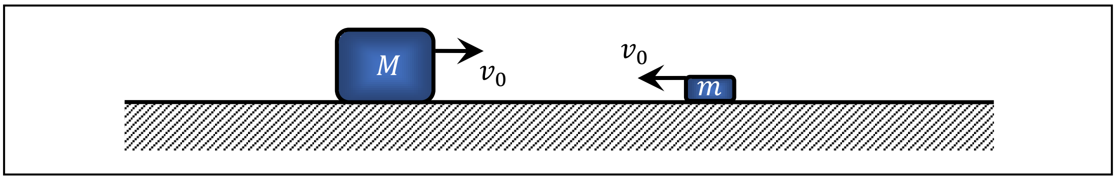
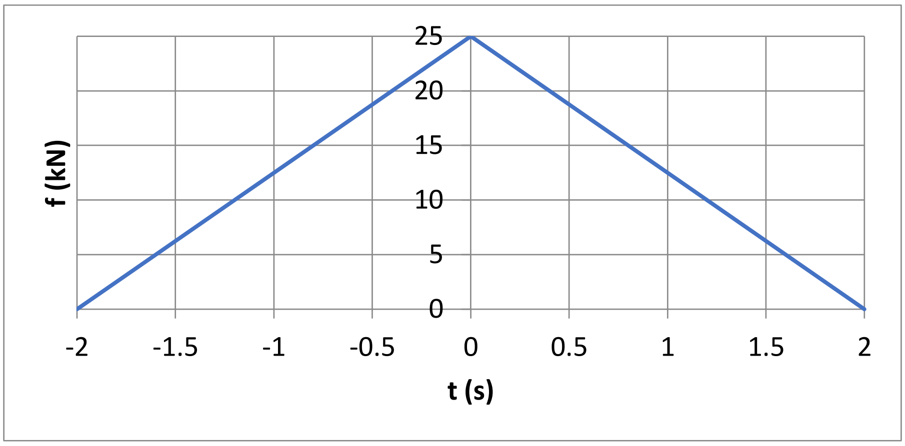
Παράδειγμα 4.7

Σε μια δοκιμή σύγκρουσης, ένα αυτοκίνητο μάζας $2500\ kg$ και ένα μικρό φορτηγό 10 τόνων ($10{,}000\ kg$) οδηγούνται προς μετωπική σύγκρουση το ένα επάνω στο άλλο με την ίδια σταθερή ταχύτητα $10\ m/s$. Το οδόστρωμα είναι λείο και χωρίς τριβές, η σύγκρουση τελείως ελαστική λόγω των μικρών ταχυτήτων και δεν έγινε χρήση των φρένων τόσο πριν αλλά όσο και μετά τη σύγκρουση. Στην παρακάτω γραφική παράσταση φαίνεται η δύναμη της σύγκρουσης που έδρασε στο αυτοκίνητο συναρτήσει του χρόνου. Να βρεθούν: (α) Η μαθηματική εξίσωση του περιγράφει αυτή τη δύναμη με την βοήθεια της γραφικής παράστασης. (β) Η δύναμη που δρα στο φορτηγό συναρτήσει του χρόνου. (γ) Οι ταχύτητες των δυο οχημάτων συναρτήσει του χρόνου κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης. (δ) Οι ταχύτητες των δυο οχημάτων συναρτήσει του χρόνου μετά τη σύγκρουση





(α)

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{25}{2}t + 25, & -2 \le t \le 0 \\ -\dfrac{25}{2}t + 25, & 0 \le t \le 2 \end{cases}$$

σε kN

(β) Δράση - αντίδραση

$$F(t) = -f(t) = \begin{cases} -\dfrac{25}{2}t - 25, & -2 \le t \le 0 \\ \dfrac{25}{2}t - 25, & 0 \le t \le 2 \end{cases}$$

σε kN

(γ) Επιταχύνσεις

$$a = \frac{f}{m} = \begin{cases} 5t + 10, & -2 \le t \le 0 \\ -5t + 10, & 0 \le t \le 2 \end{cases}$$

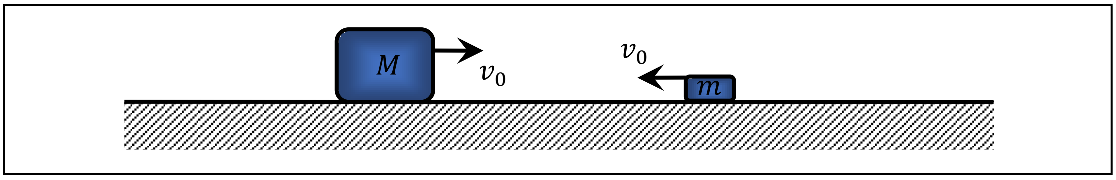
σε $\frac{m}{s^2}$

Ολοκληρώνοντας

$$v = \int a dt = \begin{cases} \frac{5t^2}{2} + 10t + c_1, & -2 \le t \le 0 \\ -\frac{5}{2}t^2 + 10t + c_2, & 0 \le t \le 2 \end{cases}$$

Αρχική συνθήκη

$$v(-2) = -10$$



$$\frac{5(-2)^2}{2} + 10(-2) + c_1 = -10$$

$$c_1 = 0$$

Ταχύτητα στο $t = 0$ συνεχής

$$5\frac{0^2}{2} + 10 \times 0 = -\frac{5}{2}0 + 10 \times 0 + c_2$$

$$c_2 = 0$$

(δ) Μετά το $t = 2$ δεν υπάρχουν δυνάμεις και σύμφωνα με τον 1^{ο} Νόμο του Νεύτωνα διατηρεί την κινητική του κατάσταση =>

$v(t) = v(2)$ για $t > 2$

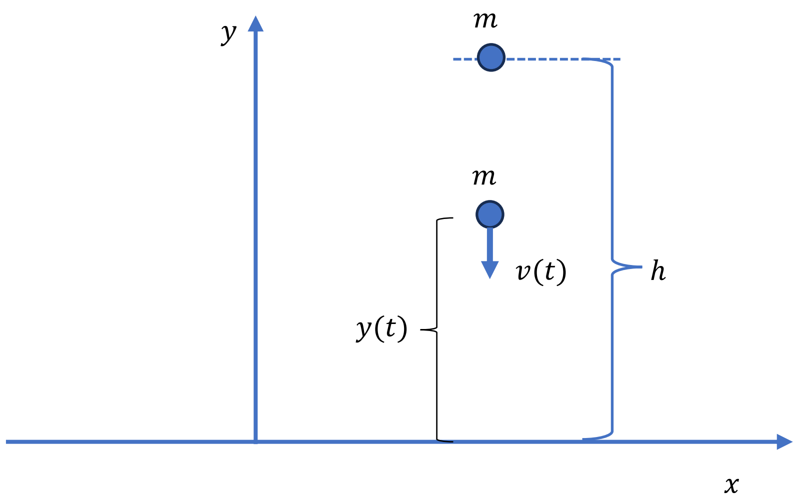
$$v(2) = -\frac{5 \times 2^2}{2} + 10 \times 2 = 10$$

Παράδειγμα 4.8

Αλεξιπτωτιστής μάζας m εκτελεί ελεύθερη πτώση με μηδενική αρχική ταχύτητα από αερόστατο που βρίσκεται ακίνητο σε ύψος h από το έδαφος. Εάν η δύναμη τριβής του αέρα έχει μέτρο bv όπου $v(t)$ η ταχύτητα του αλεξιπτωτιστή σε κάθε χρονική στιγμή t και b μια σταθερά, να βρεθούν η v και το ύψος y του αλεξιπτωτιστή συναρτήσει του χρόνου.

Λύση:

$$\Sigma F = ma => -mg - bv = ma$$



$$-mg - bv = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{b}{m}v = -g$$

Διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt}v + \frac{b}{m}\left(v + \frac{m}{b}g\right) = 0$$

Παράγωγος σταθεράς = 0 οπότε μπορώ να προσθέσω την σταθερά mg/b μέσα σην παράγωγο του πρώτου όρου:

$$\frac{d}{dt}\left(v + \frac{m}{b}g\right) + \frac{b}{m}\left(v + \frac{m}{b}g\right) = 0$$

Θέτω

$$\tilde{v} = v + \frac{m}{b} g$$

Και έχω

$$\frac{d}{dt}\tilde{v} + \frac{b}{m}\tilde{v} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{v} = -\frac{b}{m}\tilde{v}$$

Ποια συνάρτηση εάν την παραγωγίσω παίρνω τον εαυτό της επί μια σταθερά; Την εκθετική, οπότε η λύση είναι της μορφής:

$$\tilde{v} = Ae^{\gamma t}$$

Αντικαθιστώ στην παραπάνω και παίρνω $\gamma = -b/m$ οπότε

$$\tilde{v} = Ae^{-\frac{b}{m}t}$$

Συναρτήσει της αρχικής μεταβλητής

$$v = -\frac{m}{b} g + Ae^{-\frac{b}{m}t}$$

Αρχικές συνθήκες, $t = 0$, $v = 0$

$$v = \frac{m}{b} g \left(e^{-\frac{b}{m}t} - 1\right)$$