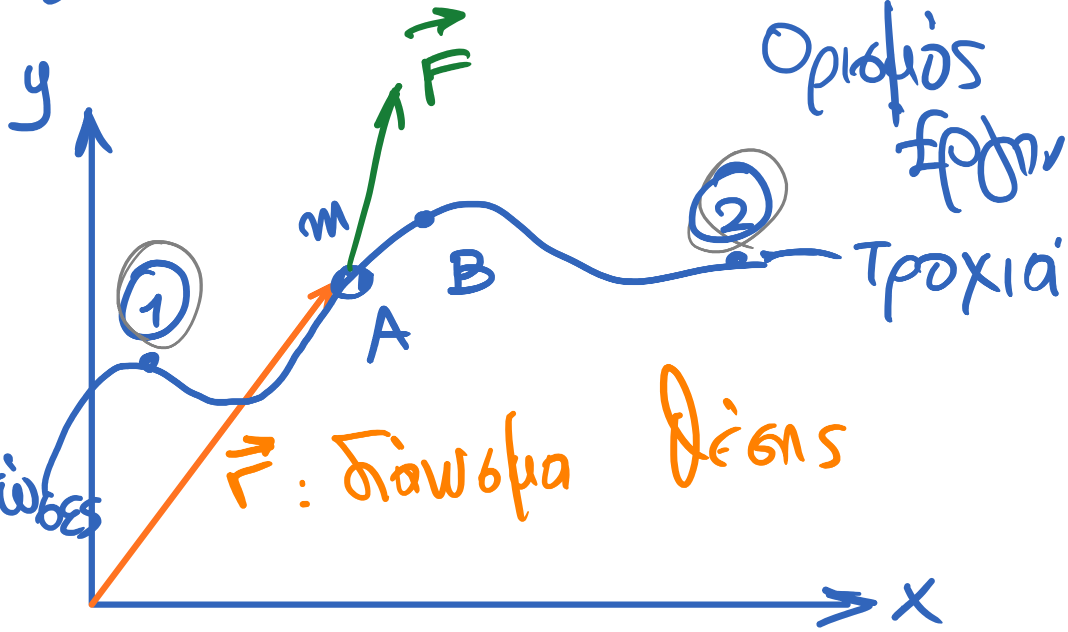
Έργο – Ενέργεια Κεφ 6

Ορισμός έργου

Σε χρόνο dt το κινητό πηγαίνει από το A στο B

$d\vec{r} = \vec{AB}$ έχει συνιστώσες dx, dy



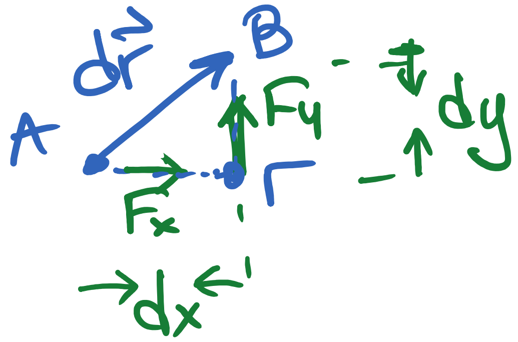
$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$d\vec{r} = (dx, dy)$

$\vec{r} = (x, y)$

$\vec{F} = (F_x, F_y)$

Επίσης $$W_{12} = \int_1^2 (F_x dx + F_y dy)$$



2

Τετάρτη, 22 Νοεμβρίου 2023   9:32 πμ

Στο διάστημα AB επειδή είναι απειροστό

$\vec{F} \simeq$ σταθερή

$$dW_{AB} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$dW_{AB} = |\vec{F}||d\vec{r}|\cos\theta$$

$1 \rightarrow 2$ μη απειροστή

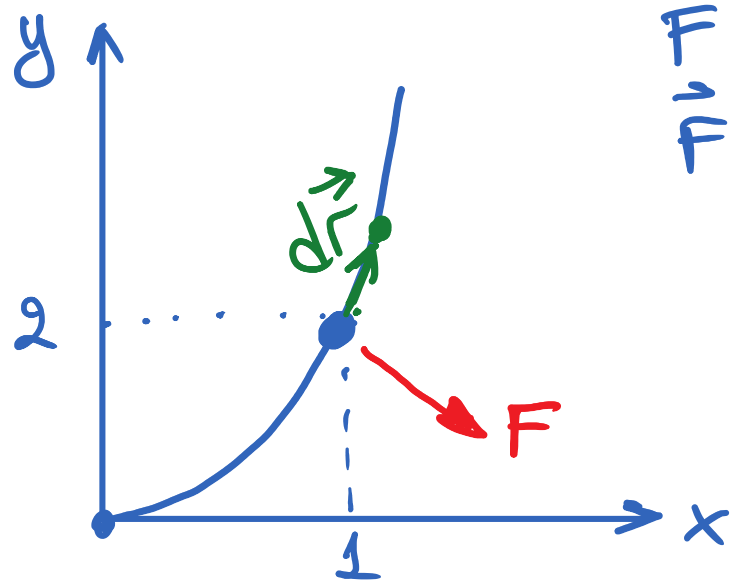
$$W_{12} = \int dW_{AB}$$

Παράδειγμα 6.4

Μια διανυσματική δύναμη $\vec{F} = c(2xy, -y^2)$ όπου $c = 30\ N/m^2$, δρα σε κινητό το οποίο κινείται στην ευθεία $y = 2x^2$. Να βρεθεί το έργο της δύναμης όταν δράσει στο κινητό από $x = 1$ έως $x = 4\ m$.

$\vec{F}$ στο $(1,2)$;

$\vec{F} = 30(4, -4)$



$y = 2x^2$

$x=1,\ y=2$

$$W = \int_{x=2}^{4} (F_x\,dx + F_y\,dy) = \int_{x=1}^{4} F_x\,dx + \int_{y=2}^{32} F_y\,dy$$

$$= c\int_{x=1}^{4} 2xy\,dx - c\int_{y=2}^{32} y^2\,dy$$

ολοκληρώνεται άμεσα

$y = ?$

Θέτω $y = 2x^2$

$$= 4c\int_{x=1}^{4} x^3\,dx - c\int_{y=2}^{32} y^2\,dy = \dots$$

$$= 4c \int_{x=1} x \, dx - c \int_{y=2} y^2 \, dy = \cdots$$

4

Τετάρτη, 22 Νοεμβρίου 2023 9:48 πμ

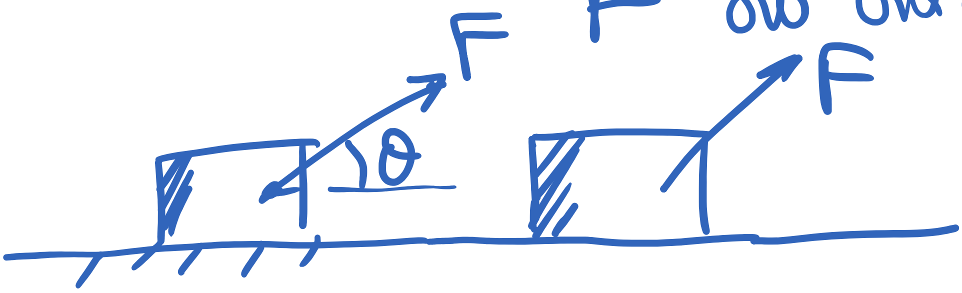
Μια διάσταση

$$W = \int_1^2 F(x)\,dx$$

$\vec{F} \parallel x \qquad d\vec{r} \parallel x$

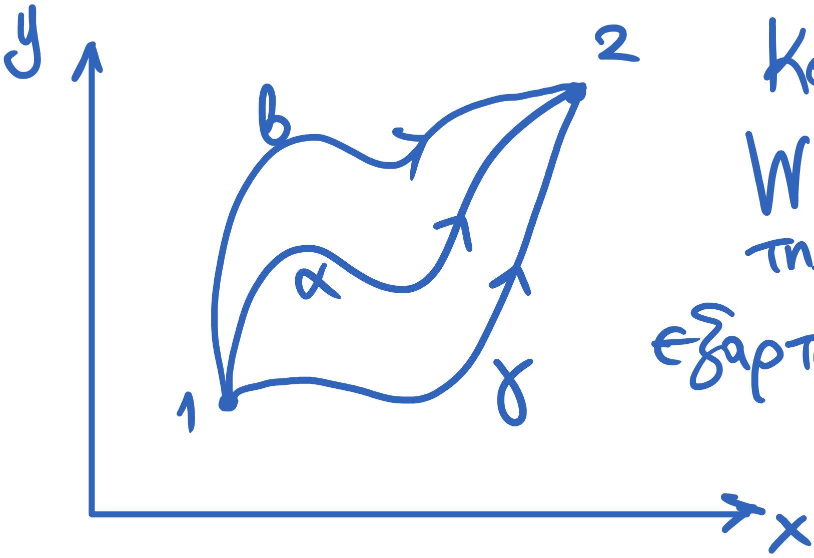
Μια διάσταση x

$\vec{F}$ δυο διαστάσεις



$$W = \int F(x)\,dx\,\cos\theta$$

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Κάποιες δυνάμεις

W: ανεξάρτητο της διαδρομής, εξαρτάται μόνο από το αρχικό & τελικό σημείο

Εάν $W_{12}^{(\alpha)} = W_{12}^{(\beta)} = W_{12}^{(\gamma)}$

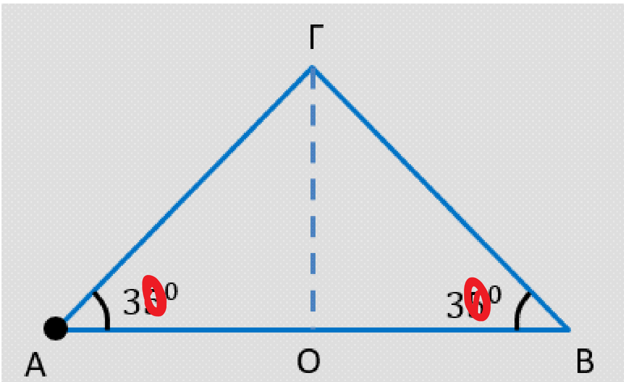
ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΗ (μπορώ να ορίσω ΔΥΝΑΜ. ΕΝΕΡΓΕΙΑ)

Εάν όχι

ΜΗ ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΗ

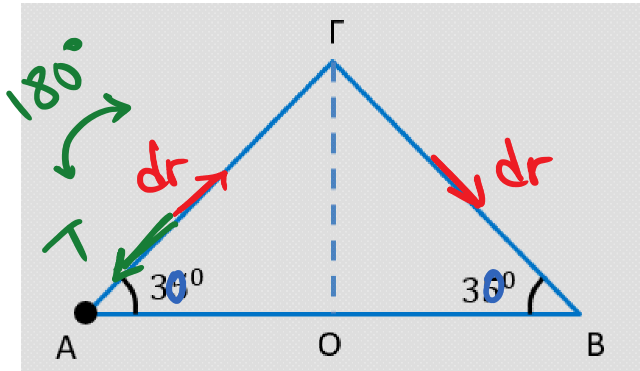
Παράδειγμα 6.8

Στο παρακάτω σχήμα ένα υλικό σημείο βρίσκεται στο σημείο Α ενός ισοσκελούς τριγώνου με μήκος βάσης ΑΒ = $2a$. Υπολογίστε το έργο για τις δυο διαδρομές ΑΟΒ (ευθύγραμμη κατά μήκος της βάσης) και ΑΓΒ (κατά μήκος των δυο ίσων πλευρών) των εξής δυο δυνάμεων: (α) της τριβής ολίσθησης εάν θεωρηθεί ότι είναι σταθερή και ίση με T παντού και (β) μιας τυχαίας σταθερής δύναμης F με κατεύθυνση κατά τον θετικό άξονα x (δηλαδή $\vec{F} = F\vec{e}_x$

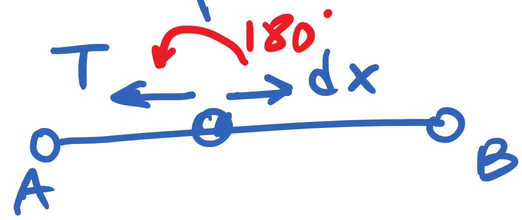


30°

Screen clipping taken: 22/11/2023 10:08 πμ



A. Έργο τριβής



Screen clipping taken: 22/11/2023 10:14 πμ

$$W_{AB}^{(T)} = \int_A^B |\vec{T}|\, dx \cos(180^\circ) = -T\int_A^B dx = -T2a$$

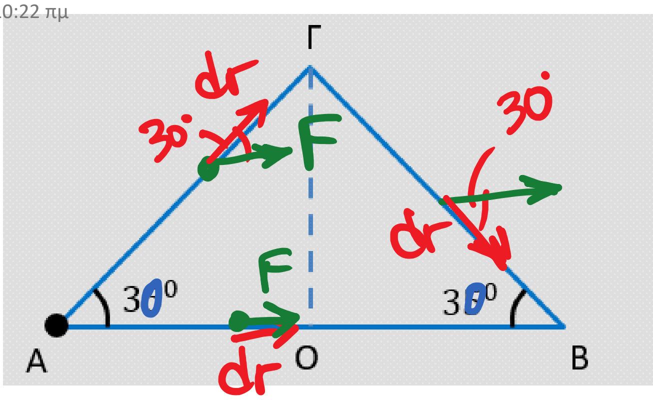
$$W_{A\Gamma B}^{(T)} = \int_A^\Gamma |\vec{T}|\, dr \cos(180^\circ) + \int_\Gamma^B |\vec{T}|\, dr \cos(180^\circ)$$

$$W_{A\Gamma B}^{(T)} = -T\frac{\cancel{2}a}{\sqrt{3}/\cancel{2}} = -\frac{4T}{\sqrt{3}}a$$

T: Μη συντηρητική δύναμη

8

Τετάρτη, 22 Νοεμβρίου 2023 10:22 πμ



Screen clipping taken: 22/11/2023 10:23 πμ

B. Έργο $\vec{F}$

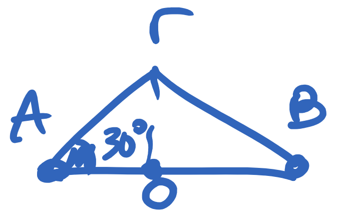
AB: $dr = dx$

$$W^{(F)}_{AB} = F(AB) = 2Fa$$

$$W^{(F)}_{A\Gamma B} = W^{(F)}_{A\Gamma} + W^{(F)}_{\Gamma B} =$$

$$\int_A^\Gamma |\vec{F}|\,|d\vec{r}|\cos(30^\circ) + \int_\Gamma^B |\vec{F}|\,|d\vec{r}|\cos(30^\circ)$$

$$= F\frac{\sqrt{3}}{2}\int_A^\Gamma dr + F\frac{\sqrt{3}}{2}\int_\Gamma^B dr =$$



$$F\frac{\sqrt{3}}{2}(A\Gamma) + F\frac{\sqrt{3}}{2}(\Gamma B)$$

$A\Gamma\cos 30^\circ = AK$

$\Gamma B\cos 30^\circ = OB$

$$= F(AO) + F(OB) = F(AB) = 2Fa$$

όπως και στην άλλη διαδρομή !!!

Για συντηρ. δυνάμεις στην 1-Δ ορίζεται μια συνάρτηση, γνωστή ως συνάρτηση της Δυναμικής Ενέργειας $V(x)$, ως εξής

$$\boxed{F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}}$$

$$W_{12} = \int_1^2 F(x)\,dx = -\int_1^2 \frac{dV(x)}{\cancel{dx}}\cancel{dx} =$$

$$= -\int_1^2 dV(x) = -\left(V(x_2) - V(x_1)\right)$$

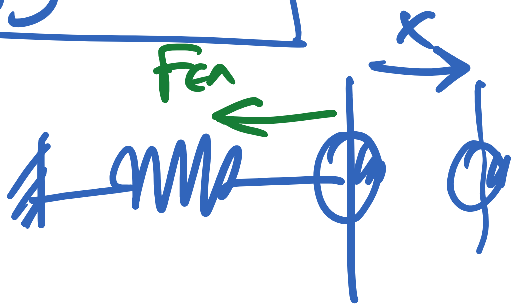
10

Τετάρτη, 22 Νοεμβρίου 2023 10:38 πμ

✓ Βάρος $B=-mg$ Π.χ. $-mg=-\frac{dV}{dy} \rightsquigarrow$

$$\boxed{V=mgy+C}$$

✓ Δύναμη Ελατηρίου



$x=0$

Σημείο φυσικού μήκους

$$F_{ελ}=-kx$$

$$-kx=-\frac{dU(x)}{dx} \rightsquigarrow$$

$$V(x)=\frac{1}{2}kx^2+C$$

11

Τετάρτη, 22 Νοεμβρίου 2023 10:41 πμ

√ Ηλεκτροστατ. Δύναμη

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$F = -\frac{\partial U}{dr}$$

$$k\frac{q_1 q_2}{r^2} = -\frac{dV(r)}{dr}$$

$$V(r) = k\frac{q_1 q_2}{r} + c$$