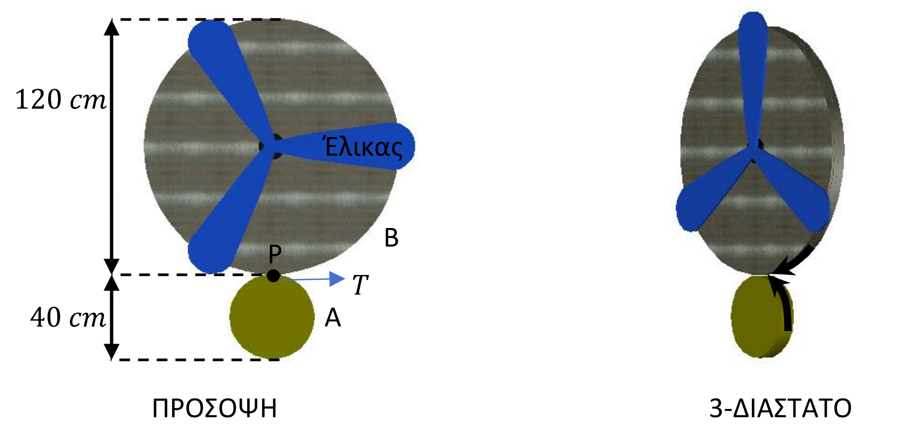
Ασκήσεις στην Περιστροφική κίνηση:

8.9 Το παρακάτω σχήμα αποτελείται από δυο αβαρείς λεπτούς δίσκους Α και Β που μπορούν και περιστρέφονται ελεύθερα γύρω από τα κέντρα τους και που εφάπτονται μεταξύ τους στο σημείο P, ώστε όταν περιστρέφεται ο ένας, να παρασύρει τον άλλο χωρίς ολίσθηση. Στον πάνω δίσκο είναι στερεωμένος ένας βαρύς έλικας με ροπή αδρανείας $I = 75\,kg\,m^2$ ως προς το κέντρο της. Στο $t = 0$ εφαρμόζεται μια μεταβλητή ροπή $\tau = ct^2$ στον κάτω δίσκο όπου $c = 50\,Nm/s^2$ και ο χρόνος t σε sec. Εάν ο έλικας βρίσκεται σε ηρεμία την χρονική στιγμή $t = 0$, να βρεθεί η γωνιακή του ταχύτητα κατά την χρονική στιγμή $t = 3\,s$.



<u>Απάντηση</u>: $18\,rad/s$

Α: αβαρής, $I_A = \frac{1}{2}M_A r_A^2 = 0$

$$\Sigma\tau_A = \tau - \tau_T = I_A \alpha_A = 0$$

$$\tau = \tau_T => ct^2 = Tr_A$$

$$T = \frac{ct^2}{r_A}$$

Δράση-Αντίδραση, ίδιο T δρα και στον πάνω δίσκο, μοναδική δύναμη που ασκεί ροπή

$$\Sigma\tau_B = Tr_B = ct^2 \frac{r_B}{r_A}$$

Νόμος του Νεύτωνα

$$\Sigma\tau_B = I\alpha_B$$

$$ct^2 \frac{r_B}{r_A} = I\alpha_B$$

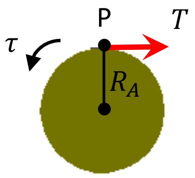
$$\alpha_B = 50 \frac{3}{75} t^2 = 2t^2$$

$$\omega_B = \int \alpha_B \, dt = \frac{2t^3}{3} + \omega_0 = \frac{2t^3}{3} = 18 \, rad/s$$

<u>Λύση</u>: Ας εστιάσουμε πρώτα στον κάτω δίσκο και έστω η φορά περιστροφής του είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (θετική σύμφωνα με τη σύμβαση που συζητήσαμε στο βιβλίο) εξαιτίας της δεδομένης εξωτερικής ροπής τ. Λόγω της επαφής στο P, εμφανίζεται ένα ζεύγος δράσης αντίδρασης στους δυο δίσκους με δυνάμεις τριβής. Έτσι στον δίσκο A εμφανίζεται η τριβή T προς τα δεξιά ώστε να αντιτίθεται στην κίνηση του δίσκου. Εάν R_A είναι η ακτίνα του δίσκου, τότε η T ως εφαπτόμενη δύναμη είναι κάθετη σε αυτή και έτσι σύμφωνα με την Εξ. 8.10 δημιουργεί μια επιπλέον ροπή ίση με

$$\tau_A = -R_A T sin 90^0 = -R_A T$$

(αρνητική σύμφωνα με τη σύμβαση που συζητήσαμε στο βιβλίο).



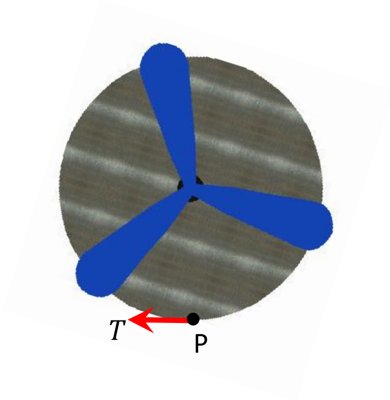
Η ροπή αδράνειας I_A του δίσκου είναι μηδέν αφού είναι αβαρής και έτσι ο 2[ος] νόμος του Νεύτωνα για τις περιστροφές Εξ. 8.18 δίνει

$$\tau + \tau_A = I\alpha = 0 => -\tau_A = \tau => R_A T = \tau$$

δηλαδή

$$T = \frac{\tau}{R_A}$$

Λόγω δράσης – αντίδρασης, η ίδια τριβή T εφαρμόζεται και στον δίσκο A, αλλά βέβαια με αντίθετη φορά.



Εάν R_B είναι η ακτίνα του δίσκου B, τότε όπως και με τον δίσκο A, η T δημιουργεί ροπή ίση με

$$\tau_B = R_B T sin 90^0 = R_B T = \tau \frac{R_B}{R_A}$$

(θετική σύμφωνα με τη σύμβαση που συζητήσαμε στο βιβλίο). Η ροπή αδράνειας I_B του δίσκου είναι μηδέν αφού είναι αβαρής αλλά υπάρχει η ροπή αδράνειας του έλικα που πρέπει να λάβουμε υπόψη. Έτσι ο 2[ος] νόμος του Νεύτωνα για τις περιστροφές Εξ. 8.18, όταν εφαρμοστεί στο σύστημα δίσκος B - έλικας δίνει

$$\tau = (I + 0)\alpha$$

όπου α η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος. Αντικαθιστώντας

$$\tau \frac{R_B}{R_A} = I\alpha => 50t^2 \frac{60}{20} = 75\alpha => \alpha = 2t^2$$

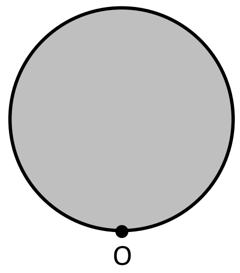
Σύμφωνα με την Εξ. 8.2 $\alpha = d\omega/dt$ ολοκληρώνουμε το α για να βρούμε το ω:

$$\omega = \frac{2}{3} t^3 + \omega_0$$

όπου η σταθερά ολοκλήρωσης ω_0 είναι η αρχική γωνιακή ταχύτητα η οποία από την εκφώνηση είναι ίση με μηδέν. Έτσι $\omega = 2t^3/3$ και κατά την χρονική στιγμή $t = 3\ s$

$$\omega = 18\, rad/s$$

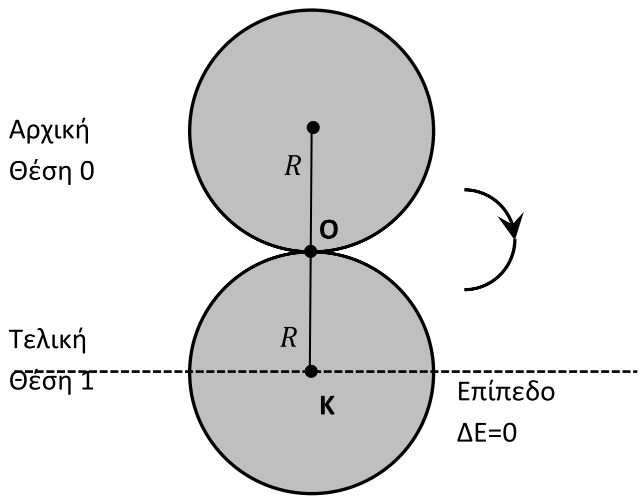
8.14 Ομογενής λεπτός δίσκος ακτίνας $R = 1/3\,m$ και μάζας $M = 5\,kg$ τοποθετείται κατακόρυφα (με το επίπεδό του να τέμνει κάθετα τη γη) και μπορεί και περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από οριζόντιο άξονα που περνάει από το χαμηλότερο σημείο του Ο και κάθετα προς το επίπεδό του. Ο δίσκος ωθείται κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού με (αρχική) γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = 10\,rad/s$. (α) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου όταν διέρχεται από το χαμηλότερο σημείο της τροχιάς του. (β) Να γίνει το ίδιο όταν υφίσταται στον άξονα αιώρησης επιβραδύνουσα ροπή ίση με $15\,Nm$ (Δίδεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονά του $I = 1/2MR^2$). Πάρτε $g \approx 10\,m/s^2$ για ευκολία.



Απάντηση: (α) $13.4\,rad/s$ (β) $8.4\,rad/s$

Λύση:

(α) Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας έχουμε $K_0 + U_0 = K_1 + U_1$ όπου $K = 1/2I\omega^2$ η κινητική ενέργεια και $U = Mgh$ η δυναμική ενέργεια σε ύψος h από κάποιο σημείο αναφοράς. Διαλέγω αυτό το σημείο να είναι το Κ, το κέντρο μάζας του δίσκου στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς του. Έτσι $h_1 = 0$ και $h_0 = 2R$.



$$I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

Η ροπή αδράνειας του δίσκου πρέπει να υπολογισθεί σε σχέση με το σημείο Ο. Από το θεώρημα των παράλληλων αξόνων (Steiner) έχουμε

$$I = I_{KM} + md^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

όπου I_{KM} η ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας του δίσκου και $d = R$ η απόσταση ΚΟ του κέντρου μάζας από το σημείο περιστροφής. Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας έχουμε

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2\right){\omega_0}^2 + 2MgR = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2\right){\omega_1}^2 + 0 => 3R{\omega_0}^2 + 8g = 3R{\omega_1}^2$$

Λύνοντας ως προς ω_1

$$\omega_1 = \sqrt{{\omega_0}^2 + \frac{8g}{3R}} = 13.4\, rad/s$$

(β) Τώρα ασκείται μια επιβραδύνουσα ροπή $\tau = -15\ Nm$ στο σημείο Ο και πρέπει να την συμπεριλάβουμε στην αρχή διατήρησης της ενέργειας. Θεωρούμε ως θετική τη φορά της κίνησης (των δεικτών του ρολογιού, αντίθετα με τη συνήθη σύμβαση) και έτσι η ροπή αφού αντιτίθεται είναι αρνητική. Αφού γενικά οι τριβές δεν είναι συντηρητικές δυνάμεις δεν προέρχονται από κάποιο δυναμικό και έτσι πρέπει να καταφύγουμε στον ορισμό του έργου ο οποίος στην περιστροφική κίνηση δίνεται από την Εξ. 8.20 ως

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta$$

Αφού η ροπή είναι σταθερή μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος. Η συνολική γωνία περιστροφής είναι 180^0 και έτσι

$$W = \tau \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \tau(\theta_2 - \theta_1) = \pi\tau = -15 \times 3.14 = -47.1\, Joules$$

Από την Α.Δ.Μ.Ε. με συντηρητικές και μη συντηρητικές δυνάμεις Εξ. 6.16 έχουμε $K_0 + U_0 + W = K_1 + U_1$. Αντικαθιστώντας

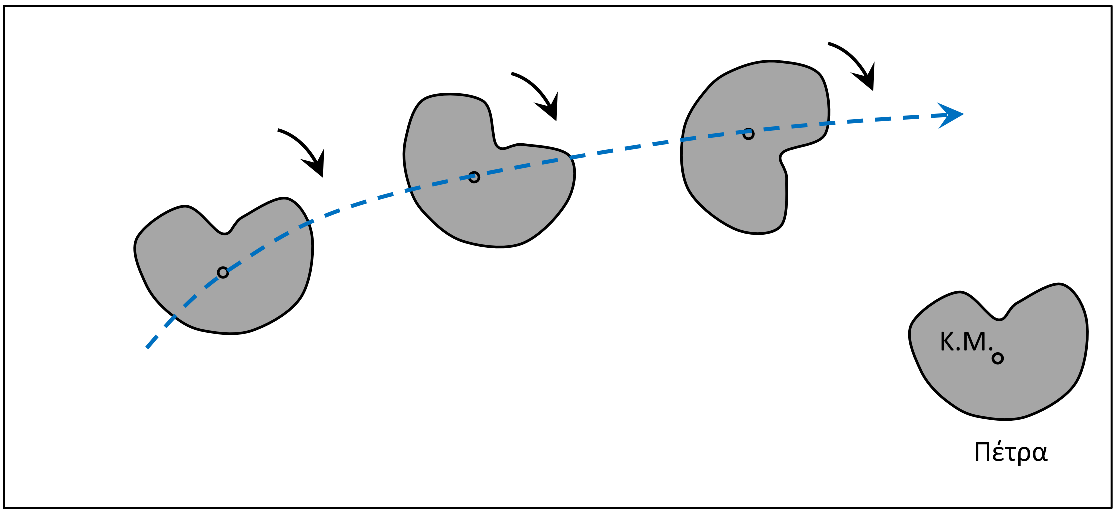
$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2\right){\omega_0}^2 - \pi\tau + 2MgR += \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2\right){\omega_1}^2 + 0$$

και τελικώς

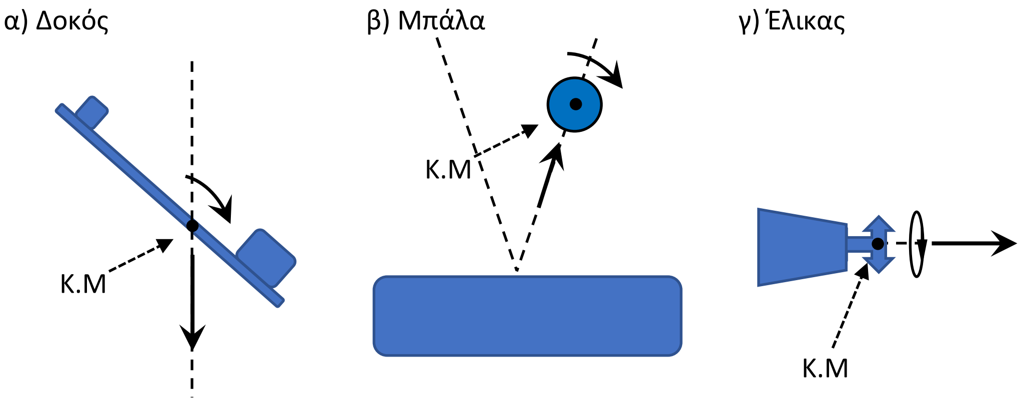
$$\omega_1 = \sqrt{{\omega_0}^2 + \frac{8g}{3R} - \frac{4\pi\tau}{3MR^2}} = 8.4\, rad/s$$

10. ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗ

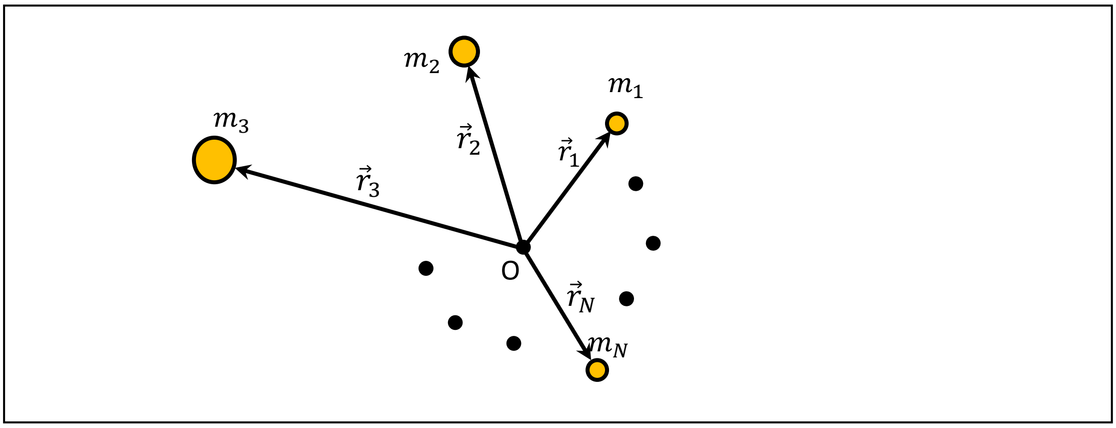
Σε κάθε στερεό σώμα υπάρχει ένα ξεχωριστό σημείο, γνωστό ως το "**κέντρο μάζας**" (Κ.Μ.), τέτοιο ώστε οποιαδήποτε τυχαία κίνησή του στερεού, όσο πολύπλοκη και εάν είναι, να μπορεί να αναλυθεί σε δυο κινήσεις, μια μεταφορική του Κ.Μ. και μια περιστροφική γύρω από το Κ.Μ.



Π.χ.



Κέντρο Μάζας

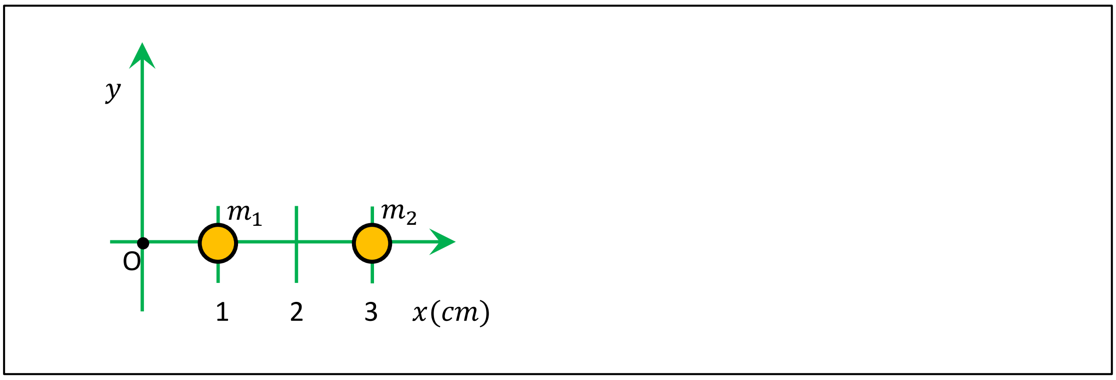


Σχήμα 10.2. Ορισμός του κέντρου μάζας για σύνολο σημειακών μαζών.

$x_{KM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i$	x-ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΗ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ	(10.1α)
$y_{KM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i$	y-ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΗ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ	(10.1β)

Παράδειγμα 10.2

Στο παρακάτω σχήμα, να βρεθούν οι συντεταγμένες του Κ.Μ. εάν (α) $m_1 = 2\ kg$ και $m_2 = 2\ kg$, (β) $m_1 = 2\ kg$ και $m_2 = 4\ kg$ και (γ) $m_1 = 4\ kg$ και $m_2 = 8\ kg$



Λύση:

(α) Οι δυο μάζες και οι αντίστοιχες συντεταγμένες φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Η συνολική μάζα είναι $M = 2 + 2 = 4\ kg$:

	m_1	m_2
Μάζα (kg)	2	2
$x(cm)$	1	3
$y(cm)$	0	0

Από τις Εξισώσεις 10.1 έχουμε:

$$x_{KM} = \frac{1}{M}(m_1 x_1 + m_2 x_2) = \frac{1}{4}(2 \times 1 + 2 \times 3) = 2\, m$$

$$y_{KM} = \frac{1}{M}(m_1 y_1 + m_2 y_2) = \frac{1}{4}(2 \times 0 + 2 \times 0) = 0\, m$$

Δηλαδή το Κ.Μ. βρίσκεται ακριβώς στο μέσο των δυο μαζών. Αυτό αναμένεται αφού οι δυο μάζες είναι ίσες και έτσι το Κ.Μ. ταυτίζεται με τον γεωμετρικό μέσο.

(β) Σε σχέση με το προηγούμενο υποερώτημα, οι δυο μάζες έχουν αλλάξει αλλά οι συντεταγμένες τους είναι οι ίδιες. Η συνολική μάζα είναι τώρα $M = 2 + 4 = 6\, kg$. Από τις Εξισώσεις 10.1 έχουμε:

$$x_{KM} = \frac{1}{M}(m_1 x_1 + m_2 x_2) = \frac{1}{6}(2 \times 1 + 4 \times 3) = 2.33\, m$$

$$y_{KM} = \frac{1}{M}(m_1 y_1 + m_2 y_2) = \frac{1}{6}(2 \times 0 + 4 \times 0) = 0\, m$$

Δηλαδή το Κ.Μ. "μετακινήθηκε" λίγο προς τα δεξιά σε σχέση με την προηγούμενη συμμετρική περίπτωση, ήλθε δηλαδή πιο κοντά προς την βαρύτερη μάζα. Αυτό είναι μια ιδιότητα του Κ.Μ., είναι δηλαδή ένας σταθμισμένος μέσος με βάση τη μάζα και έτσι βρίσκεται πλησιέστερα σε περιοχές με μεγάλη μάζα ή μεγάλη πυκνότητα μάζας.

(γ) Και πάλι οι δυο μάζες άλλαξαν αλλά οι συντεταγμένες είναι οι ίδιες. Η συνολική μάζα είναι τώρα $M = 4 + 8 = 12\, kg$. Από τις Εξισώσεις 10.1 έχουμε:

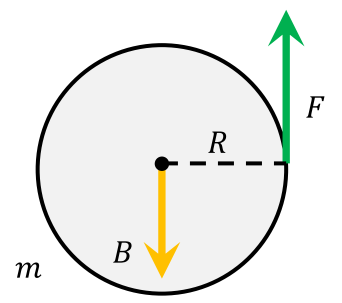
$$x_{KM} = \frac{1}{M}(m_1 x_1 + m_2 x_2) = \frac{1}{12}(4 \times 1 + 8 \times 3) = 2.33\, m$$

$$y_{KM} = \frac{1}{M}(m_1 y_1 + m_2 y_2) = \frac{1}{12}(4 \times 0 + 8 \times 0) = 0\, m$$

Δηλαδή το Κ.Μ. βρίσκεται στο ίδιο ακριβώς σημείο με την προηγούμενη περίπτωση. Αυτό δεν είναι τυχαίο, οι δυο μάζες έχουν την ίδια αναλογία 1:2 όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα. Επομένως οι συντεταγμένες του Κ.Μ. εξαρτώνται από τη σχετική και όχι την απόλυτη τιμή των μαζών.

Παράδειγμα 10.5

Στο παρακάτω σχήμα ένας φοιτητής εφαρμόζει μια κατακόρυφη εφαπτομενική δύναμη $F = 1.6\ N$ σε μια κοίλη μπάλα μάζας $0.1\ kg$ και ακτίνας $R = 0.12\ m$ για χρόνο 2 δευτερολέπτων. (α) Να αναλυθεί η κίνηση της μπάλας κατά την διάρκεια αυτού του χρόνου εάν η μπάλα αρχικά βρίσκεται σε ηρεμία και (β) να γίνει το ίδιο για τα επόμενα 2 δευτερόλεπτα. Έστω $g = 10\ m/s^2$ για ευκολία.



(α) Μεταφορική κίνηση:

Δυνάμεις βάρος $B = mg$ και F

$$\Sigma F = ma => F - mg = ma_{KM}$$

$$a_{KM} = \frac{F}{m} - g = 6\ m/s^2$$

Περιστροφική κίνηση, δυο δυνάμεις αλλά μια ροπή

$$\Sigma\tau = I\alpha => FR = I\alpha$$

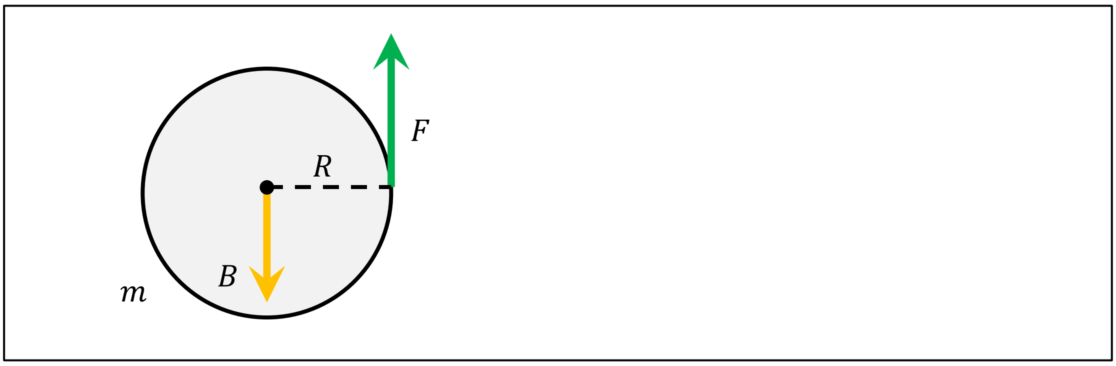
Για κοίλη σφαίρα

$$I = \frac{2}{3}MR^2$$

οπότε

$$FR = \frac{2}{3}MR^2\alpha$$

$$\alpha = \frac{3F}{2MR} = 20\, rad/s^2$$



Επιταχυνόμενη και προς τις δυο

$$y = \frac{1}{2} a_{KM} t^2$$

$$\varDelta\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2$$

Στο $t = 2\ s$

$$y = 12\ m$$

$$\varDelta\theta = 40\ rad$$

(β)