

Για την πρόοδο έχουμε τα κεφάλαια 4 6 8. Θα προσπεράσω για τώρα το κεφάλαιο 9 που είναι η στροφορμή και θα ξεκινήσω με το κεφάλαιο 10 (θα επανέλθω στο 9 αργότερα).

ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗ

Κέντρο μάζας – Ορισμός

- Σημειακές μάζες
- Στερεό

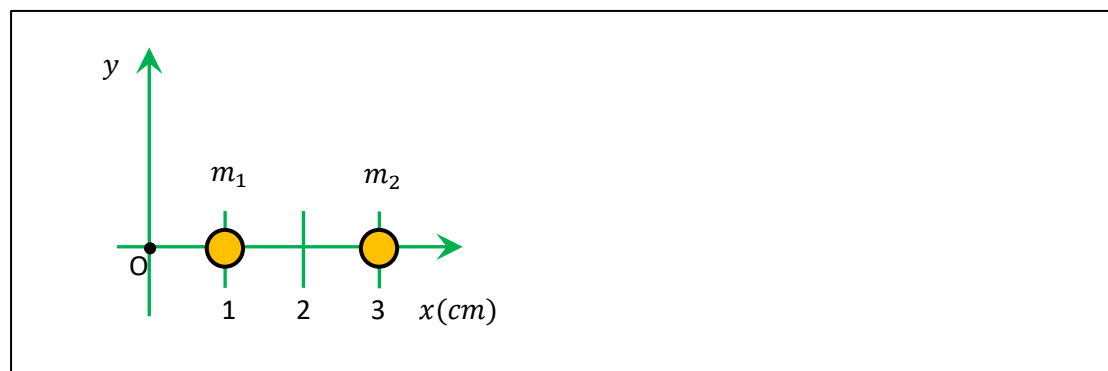
Κέντρο μάζας συστήματος σημειακών μαζών. Αν έχω ένα σύνολο N σημειακών μαζών $m_1, m_2, m_3 \dots m_N$ με συντεταγμένες $x_1, x_2, x_3 \dots x_N$ και $y_1, y_2, y_3 \dots y_N$ αντίστοιχα τότε το κέντρο μάζας έχεις τεταγμένες

$$x_{KM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_N x_N}{M}$$
$$y_{KM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots + m_N y_N}{M}$$

όπου $M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_N$ η συνολική μάζα του συστήματος

Παράδειγμα 10.2

Στο παρακάτω σχήμα, να βρεθούν οι συντεταγμένες του Κ.Μ. εάν (α) $m_1 = 2 \text{ kg}$ και $m_2 = 2 \text{ kg}$, (β) $m_1 = 2 \text{ kg}$ και $m_2 = 4 \text{ kg}$ και (γ) $m_1 = 4 \text{ kg}$ και $m_2 = 8 \text{ kg}$



Λύση:

(α) Προφανώς το y του κέντρου μάζας είναι μηδέν ενώ το x δίνεται από τη σχέση

$$x_{KM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \times 1 + 2 \times 3}{2 + 2} = 2 \text{ m}$$

(β) το x δίνεται από τη σχέση

$$x_{KM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \times 1 + 4 \times 3}{2 + 4} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = 2.33 \text{ m}$$

Η βαριά μάζα τραβάει προς το μέρος της το κέντρο μάζας

(γ) το x δίνεται από τη σχέση

$$x_{KM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{4 \times 1 + 8 \times 3}{4 + 8} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = 2.33 \text{ m}$$

Αυτόν τον τύπο μπορούμε να τον χρησιμοποιήσουμε και για μη σημειακές μάζες εάν έχουμε N διακριτά σώματα και γνωρίζουμε το κέντρο μάζας του κάθε σώματος δηλαδή εάν έχω N σώματα με x_{KM} το καθένα ίσο με $x_1, x_2, x_3 \dots x_N$ αντίστοιχα, τότε το κέντρο μάζας του συστήματος θα είναι

$$x_{KM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_N x_N}{M}$$

ΣΤΕΡΕΟ

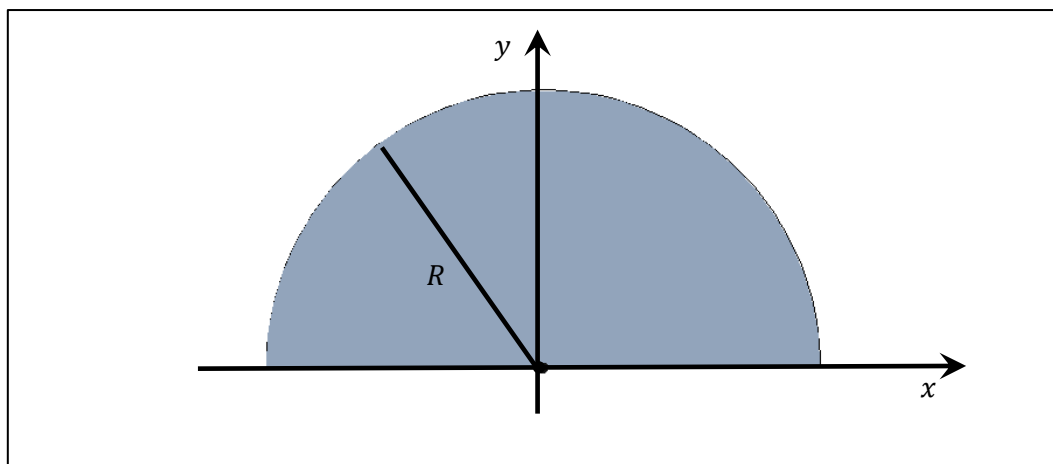
Όταν έχω ένα στερεό το «τεμαχίζω» σε ένα σύνολο σημειακών μαζών dm και εφαρμόζω το παραπάνω άθροισμα ως ολοκλήρωμα. Έτσι οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας δίνονται από τον τύπο

$$x_{KM} = \frac{1}{m} \int_{\Sigma \Omega M A} x dm$$

$$y_{KM} = \frac{1}{m} \int_{\Sigma \Omega M A} y dm$$

Παράδειγμα 10.4

Να βρεθεί το Κ.Μ. του παρακάτω λεπτού ημικυκλικού δίσκου ακτίνας R εάν είναι ομοιογενής (ομοιόμορφη κατανομή μάζας).



Λύση: Λόγω συμμετρίας ως προς $\pm x$, το x του κέντρου μάζας είναι μηδέν

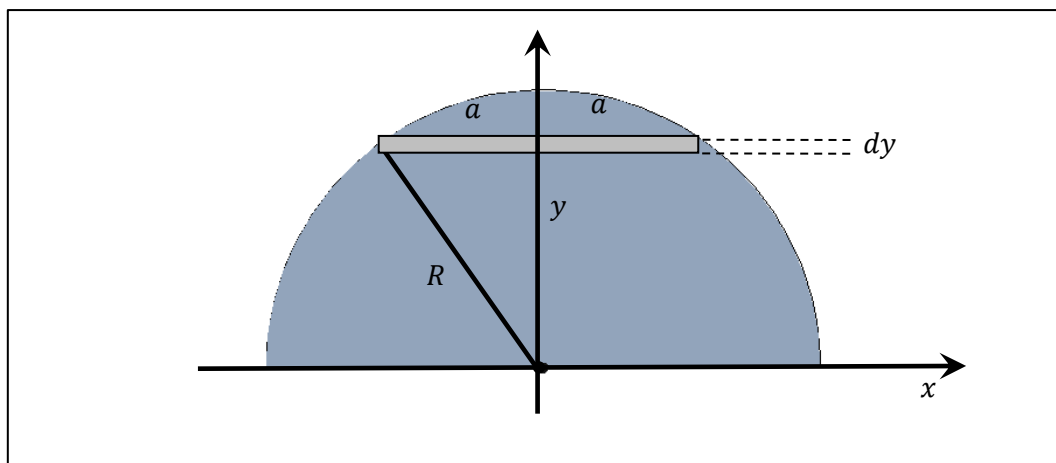
$$x_{KM} = 0$$

Για το y_{KM} πρέπει να καταφύγω στον τύπο

$$y_{KM} = \frac{1}{m} \int_{\Sigma \Omega M A} y dm$$

Πρέπει να τα μαζέψω το σώμα σε στοιχειώδεις μάζες. Δεν χρειάζεται αναγκαστικά να πάρουμε τις μάζες ως σημειακές. Όταν υπολογίζουμε το y του κέντρου μάζας παίρνουμε ως στοιχειώδεις μάζες οριζόντιες λωρίδες πάχους dy .

Έστω μια τέτοια λωρίδα πάχους dy σε απόσταση y από την αρχή, με μήκος $2a$



Από πυθαγόρειο θεώρημα, το ημιμήκος:

$$a = \sqrt{R^2 - y^2}$$

Εμβαδό λωρίδας (πλάτος x μήκος):

$$dA = 2ady$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη μάζα πολύ εύκολα χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η μάζα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη

Η αναλογία μαζών είναι ίση με την αναλογία επιφανειών άρα άμα συγκρίνω τη μικρή λωρίδα με το όλο σώμα μπορώ να γράψω

$$\frac{dm}{m} = \frac{dA}{A}$$

$$dm = m \frac{2ady}{\pi R^2 / 2}$$

$$dm = m \frac{4\sqrt{R^2 - y^2}}{\pi R^2} dy$$

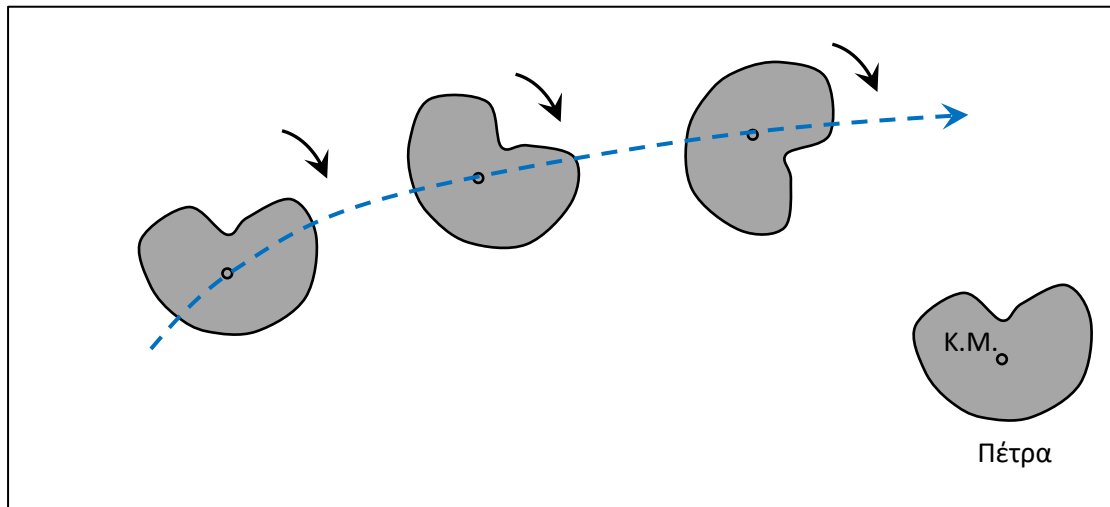
$$y_{KM} = \frac{1}{m} \int_{\Sigma \Omega M A} y dm = \frac{4}{m \pi R^2} m \int_{y=0}^R \sqrt{R^2 - y^2} y dy$$

Μετά την επίλυση αυτού του εύκολου ολοκληρώματος καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$y_{KM} = \frac{4}{3\pi} R$$

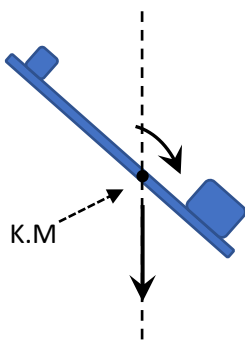
Σύνθετη κίνηση: πάντα μπορεί να αναλυθεί στην μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας + περιστροφή γύρω από το κέντρο μάζας. Στη μεταφορική κίνηση φανταζόμαστε όλη τη μάζα του σώματος να έχει συγκεντρωθεί στο ΚΜ ενώ στην περιστροφική αγνοούμε τη μεταφορά και φανταζόμαστε μια απλή περιστροφή γύρω από το κέντρο μάζας

Παράδειγμα το πέταγμα πέτρας. Το ΚΜ εκτελεί κίνηση βολής και η πέτρα ταυτόχρονα έχει «φάλτσο», δηλαδή περιστροφή γύρω από το ΚΜ

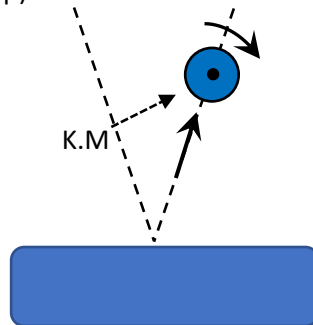


Άλλα παραδείγματα σύνθετης κίνησης

α) Δοκός



β) Μπάλα



γ) Έλικας

