατακόρυφο πάσσαλο. Μετράει ότι σε ένα λεπτό πέφτουν στον πάσσαλο 40 κύματα. Επίσης παρατηρεί ότι ένα από τα κύματα χρειάστηκε 5 δευτερόλεπτα για να καλύψει την απόσταση από την πλώρη της αγκυροβολημένης βάρκας του έως τον πάσσαλο που γνωρίζει ότι είναι ίση με 10 μέτρα. Εάν προσεγγίσουμε το κύμα της θάλασσας με ημιτονοειδή κυματομορφή, ποιο θα είναι το μήκος κύματός της;

Λύση:

Χτυπάνε $N = 40$ κύματα τον πάσσαλο σε ένα λεπτό $\Rightarrow$

$$f = \frac{N}{\Delta t} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3} \text{ Hz}$$

Από το γνωστό μήκος των 10 m που κινήθηκε το κύμα, υπολογίζει την ταχύτητά του

$$v = \frac{10}{5} = 2 \frac{m}{s}$$

Από τη θεμελιώδη κυματική σχέση

$$v = \lambda f$$

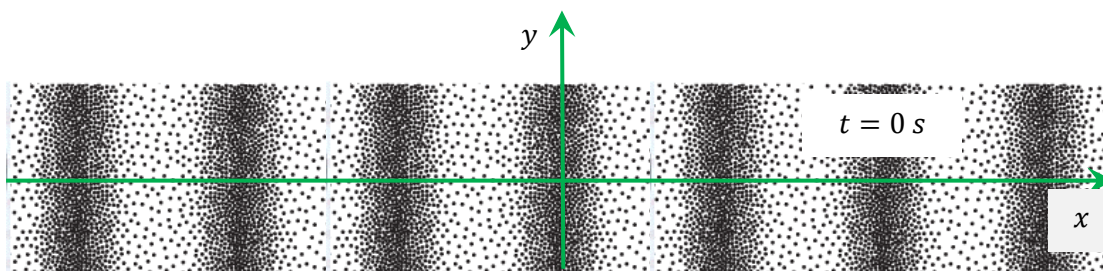
έχουμε

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3 \text{ m}$$

Παράδειγμα 12.2

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το στιγμιότυπο $t = 0 \text{ s}$ της μετάδοσης ενός μηχανικού αρμονικού κύματος συχνότητας 12 kHz κατά μήκος του θετικού άξονα x σε μια επίπεδη επιφάνεια, όπου οι κουκίδες αναπαριστούν τα μόρια της επιφάνειας τα οποία πάλλονται γύρω από τις θέσεις ισορροπίας τους. Οι σκούρες περιοχές αντιστοιχούν σε μεγάλη πυκνότητα των μορίων (συνωστισμός). Πριν από τη διέλευση του κύματος δεν υπήρχαν τέτοιες περιοχές και η κατανομή των μορίων ήταν ομοιογενής. Βρείτε όλα τα χαρακτηριστικά του κύματος εάν γνωρίζετε τα εξής: (α) Τα μέσα των δυο ακραίων σκούρων περιοχών στο σχήμα απέχουν κατά x απόσταση $12 \mu\text{m}$ και (β) στο $1/4$ της απόστασης μεταξύ της κεντρικής

σκούρας περιοχής στο $x = 0$ και της αμέσως επόμενης στα δεξιά, η απομάκρυνση των μορίων από την θέση ισορροπίας τους είναι ίση με $0.2 \mu m$.

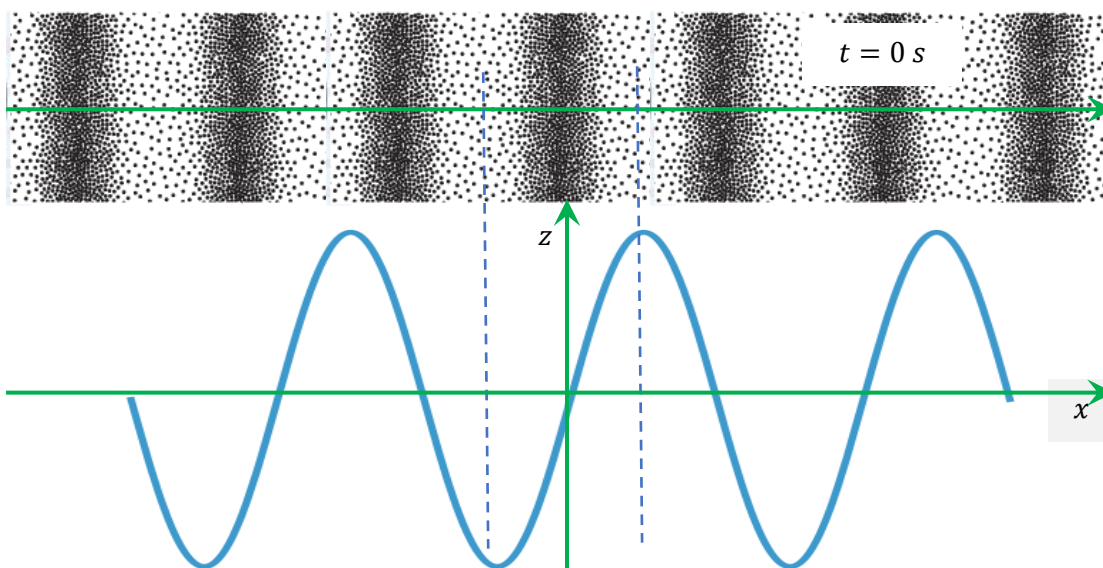


Λύση:

Περιγράφοντας τις απομακρύνσεις των μορίων με την μεταβλητή z (μετακίνηση δεξιά-αριστερά) τότε εάν υποθέσω αρμονικό κύμα

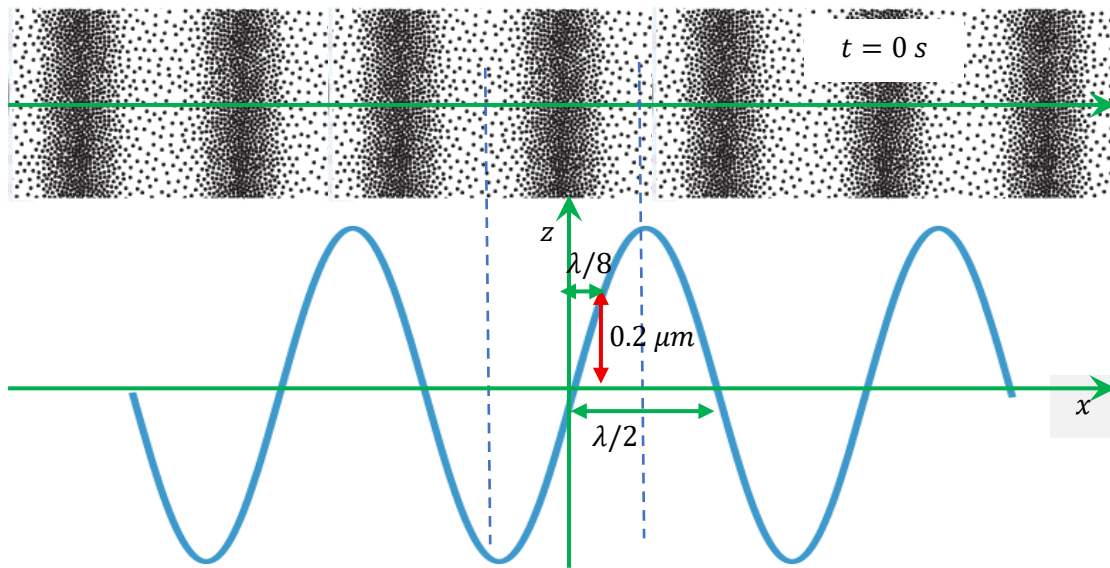
$$z = A \sin(kx - \omega t)$$

η γραφική του παράσταση σε συνδυασμό με το δεδομένο στιγμιότυπο, θα έχει την εξής μορφή:



Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι η απόσταση μεταξύ 2 λευκών περιοχών ή εναλλακτικά μεταξύ 2 σκούρων περιοχών είναι μισό μήκος κύματος $\lambda/2$. Αυτό σημαίνει ότι η απόσταση μεταξύ των 2 ακραίων σκούρων περιοχών είναι ίση με 3λ γιατί στο ενδιάμεσο υπάρχουν 6 περιοχές και έτσι

$$3\lambda = 12 \Rightarrow \lambda = 4 \mu m$$



Στο δεδομένο σημείο

$$z = A \sin(kx - \omega t)$$

Γνωστά $t = 0, x = \lambda/8 = 0.5 \mu m, k = 2\pi/\lambda = \dots$

$z = 0.2 \mu m \Rightarrow$ Βρίσκω πλάτος $A = 0.283 \mu m$

$$\omega = 2\pi f = 75.4 \text{ krad/s}$$

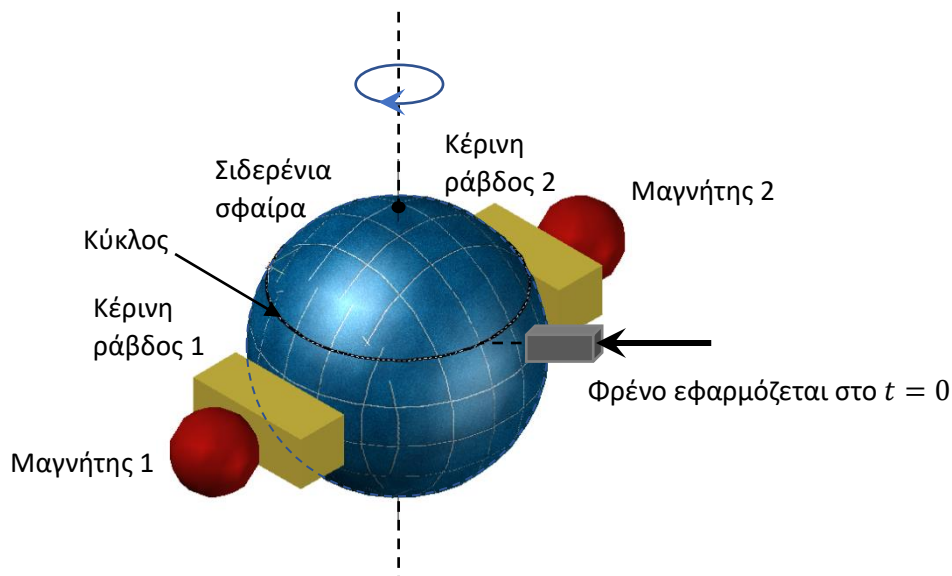
Μπορούμε να βρούμε και την ταχύτητα του κύματος

$$v = \lambda f = 0.48 \text{ m/s}$$

αγνώστου φοράς

- Θα σταματήσουμε εδώ με τα κύματα και θα λύσουμε ένα παράδειγμα που το αφήσαμε μισό στη διάλεξη 23

Δυο όμοιοι μαγνήτες ακτίνας r και μάζας m είναι προσκολλημένοι σε μια σφαίρα ακτίνας $R = 3r$ και μάζας m , αντιδιαμετρικά μεταξύ τους με τη βοήθεια δυο κέρινων ράβδων πάχους $\delta = 2r$ και αμελητέας μάζας η καθεμία. Το όλο σύστημα περιστρέφεται ελεύθερα με γωνιακή ταχύτητα ω_1 . Ξαφνικά στο $t = 0$ οι δυο κέρيني ράβδοι λιώνουν αλλά οι δυο μαγνήτες απλά πλησιάζουν. Την ίδια στιγμή, ένα φρένο εφαρμόζεται σε ακτίνα $10r/14$ με σταθερή δύναμη τριβής T . Να βρεθεί ο χρόνος που χρειάζεται να έρθει το σύστημα σε πλήρη ηρεμία μετά το $t = 0$.



Λύση:

Έχω 2 φάσεις σε αυτό το πρόβλημα, η πρώτη φάση I όπου λιώνουν τα κεριά και πλησιάζουν οι μαγνήτες, κατά την οποία στο σύστημα δεν εφαρμόζονται εξωτερικές δυνάμεις και άρα μπορώ να εφαρμόσω την αρχή διατήρησης της στροφορμής $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$. Στη δεύτερη φάση II εφαρμόζεται φρένο στο σύστημα και άρα πλέον δεν διατηρείται η στροφορμή αλλά από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στην περιστροφή μπορώ να βρω επιτάχυνση και τα λοιπά έτσι και να θέσω $\omega = 0$ μια λύσω το πρόβλημα

$$I_1 = 2I_r + I_R = 2\left(\frac{2}{5}mr^2 + md^2\right) + \frac{2}{5}MR^2$$

$$I_2 = 2I_{r'} + I_R = 2\left(\frac{2}{5}mr^2 + md'^2\right) + \frac{2}{5}MR^2$$

Αλλάζει το d λόγω απουσίας των κέρινων ράβδων

$$d = r + 2r + R$$

$$d' = r + R$$

Μην ξεχάσετε: Μάθημα αναπλήρωσης αλλά τελευταίο !!! αύριο Παρασκευή 2-4 μμ

Πρόοδος 16/1 Παρασκευή