ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 :

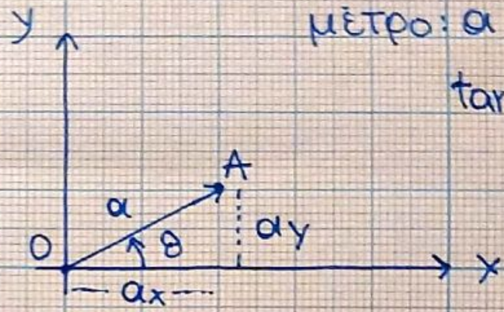
Κίνηση στις 2-διαστάσεις

Διανύσματα

μέτρο διεύθυνση

↓

μεταφέρονται (συνήθως στην αρχή των αξόνων)



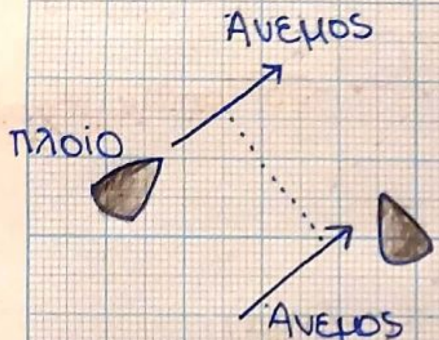
μέτρο: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

$\tan\theta = \frac{a_x}{a_y} \rightarrow \theta^*$

Οι συντεταγμένες του σημείου A είναι και οι συντεταγμένες του διανύσματος, όταν O : (0,0)

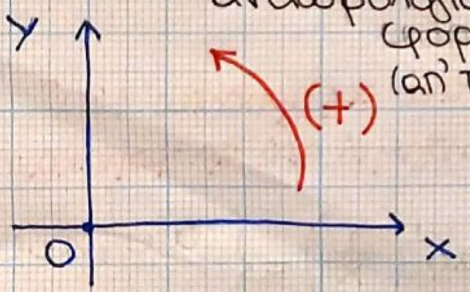
↓

$\vec{OA}$



Το διάνυσμα περιγράφετε είτε με τις συντεταγμένες του (a_x, a_y) είτε με το μέτρο $|\vec{a}|$ ή a και την φορά (γωνία) θ η οποία ξεκινά να μετράει από τον θετικό άξονα x

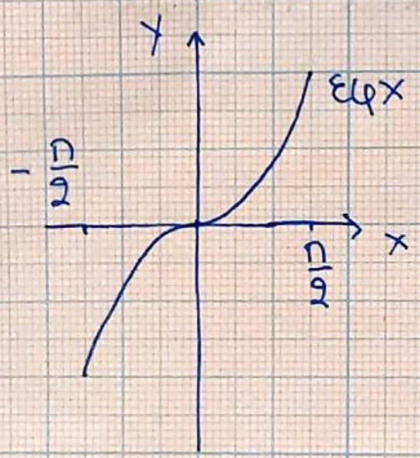
η γωνίες μετράνε θετικά με αντιωρολογιακή φορά (απ' του x'x)



θ=0 επάνω στον άξονα +x

ή atan(x)

* Τόξο εφαπτομένης: arctan(x) (είναι η αντίστροφη της εφ)



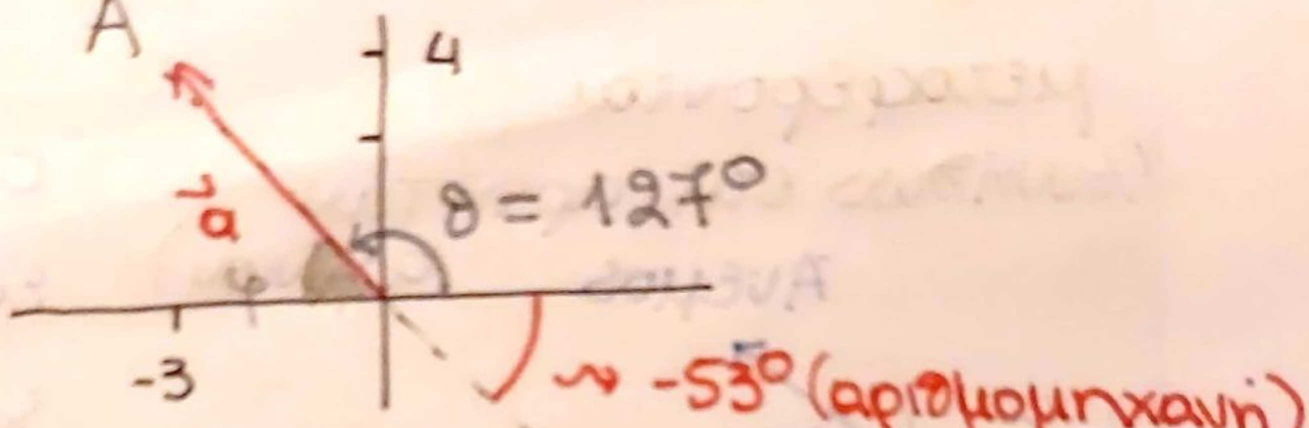
εφ45° = tan(45°) = 1

τοξεφ(1) = 45°

π.χ

$\theta = \tan^{-1}(0{,}75) = 38{,}9°$

$\vec{a} = (-3, 4)$



$\theta = 180^\circ - \varphi$

$\quad " = \pi - \varphi \quad (\text{rad})$

$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{4}{3} = +1{,}33$

★ Για αρνητικό x, προσθέτω 180°
(για τον υπολογισμό από αριθμομηχανή)

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \begin{cases} \text{calc}, & x \geq 0 \\ \text{calc} + 180^\circ, & x < 0 \end{cases}$$

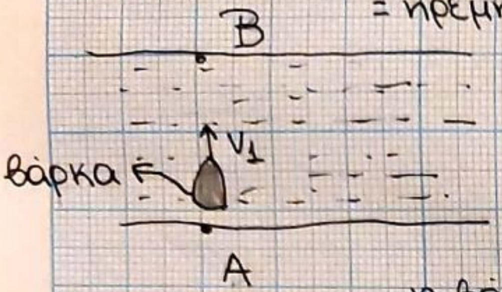
(εννοείται $|\theta| \leq 360^\circ$)

Πρόσθεση διανυσμάτων

Παράδειγμα

Ποτάμι (καλοκαιρινή ημέρα)

= ήρεμη ροή ποταμού



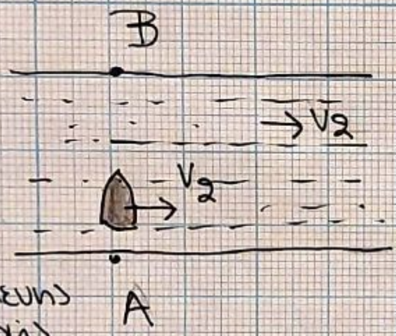
φάση α'' ~ηρεμίας~

$V_1 = 2\,m/s$

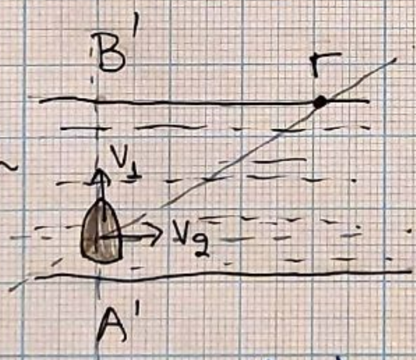
η βάρκα πηγαίνει ευθύγραμμα

φάση β' ~ύπνος βαρκάρη~ (χωρίς άγκυρα)

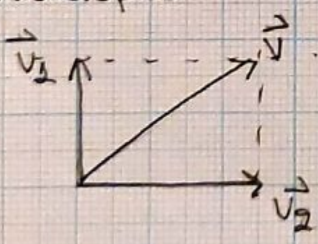
Τον παρασέρνει το νερό (λόγω της απρόσμενης αύξησης της ροής του ποταμού)



φάση γ' ~ξύπνημα ψαρά~ (άνοιγμα μηχανής της βάρκας)



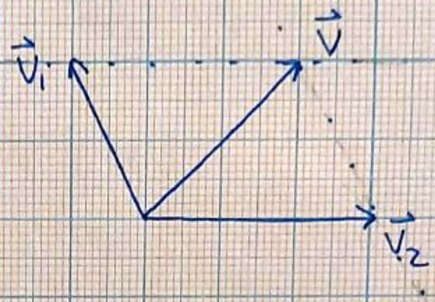
Συνδυασμός



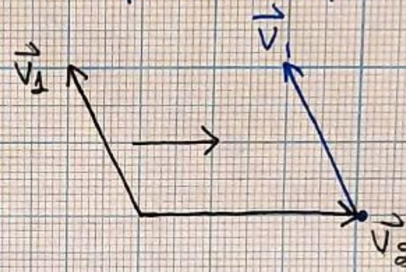
$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$

Εάν $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ σχηματίζουν γωνία α μεταξύ τους

1. Κανόνας παραλ/γράμμου



2. Πέρατος αρχής



φέρνω την αρχή του ενός στο πέρας του άλλου

ή

ενώνω την ελεύθερη αρχή με το ελεύθερο πέρας

Το διάνυσμα που προκύπτει έχει αρχή την ελεύθερη αρχή

Αποδεικνύεται ότι:

- $V_x = V_{1x} + V_{2x}$
- $V_y = V_{1y} + V_{2y}$

Έστω $\vec{V}_1 = (-4,3)$, $\vec{V}_2 = (2,2)$

★ Να βρείτε το μέτρο κ' τη γωνία της $\vec{V}$

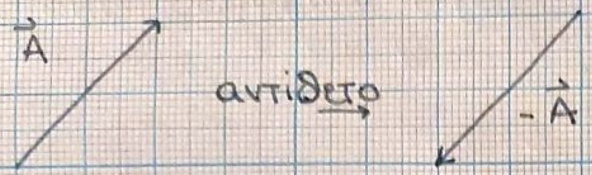
$\vec{V} = (-4+2,\ 3+2) = (-2,5)$ → αρνητικό x (προσθέτω 180°)

$\Rightarrow V = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$ m/s

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{-2}\right) \simeq -68^\circ + 180^\circ \simeq 112^\circ$

Αφαίρεση Διανυσμάτων

Έννοια



Έχουν ίδιο μέτρο $|\vec{A}| = |-\vec{A}|$

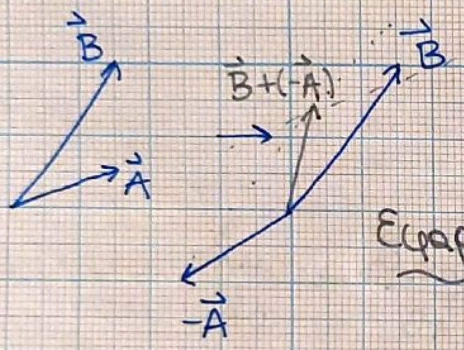
και αντίθετη φορά $\theta = \theta + 180°$

Μέτρο $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

και $\tan\theta = \dfrac{a_x}{a_y}$

Δηλαδή: $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

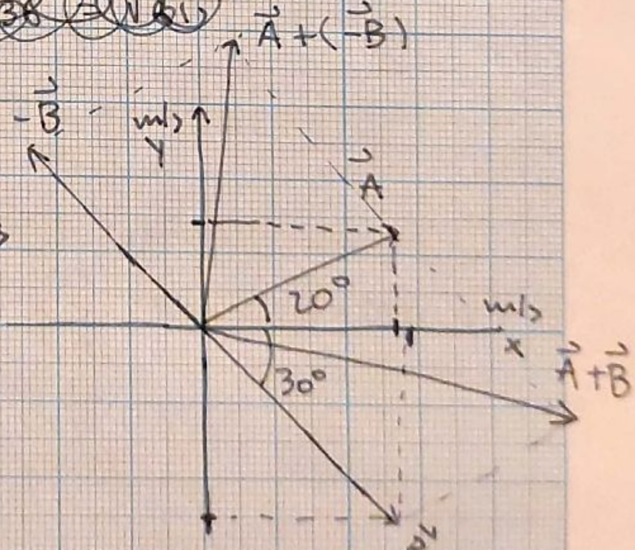
ή $\vec{B} - \vec{A} = \vec{B} + (-\vec{A})$



Εφαρμογή: Δίνονται

	ΜΕΤΡΟ	ΓΩΝΙΑ
$\vec{A}$:	5m/s	20°
$\vec{B}$:	6m/s	-35°

Βρείτε το μέτρο κ' την γωνία των: $\vec{A}+\vec{B}$, $\vec{A}-\vec{B}$



$A_x = A\cos 20° = 4,69 < 5$

$A_y = A\sin 20° = 1,71 < 5$ } m/s

$B_x = B\cos -35° = 4,91 < 6$

$B_y = B\sin -35° = -3,44 < 6$

$C_x = A_x + B_x = 9,60$ m/s

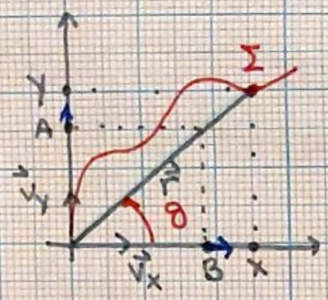
$C_y = A_y + B_y = -1,73$ m/s

$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \sqrt{(9,6)^2 + (1,73)^2} = 9,75$ m/s

$\tan\theta_C = \dfrac{C_y}{C_x} =$

$\tan^{-1}(\ ) = -10,2°$

18-10-23



Σε τυχαίο Σ σώμα βρίσκεται στο σημείο

$\vec{r} = (x, y)$ $\quad x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

Ορίζουμε $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(x,y)}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (x'(t), y'(t)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = (v_x, v_y)} \Rightarrow \vec{v} = (x', y')$

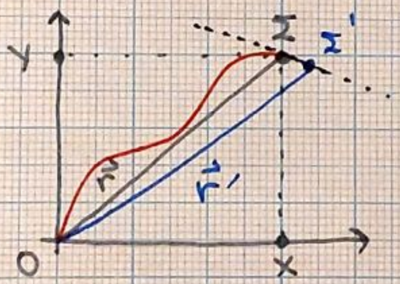
επιτάχυνση σημείου B

Ορίζουμε $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}\right) = (a_x, a_y)$

επιτάχυνση σημείου A

Γεωμετρική ερμηνεία της ταχύτητας

Σε χρόνο t, Σ, $\vec{r}$ για να δω που θα πάει το επόμενο μικροδευτερόλεπτο φέρνω μια εφαπτομένη



$t + dt$, Σ', $\vec{r}\,'$

$\vec{Σ'Σ} = \vec{r}\,' - \vec{r} \Rightarrow \boxed{\vec{Σ'Σ} = d\vec{r}}$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\frac{1}{dt}}_{>0 \text{ θετικός}} \cdot d\vec{r}$

διάνυσμα · θετικό : παράλληλο

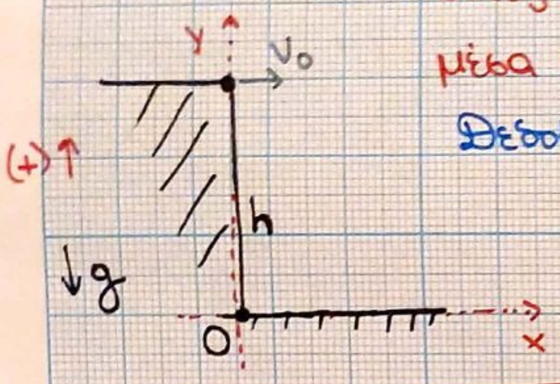
$\vec{v} \parallel d\vec{r} \rightsquigarrow \vec{v} \parallel \vec{Σ'Σ} \rightarrow$

$\rightsquigarrow$ v' κατά μήκος της εφαπτομένης

Scanned with CamScanner

Εφαρμογή: Οριζόντια Βολή

Εκτοξεύω σώμα οριζόντια από ύψος h μέσα σε πεδίο βαρύτητας. Να βρεθούν $x(t), y(t)$



Δεδομένα $t=0$: $x(0)=0 \quad v_x(0)=v_0$

$y(0)=h \quad v_y(0)=0$

$a_x=0 \quad a_y=-g$

Σύμφωνα με τους νόμους του Νεύτωνα, όταν δεν υπάρχει ασκούμενη δύναμη στο σώμα, δεν υπάρχει επιτάχυνση!!!

Ξεκινάω ανάποδα

$a_x=0 \rightsquigarrow$ ολοκληρώνω

$v_x = \underset{\text{σταθερό}}{c} = v_0 \Rightarrow \boxed{v_x=v_0}$

$a_y=-g \xrightarrow{\text{ολοκληρώνω}} v_y=-gt+c'$ για $t=0$: $v_y(0)=0 \rightsquigarrow \boxed{c'=0}$

$$\boxed{v_y=-gt}$$

→ Ολοκληρώνω ξανά

$$\boxed{x=v_0 \cdot t}$$

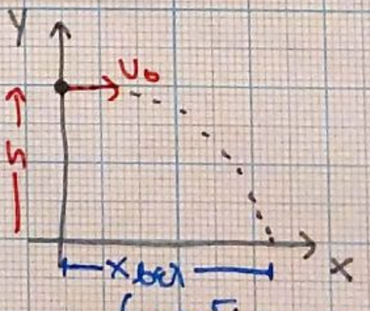
$y=-\frac{1}{2}gt^2+c''$ για $t=0$: $y=h \Rightarrow \boxed{c''=h}$

$$\boxed{y=-\frac{1}{2}gt^2+h}$$

Να βρεθεί η τροχιά του κινητού $\Rightarrow$ απαλείφω τον χρόνο

$x=v_0 t \Rightarrow t=\frac{x}{v_0}$

$y=h-\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y=h-\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2}$



πεδίο ορισμού

Να βρεθεί ο χρόνος πτώσης (θεωρείστε οριζόντιο δάπεδο) και το βεληνεκές (μέγιστο x)

Όταν πέσει στο έδαφος τότε $y=0 \Rightarrow h-\frac{1}{2}gt^2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}gt^2=h \Rightarrow t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$

στον άξονα y έχουμε ελεύθερη πτώση αφού δεν ξεκινά με v_{0y}

Βεληνεκές:

$$x_{max} = x_{βελ} = v_0 \, t_{τελ} = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

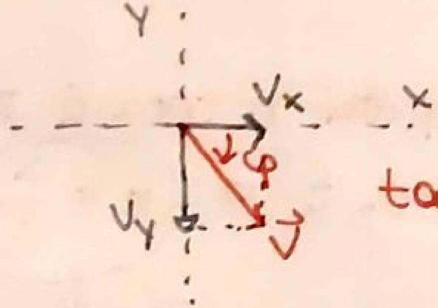
όσο μεγαλύτερη η αρχική ταχύτητα τόσο μεγαλύτερο το βεληνεκές, το ίδιο και για το αρχικό ύψος

↳ ενώ για το g, όσο μικρότερο τόσο αυξάνεται ο χρόνος "πτήσης"

?Bonus? Να βρεθεί η γωνία της ταχύτητας σε χρόνο $t = t_{max}^{-}$ "λίγο πριν την πτώση"

$$v_x = v_0$$

N(t) $$v_y = -gt = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$$



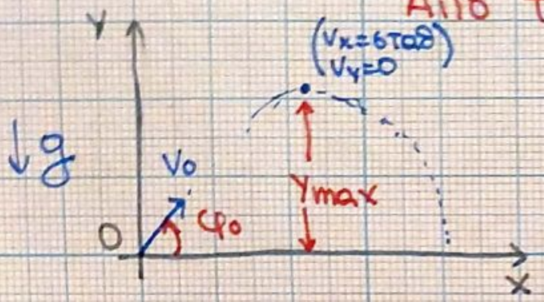
$$\tan\varphi = \frac{v_y}{v_x}$$

$$\Rightarrow \tan\varphi = -\frac{\sqrt{2gh}}{v_0}$$

Scanned with CamScanner

Εφαρμογή 2: Βολή με τυχαία αρχική γωνία φ_0

Από το O(0,0) σε πεδίο βαρύτητας.



Αρχικές συνθήκες: για να βρω $v(t)$, $x(t)$

$t=0$: $x(0)=0 \quad y(0)=0$

! $\boxed{v_x(0) = v_{x0} = v_0 \cos\varphi_0}$! : σταθ

$v_y(0) = v_{y0} = v_0 \sin\varphi_0$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ $\quad a_x = 0 \quad a_y = -g$

$$\begin{cases} v_x = v_{x0} = v_0 \cos\varphi_0 : \text{σταθερό} \\ v_y = -gt + v_{y0} \end{cases}$$

Ξανά ολοκληρώνω

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{y0} t \end{cases}$$

Να βρεθεί ο χρόνος στο μέγιστο ύψος και το μέγιστο ύψος.

Στο μέγιστο ύψος $v_y = 0 \Rightarrow$

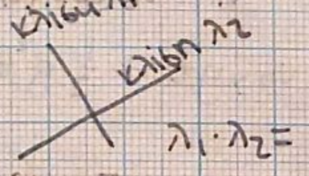
$$\Rightarrow -g t_1 + v_{y0} = 0 \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{v_{y0}}{g} = \frac{v_0 \sin\varphi_0}{g}}$$

$$h_{max} = y_{max} = -\frac{1}{2} g t_1^2 + v_{y0} t_1 = -\frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2\varphi_0}{g^2} + \frac{v_0^2 \sin^2\varphi_0}{g}$$

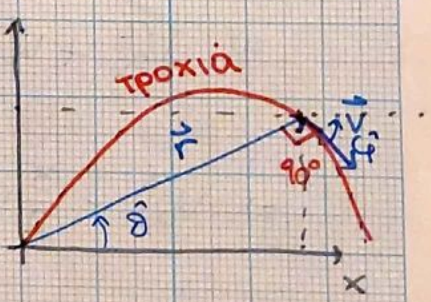
$$= \frac{v_0^2 \sin^2\varphi_0}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\varphi_0}{g} = \boxed{\frac{v_0^2 \sin^2\varphi_0}{2g}}$$

! Bonus !

Σε ποιο σημείο στην τροχιά, η $\vec{v}$ γίνεται κάθετη στο διάνυσμα θέσης $\vec{r}$;



$\lambda_1 \cdot \lambda_2 =$



{όταν δύο διανύσματα είναι κάθετα το εσωτερ. τους γινόμενο είναι 0.}

$\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$ → το ξέρουμε

$A_x B_x + A_y B_y = \vec{A}\vec{B}$

★ $x \cdot v_x + y v_y = 0$, με $x \to v_{0x} t$, $v_x \to v_{0x}$, $y \to v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$, $v_y \to v_{0y}$

όταν δύο ευθείες είναι κάθετες: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

$\tan\delta \cdot \tan\varphi = -1$

↳ κλίση : $\frac{y}{x} =$ εφω

$$\left.\frac{y}{x} \cdot \frac{v_y}{v_x} = -1 \right\} \Rightarrow y v_y = -x v_x \text{ ★}$$

ίδιος τρόπος

$\vec{v}$: γωνία φ

$\vec{r}$: γωνία θ

$$\tan\varphi \cdot \tan\theta = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_y}{v_x} \cdot \frac{y}{x} = -1 \Rightarrow \frac{v_0 \sin\varphi_0 - gt}{v_0 \cos\varphi_0} \cdot$$

Έχουμε: $v_{0x} \cancel{t} \cdot v_{0x} + (v_{0y}\cancel{t} - \frac{1}{2} g t^2)(v_{0y} - g t) = 0$

$$\xrightarrow[t \neq 0]{\div t} v_{0x}^2 + (v_{0y} - \frac{1}{2} g t)(v_{0y} - g t) = 0$$

$= v_0^2$ ή $v_0^2(\cos\varphi_0)^2 + v_0^2(\sin\varphi_0)^2 = v_0^2(\overset{1}{\cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0})$

$$\Rightarrow v_{0x}^2 + v_{0y}^2 - \frac{3}{2} v_{0y} g t + \frac{1}{2} g^2 t^2 = 0$$

$$\Rightarrow v_0^2 - \frac{3}{2} v_{0y} g t + \frac{1}{2} g^2 t^2 = 0$$

$$\overset{\cdot 2}{\Rightarrow} g^2 t^2 - 3 v_{0y} g t + 2 v_0^2 = 0$$

$\sin\varphi_0 > \frac{2\sqrt{2}}{3}$ για να ισχύει

$$\Delta = 9 v_{0y}^2 g^2 - 4 g^2 2 v_0^2 = 9 v_0^2 \sin^2\varphi_0 g^2 - 8 g^2 v_0^2 = v_0^2 g^2 (9\sin^2\varphi_0 - 8) > 0$$

για να υπάρχει αυτό το σημείο

Διαφορετικά, αν η αρχική ταχύτητα είναι μικρή, η γωνία είναι μικρή

19-10-23

$$g^2t^2 - 3v_0 g t + 2v_0^2 = 0$$

$$\Delta = v_0^2 g^2 (9\sin^2\varphi_0 - 8) > 0 \rightarrow \sin\varphi_0 > \frac{2\sqrt{2}}{9} \rightarrow \varphi_0 > 70^\circ$$

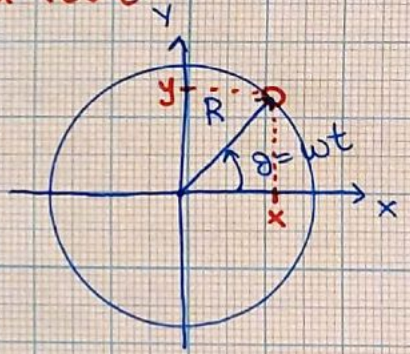
άρα $$t = \frac{3v_0 \cancel{g} \pm v_0 \cancel{g}\sqrt{9\sin^2\varphi_0 - 8}}{2g^{\cancel{2}}} = \frac{v_0}{g}\,\frac{3\sin\varphi_0 \pm \sqrt{9\sin^2\varphi_0 - 8}}{2}$$

$(3\sin\varphi_0)^2$

Εφαρμογή 3: Κυκλική κίνηση (όταν η ακτίνα είναι σταθερή)

i) Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης για υλικό σημείο (x, y, v_x, v_y, a_x, a_y) που κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R, με τυχαία γωνία $\vartheta(t)$ ως προς τον άξονα x.

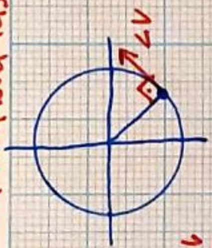
1. εξετάζουμε $\vartheta = \omega t$ (ομαλή κυκλική κίνηση)
2. —״— $\vartheta(t)$: τυχαία συνάρτηση του t



διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ $\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\sin(\omega t) \end{cases}$

Παραγωγίζω

ii. Να δείξετε ότι η ταχύτητα είναι εφαπτόμενη της τροχιάς



$v_x(t) = x'(t) = -\omega R \sin(\omega t)$

$v_y(t) = y'(t) = \omega R \cos(\omega t)$

$\vec{r} \perp \vec{v} \rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ | $\rightsquigarrow$ $\begin{cases} \vec{r} = (x, y) & \text{κλίση } \frac{y}{x} \\ \vec{v} = (v_x, v_y) & \text{κλίση } \frac{v_y}{v_x} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} \cdot \frac{v_y}{v_x} = \frac{R\sin(\omega t)}{R\cos(\omega t)} \cdot \frac{R\omega\cos(\omega t)}{-R\omega\sin(\omega t)} = -1 \quad \text{άρα } \vec{r} \perp \vec{v}$$

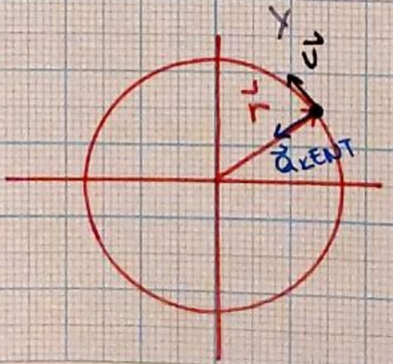
Επιτάχυνση $\begin{cases} a_x(t) = v_x'(t) = -R\omega^2 \cos(\omega t) = -\omega^2 x \\ a_y(t) = v_y'(t) = -R\omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 y \end{cases}$ $\boxed{\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}} \Rightarrow$

αντιπαράλληλα

$|\vec{a}| = \omega^2 |\vec{r}| = \omega^2 R$

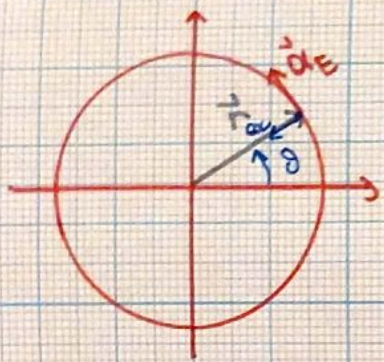
$\Rightarrow$ $\vec{a}$ αντι// $\vec{r}$ άρα

$\vec{a} = \vec{a}$ κεντρομόλος



$\vec{a}$ παράλληλο με το $\vec{r}$ κ' έχουν αντίθετη κατεύθυνση

ii) Κυκλική κίνηση για τυχαίο $\theta(t)$



$$\left.\begin{array}{l} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} v_x = -R\sin\theta\cdot\theta' = -R\theta'\sin\theta \\ v_y = +R\cos\theta\cdot\theta' = +R\theta'\cos\theta \end{array}\right\}$$

και πάλι $\vec{v} \perp \vec{r}$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_x = v_x' = -R\theta''\sin\theta - R(\theta')^2\cos\theta \\ a_y = v_y' = R\theta''\cos\theta - R(\theta')^2\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

ίδιο από πριν

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{\theta''}{\theta'}\vec{v} - (\theta')^2\vec{r}$$

25-10-23

Πρόβλημα 2.12

Ένα υλικό σημείο κινείται στο επίπεδο με επιτάχυνση η οποία έχει συνιστώσες που δίνονται από τις $a_x(t) = b\sin(\omega t)$ κ $a_y(t) = d\cos(\omega t)$ όπου οι b, d και ω σταθερές >0. Τη χρ. στιγμή $t=0$ το κινητό κινείται προς τον αρνητικό άξονα x με ταχύτητα μέτρου $|u| = b/\omega$ και περνάει από την αρχή των αξόνων. Να σχεδιαστεί όσο το δυνατό πιο λεπτομερώς η τροχιά του κινητού για $t>0$.

Λύση:

Δεδομένα

$a_x = b\sin\omega t$

$a_y = d\cos\omega t$

Αρχ. Συνθήκη

$t=0$: $\leftarrow$ κινείται αριστερά, περνάει από το $(0,0)$

με $u = \frac{b}{\omega}$

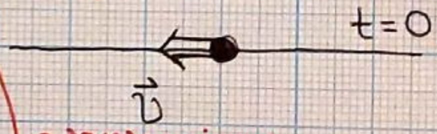
ολοκληρώνω

$$v_x = -\frac{b}{\omega}\cos\omega t + C_1 \qquad v_y = +\frac{d}{\omega}\sin\omega t + C_2$$

$t=0$

$$v_x = -\frac{b}{\omega} + C_1 \qquad v_y = 0 + C_2$$

$v_x = -\frac{b}{\omega}$ από τα δεδομένα $\rightarrow$ $\boxed{C_1 = 0}$



$v_y = 0$, αφού πηγαίνει οριζόντια σύμφωνα με την εκφώνηση $\Rightarrow$ $\boxed{C_2 = 0}$

ολοκληρώνω

$$\left.\begin{array}{l} v_x = -\frac{b}{\omega}\cos\omega t \\ v_y = +\frac{d}{\omega}\sin\omega t \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} x = -\frac{b}{\omega^2}\sin\omega t + C_3 \\ y = -\frac{d}{\omega^2}\cos\omega t + C_4 \end{array}$$

Αρχ. συνθήκη

$t=0$, το κινητό περνά από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$

$$t=0: \quad 0 = C_3, \quad C_4 = d/\omega^2 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{\omega^2}\sin\omega t, \quad y = \frac{d}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$$

Ζητάει την τροχιά, ΑΡΑ πρέπει να ξεφορτωθούμε τον χρόνο

$$\left.\begin{aligned} -x\frac{\omega^2}{b} &= \sin\omega t \\ \left(y-\frac{d}{\omega^2}\right)\frac{\omega^2}{d} &= -\cos\omega t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} -x\frac{\omega^2}{b} &= \sin\omega t \\ 1 - y\frac{\omega^2}{d} &= \cos\omega t \end{aligned}$$

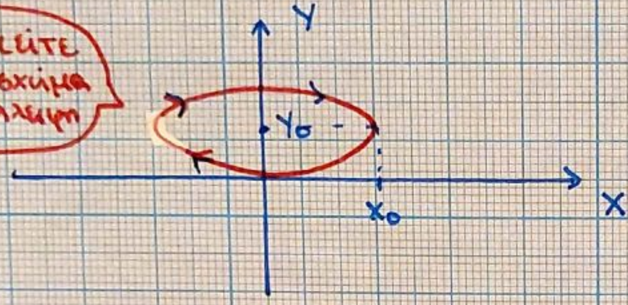
[ξέρουμε $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$]

Θέτω $x_0 = \frac{b}{\omega^2}$ $\quad y_0 = \frac{d}{\omega^2}$

$$\Rightarrow \left(-\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(1-\frac{y}{y_0}\right)^2 = \underbrace{\sin^2\omega t + \cos^2\omega t}_{1} \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{(y-y_0)^2}{y_0^2} = 1}$$

έλλειψη με μετατοπισμένο το κέντρο προς τα πάνω

φανταστείτε ότι το σχήμα είναι έλλειψη



Κεφάλαιο 3: Μηχανικές Δυνάμεις

(I) ΒΑΡΟΣ $\rightarrow \vec{B} = -mg\vec{e}_y$

(II) ΤΑΣΗ ΝΗΜΑΤΟΣ

(III) ΚΑΘΕΤΗ ΑΝΤΙΔΡΑΣΗ

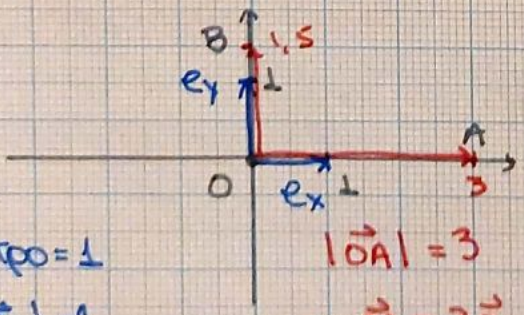
(IV) ΤΡΙΒΗ

(V) ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ

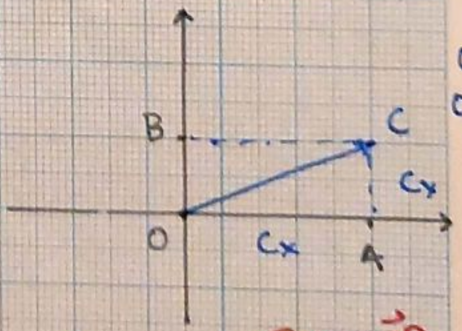
(VI) ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΡΟΧΑΛΙΩΝ

ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

↳ διανύσματα με μέτρο μονάδα



$\Rightarrow$



OA: C_x
OB: C_y

Μέτρο = 1

$|\vec{e}_x| = 1$

$|\vec{e}_y| = 1$

$|\vec{OA}| = 3$

$\Rightarrow \vec{OA} = 3\vec{e}_x$

έκφραση την φορά

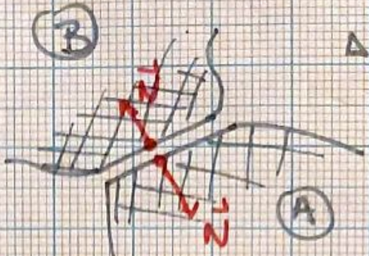
Ομοίως $|\vec{OB}| = 2$

$\Rightarrow \vec{OB} = 2\vec{e}_y$

$\vec{OC} = \vec{OA} + \underbrace{\vec{AC}}_{=\vec{OB}}$

$\Rightarrow \vec{OC} = C_x\vec{e}_x + C_y\vec{e}_y$

Δυνάμεις Επαφής

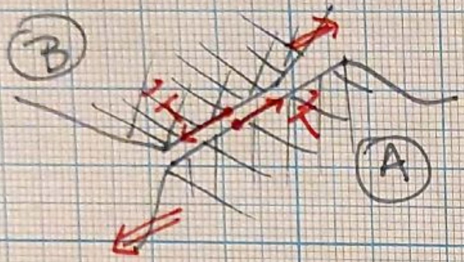


Δύο σώματα σε επαφή Α και Β

Εάν δεν κινούντε δημιουργείται μόνο η κάθετη αντίδραση
δεν έχει συγκεκριμένο τόπο,
ξέρουμε μόνο τη φορά της, ότι η δύναμη είναι κάθετη στην επιφάνεια επαφής

II) Δυνάμεις δράσης-αντίδρασης

(IV) Τριβή



Εάν υπάρχει και σχετική κίνηση μεταξύ των δύο επιφανειών, τότε εμφανίζεται μεταξύ τους δύναμη τριβής (ολισθαίνει η μία ως προς την άλλη ή τείνουν να κινηθούν)

Η τριβή έχει φορά αντίθετη της φοράς κίνησης

Η κάθετος αντίδραση αυτοπροσαρμόζεται, λόγω της δράσης-αντίδρασης.

Υπάρχουν δύο είδη τριβών → Εάν υπάρχει κίνηση (ολίσθηση)

Τριβή Ολίσθησης

$T = \mu \cdot N$, μ: συντελεστής ολίσθησης

Εάν δεν υπάρχει κίνηση, αλλά τάση για κίνηση

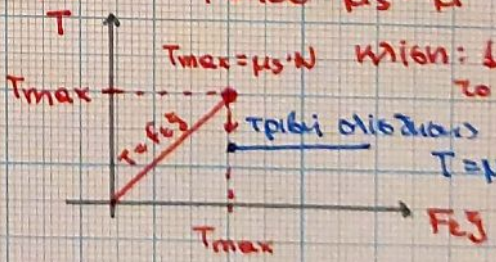
Στατική Τριβή

$$T = F_{εξωτ} \xrightarrow[\text{όριο}]{\text{μέχρι}} T_{op} = T_{max} = \mu_s \cdot N$$

, όπου $\mu_s > \mu$

$F_{εξωτ}$: δύναμη που προσπαθεί να προκαλέσει κίνηση

μ_s: συντελεστής στατικής τριβής

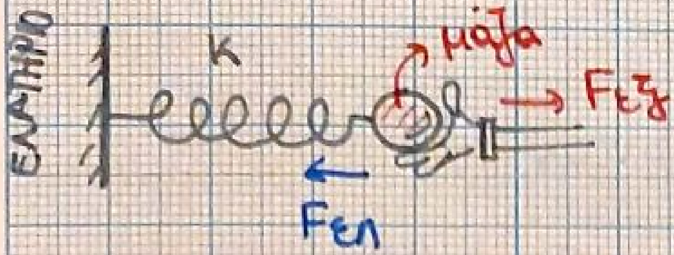


κλίση: 1 μέχρι το Tmax

$\mu_s > \mu$

$$T = \begin{cases} F_{εξ}, & F_{εξ} \le T_{max} = \mu_s \cdot N \\ \mu \cdot N, & F_{εξ} > T_{max} \end{cases}$$

(V) Δύναμη Ελατηρίου

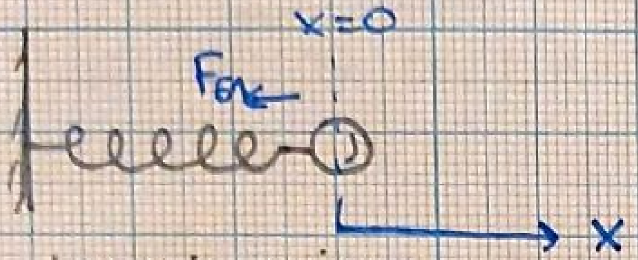


Εάν παραμορφώνω αργά $F_{εξ} \simeq F_{ελ}$

Δύναμη επαναφοράς: $F_{ελ} = -Kx$

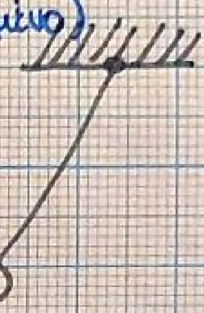
τείνει να επαναφέρει την κατάσταση του ελατηρίου στο $x=0$

$F_{ελ} = K\vec{x}$



φυσικό μήκος

(II) Δύναμη του Νήματος (Τανισμένο → Τεντωμένο)



Για ιδανικό (αβαρές) νήμα, η τάση του νήματος N είναι η ίδια κατά μήκος του νήματος.

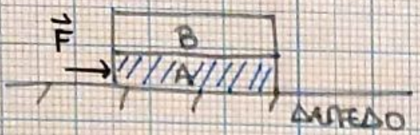
μη-εκτατό

Η φορά της είναι κατά μήκος του νήματος $T \parallel$ νήμα

Αν νήμα μη-τανισμένο (χαλαρό) ή κοπεί: $T=0$

26-10-23

Πείραμα με δύο βιβλία



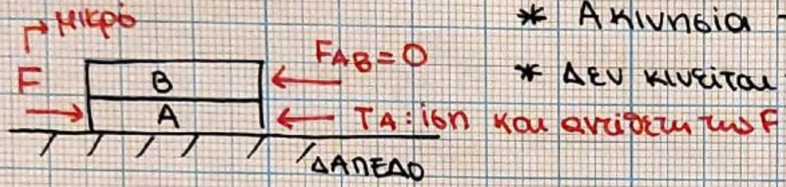
i) F: μικρό ⇝ στατική ισορροπία

ii) F: μέτριο ⇝ υπάρχει ολίσθηση

iii) F: μεγάλο ⇝ το A κινείται γρηγορότερα του B

Ποιοτικά: τι οριζόντιες δυνάμεις έχουμε στις τρεις περιπτώσεις

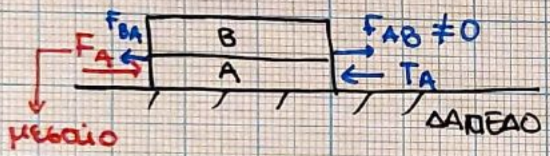
i)



* Ακινησία του A, επειδή $F - T_A = 0$
* Δεν κινείται το B ⇒ $F_{AB} = 0$

* T_A: στατική τριβή

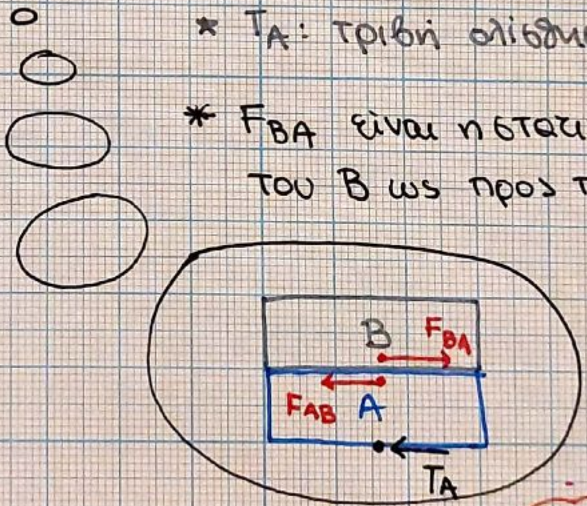
ii) Οριακά στην έναρξη της κίνησης: Σώματα A, B κινούνται ως ενιαίο σώμα



$F = \mu_s \cdot N$

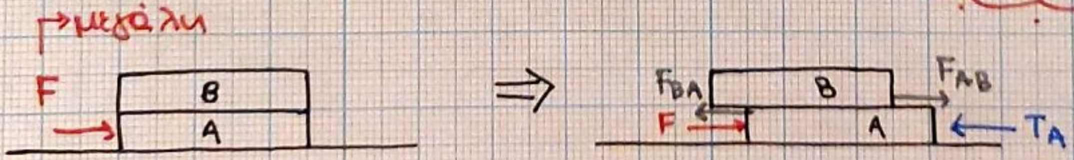
$N = (m_A + m_B) g$

* F_{BA}: ίση και αντίθετη σε μέτρο της F_{AB} $\quad F_{AB} = F_{BA}$
* T_A: τριβή ολίσθησης
* F_{BA} είναι η στατική τριβή του B ως προς το A



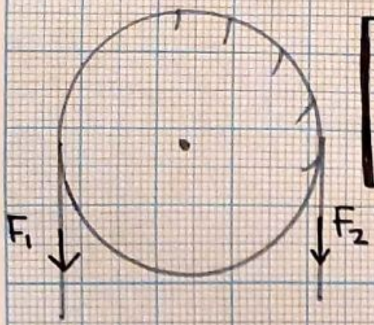
iii) Οριακά θ' αρχίσουν να ολισθαίνουν όταν: $F_{AB} = \mu_s \cdot N_B$ όπου $N_B = m_B \cdot g$ ΟΡΙΑΚΑ

Τότε τερματίζει η στατική τριβή κ' ξεκινά η τριβή ολίσθησης



* F_{AB}: τριβή ολίσθησης, $F_{AB} = \mu N_B = \mu m_B g$
* T_A: τριβή ολίσθησης, $T_A = \mu N = \mu (m_A + m_B) g$

VI) ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΡΟΧΑΛΙΩΝ (Τάση τροχαλίας)



$\boxed{F_1 = F_2}$ στην ιδανική τροχαλία

Ιδανική Τροχαλία ⟨ Δίσκος + νήμα

i) ο δίσκος δεν έχει βάρος

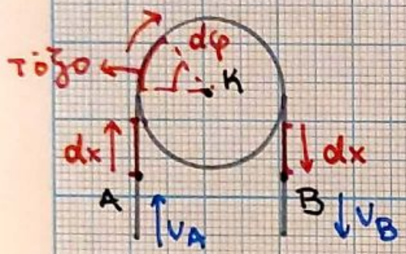
ii) το νήμα είναι "ιδανικό"

iii) το νήμα δεν ολισθαίνει ως προς την τροχαλία (στατική τριβή μεταξύ δίσκου-νήματος)

1ος Τρόπος Σύνδεσης

↳ κέντρο Κ: ακίνητο

↳ ελεύθερη περιστροφή



* Σε χρόνο dt όσο dx "μαζεύεται" στην μία πλευρά, τόσο dx "απελευθερώνεται" απ' την άλλη

$|v_A| = |v_B|$
αντίθετες

* Το ευθύγραμμο τμήμα dx γίνεται τόξο $d\varphi$ όπου $\boxed{dx = d\varphi \cdot (\underbrace{\text{ακτίνα}}_{r})}$, μόνο σε rad

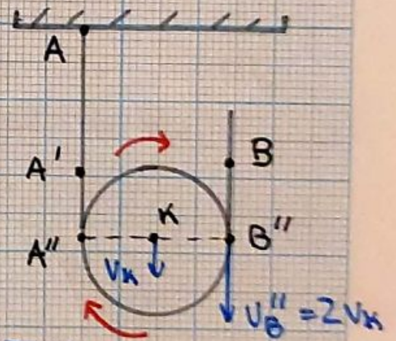
2ος Τρόπος Σύνδεσης : στήριξη νήματος

σαν την περίπτωση κύλισης

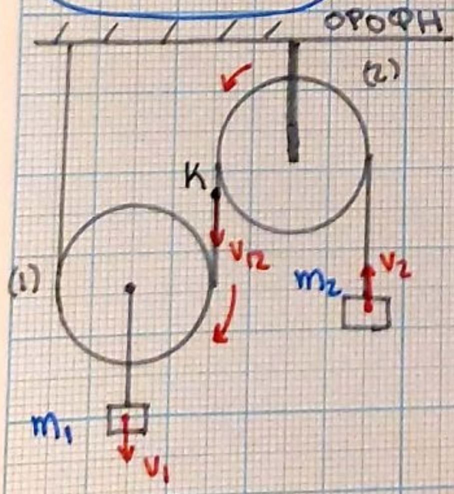
Στερεώνω ένα σημείο Α του νήματος

$v_A = v_A' = v_A'' = 0$

κ' $v_B'' = 2v_K$



Παράδειγμα



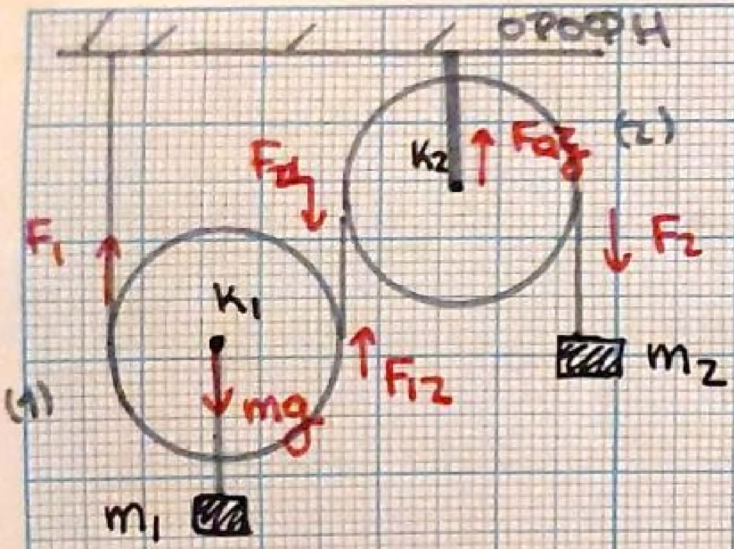
* Εάν η m_1 κατέρχεται με ταχύτητα v_1, τότε η v_1 είναι και η ταχύτητα του κέντρου μάζας της τροχαλίας (1) τότε το σημείο Κ κατέρχεται με $v_{12} = 2v_1$

* $v_2 = -v_{12} = -2v_1$

↳ $v_2 = -2v_1 \xrightarrow{\text{παραγωγίζω}} \frac{dv_2}{dt} = -2\frac{dv_1}{dt} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a_2 = -2a_1}$

! EXTRA ! Έστω m_1, m_2 τέτοιες που επέρχεται ισορροπία στο σύστημα. Να βρεθούν οι δυνάμεις στα νήματα:



(1): Στο κέντρο ασκείται $m_1 g$.

$$m_1 g = F_1 + F_2$$

* ιδανικές τροχαλίες: οι δυνάμεις εκατέρωθεν είναι ίσες

$$\boxed{F_1 = F_{12} = \frac{m_1 g}{2}}$$

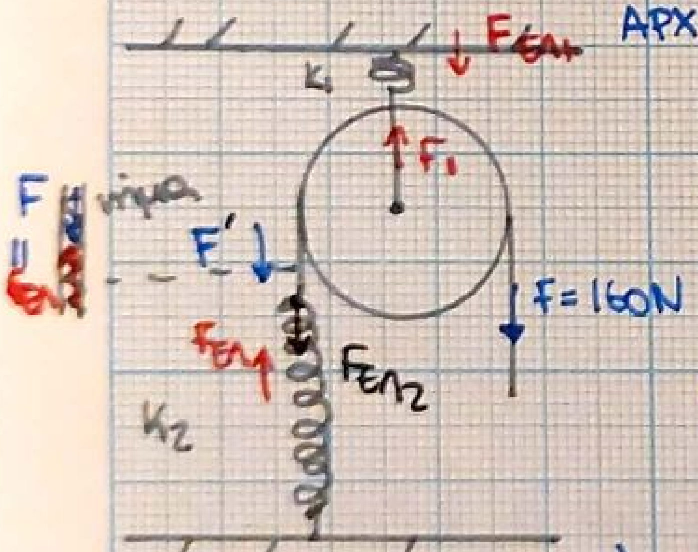
* $F_{21} = F_{12}$: δράση-αντίδραση

(2): $\left.\begin{array}{l} F_{21} = -\dfrac{m_1 g}{2} \\ F_2 = m_2 g \end{array}\right\}$ ιδανική τροχαλία ⇝ $\boxed{F_{αξ} = F_{21} + F_2}$

$$\boxed{\frac{m_1}{2} = m_2}$$

01-11-23

Άσκηση $F = 160N$ $k_1 = 500 N/m$ $k_2 = 200 N/m$



ΑΡΧ: Ισορροπία

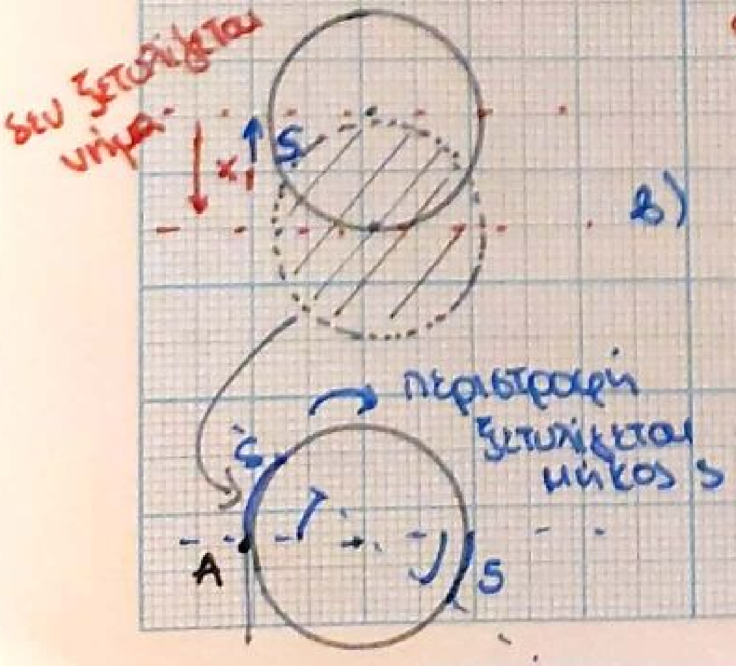
ιδανική τροχαλία: $F' = F = 160N = F_{ελ_2}$

$$k_2 = F_{ελ_2} \cdot x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{F_{ελ_2}}{k_2} = \frac{160}{200} = 0{,}8m$$

Να βρεθεί α) η $F_{ελ_1}$ γ) Δx νήματος
β) το x_1

α) ισορροπία τροχαλίας: $F_1 - F - F' = 0 \Rightarrow \boxed{F_1 = 2F}$

δράση - αντίδραση $F_{ελ_1} = F_1 = 2F = 320N$

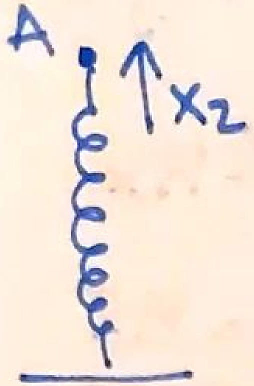


β) $x_1 = \frac{F_{ελ1}}{k_1} = \frac{320}{500} \Rightarrow \boxed{x_1 = 0{,}64m}$

γ) Σημείο Α: $\downarrow x_1$ λόγω 1ης κίνησης

$\uparrow s$ λόγω 2ης κίνησης

Άρα συνολικά $\Delta x_A = s - x_1$, όμως το Α είναι συνδεδεμένο με το ελ(2) → μετακινείται κατά $x_2 \uparrow$



Οι δύο μετακινήσεις ταυτίζονται

$$x_2 = S - x_1 \Rightarrow S = x_1 + x_2 \Rightarrow \underline{S = 1{,}44\,m}$$