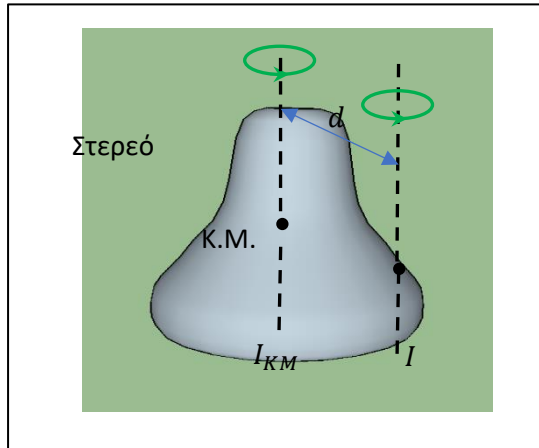


Θεώρημα του Steiner

Εάν ο άξονας περιστροφής δεν περνάει από το κέντρο μάζας του σώματος, χρησιμοποιούμε το θεώρημα του Steiner για να υπολογίσουμε την ροπή αδράνειας



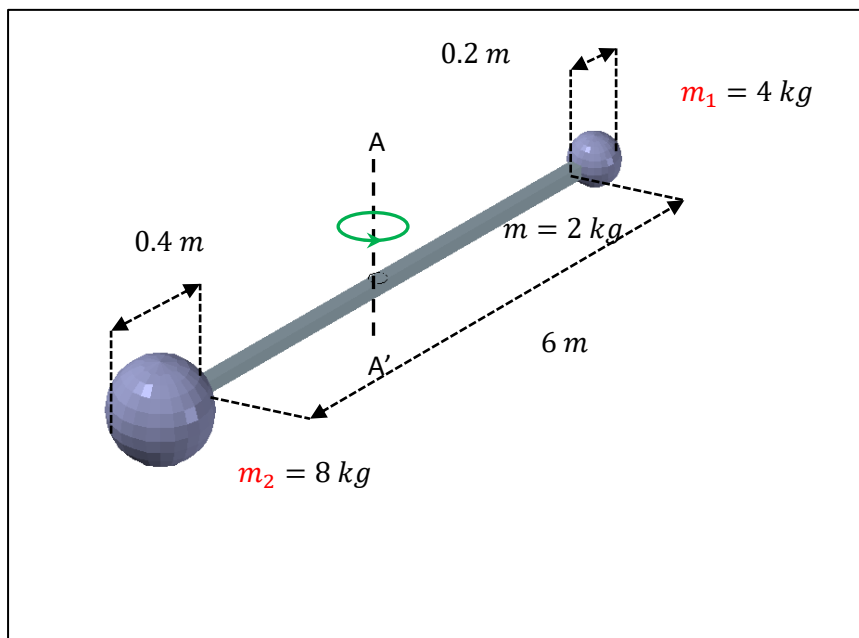
Παράλληλοι οι δυο άξονες, απέχουν μεταξύ τους κατά d

$$I = I_{KM} + md^2$$

όπου I_{KM} ροπή αδράνειας γύρω από το ΚΜ, συνήθως γνωστό από πίνακες

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το I γύρω από τον ΑΑ



$$I = I_1 + I_2 + I_\rho$$

Η ράβδος περιστρέφεται γύρω από το ΚΜ της και έτσι από τον πίνακα βρίσκουμε

$$I_\rho = \frac{1}{12} mL^2 = 6 \text{ kg m}^2$$

οι δυο σφαίρες δεν περιστρέφονται γύρω από το κέντρο μάζας τους αλλά γύρω από τον άξονα AA και επομένως πρέπει να εφαρμόσουμε το θεώρημα Steiner

Αρχικά καταφεύγουμε στον πίνακα για να βρούμε τη ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς το κέντρο μάζας και μετά θα εφαρμόσουμε το θεώρημα

$$I_{1KM} = \frac{2}{5} m_1 r_1^2 = 0.016$$

$$I_{2KM} = \frac{2}{5} m_2 r_2^2 = 0.128$$

Σύμφωνα με το θεώρημα

$$I_1 = I_{1KM} + m_1 d_1^2 = I_{1KM} + m_1 \left(\frac{L}{2} + r_1 \right)^2$$

$$I_1 = 0.016 + 4 \times 3.1^2 = 38.5$$

$$I_2 = I_{2KM} + m_2 d_2^2 = I_{2KM} + m_2 \left(\frac{L}{2} + r_2 \right)^2$$

$$I_2 = 0.128 + 8 \times 3.2^2 = 82.0$$

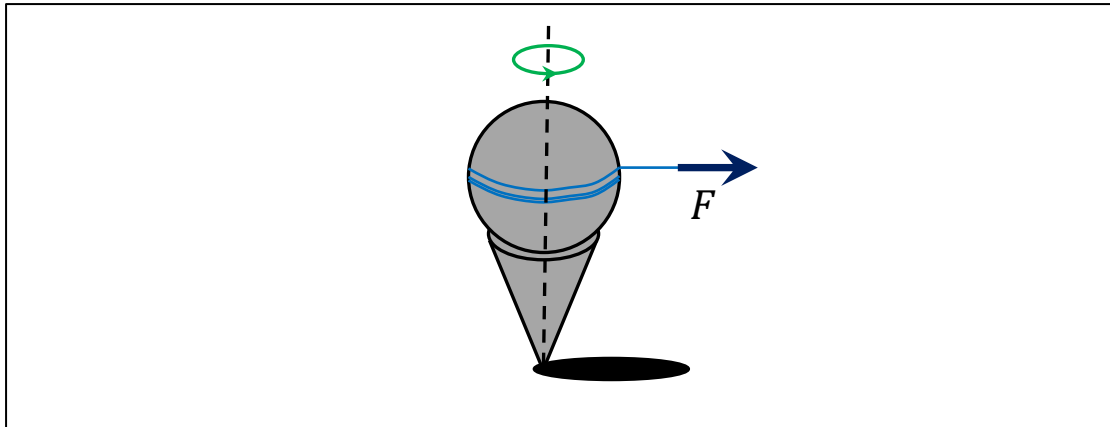
Δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για την περιστροφή

Όταν έχω στερεό που εκτελεί καθαρή περιστροφική κίνηση

$$\Sigma \tau = I \alpha$$

Παράδειγμα 8.13

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια αυτοσχέδια σβούρα που κατασκεύασε ένας φοιτητής κολλώντας μια συμπαγή σφαίρα μάζας 200 γραμμαρίων και διαμέτρου 2.6 εκατοστών, επάνω σε ένα κώνο μάζας 100 γραμμαρίων, διαμέτρου βάσης 2.0 εκατοστών και ύψους 2.5 εκατοστών. Με την βοήθεια ενός νήματος που είναι τυλιγμένο γύρω από την σφαίρα (στον ισημερινό της σφαίρας) εφαρμόζει μια δύναμη 2 N για περίπου 1.5 δευτερόλεπτα. Να βρεθούν: (α) Η τελική γωνιακή ταχύτητα της σβούρας εάν ξεκινάει από την ηρεμία και (β) ο συνολικός αριθμός των περιστροφών που εκτελεί η σβούρα μέσα σε αυτό το διάστημα των 1.5 δευτερολέπτων (η ροπή αδράνειας ενός κώνου ακτίνας R είναι ίση με $3/10MR^2$).



Ροπή αδράνειας σφαίρας

$$I_1 = \frac{2}{5} m_1 r_1^2 = 0.135$$

Ροπή αδράνειας κώνου

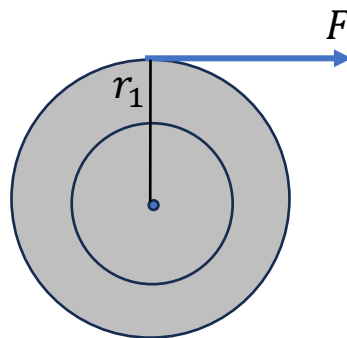
$$I_2 = \frac{3}{10} m_2 r_2^2 = 0.03$$

συνολικά

$$I = I_1 + I_2 = 0.165 \text{ kg cm}^2$$

Υπάρχουν 3 δυνάμεις, η δεδομένη F το βάρος mg και η τριβή T

Εάν δούμε το σώμα σε κάτοψη



ροπή της F

$$\tau_F = Fr_1 = 2.6 \text{ Ncm}$$

Το βάρος B δρα στο κέντρο μάζας του σώματος και άρα η απόστασή του από τον άξονα περιστροφής είναι μηδέν και επομένως δεν ασκεί κάποια ροπή στο σώμα

$$\tau_B = 0$$

Ομοίως η τριβή T δρα στο σημείο επαφής της σβούρας με το έδαφος και αφού ο άξονας περιστροφής περνάει από το σημείο επαφής τότε η απόσταση αυτής της δύναμης από τον άξονα περιστροφής είναι μηδέν και άρα δεν ασκεί ροπή

$$\tau_T = 0$$

Ομοίως η κάθετος αντίδραση N δρα στο σημείο επαφής της σβούρας και άρα δεν ασκεί ροπή

$$\tau_N = 0$$

Συνολικές ροπές:

$$\Sigma\tau = \tau_F = 2.6 \text{ Ncm} = 0.026 \text{ Nm}$$

Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στις περιστροφές μπορούμε να βρούμε την επιτάχυνση

$$\alpha = \frac{\Sigma\tau}{I} = \frac{0.026}{0.165 \times 10^{-4}} = 1575 \text{ rad/s}^2$$