



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Φυσική Ι

Ενότητα 10: Σύνθετη κίνηση

Κουζούδης Δημήτρης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Χημικών Μηχανικών

Σκοποί ενότητας

- Ανάλυση σύνθετων κινήσεων (υλικών σημείων και σωμάτων) σε μεταφορική και περιστροφική
- Ορισμός και εξοικείωση μέσω παραδειγμάτων με την έννοια της κύλισης (χωρίς και με ολίσθηση)
- Αξιοποίηση του θεωρήματος έργου-ενέργειας στην κύλιση
- Ορισμός κέντρου μάζας υλικών σημείων και στερεού σώματος



Περιεχόμενα ενότητας

- Σύνθετη κίνηση
 - Παραδείγματα
- Κύλιση
 - Παραδείγματα
- Κύλιση με ολίσθηση
- Θεώρημα έργου-ενέργειας στη κύλιση
 - Παράδειγμα
- Κέντρο μάζας
 - Παράδειγμα

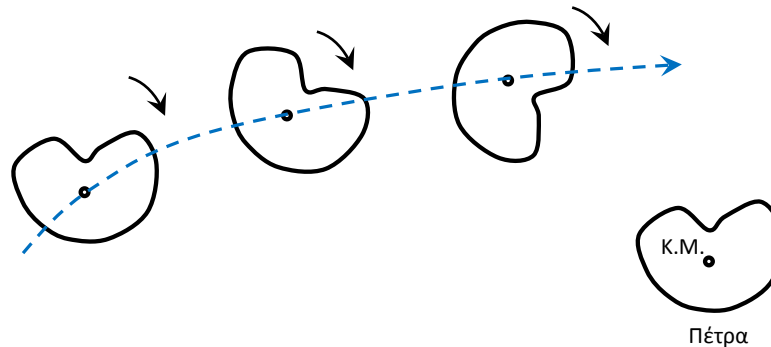


Σύνθετη κίνηση

Στερεό σώμα

Σύνθετη κίνηση

Οποιαδήποτε κίνηση μπορεί να αναλυθεί σε δύο κινήσεις



1. Μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας

$$\Sigma \vec{F} = M \vec{a}$$

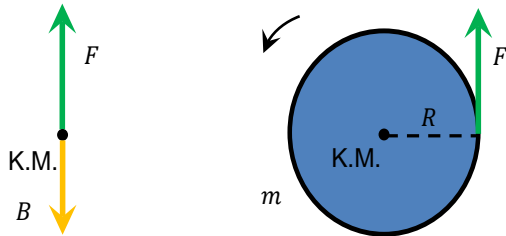
2. Περιστροφική κίνηση του κέντρου μάζας

$$\Sigma \tau = I \alpha$$



Παράδειγμα 1

Στο παρακάτω σχήμα ένας φοιτητής εφαρμόζει μια κατακόρυφη εφαπτομενική δύναμη $F=1.6 \text{ N}$ σε μια μπάλα μάζας 0.1 kg και ακτίνας $R=0.12 \text{ m}$ για χρόνο 2 δευτερολέπτων. α) Να αναλυθεί η κίνηση της μπάλας κατά την διάρκεια αυτού του χρόνου εάν η μπάλα αρχικά βρίσκεται σε ισορροπία και β) να γίνει το ίδιο για τα επόμενα 2 δευτερόλεπτα.



$$\Sigma F = ma_{KM} \Rightarrow F - B = ma_{KM} \Rightarrow a_{KM} = \frac{1.6 - 1.0}{0.1} = 6 \text{ m/s}^2$$

$$v = a_{KM}t$$

$$v_1 = 6 \times 2 = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

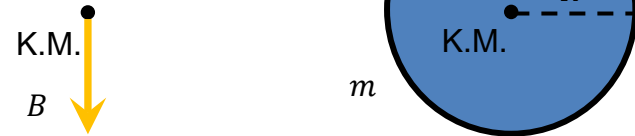
$$\tau = FR = 1.6 \times 0.12 = 0.192 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$I = \frac{2}{3}mR^2 = \frac{2}{3} \cdot 0.1 \times 0.12^2 = 0.0096 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\Sigma \tau = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{0.192}{0.0096} = 20 \text{ rad/s}$$

$$\omega = \alpha t$$

$$\omega_1 = 20 \times 2 = 40 \text{ rad/s.}$$



$$v = v_1 - g(t - 2)$$

$$v_1 = 12 - 10 \times (4 - 2) = -8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

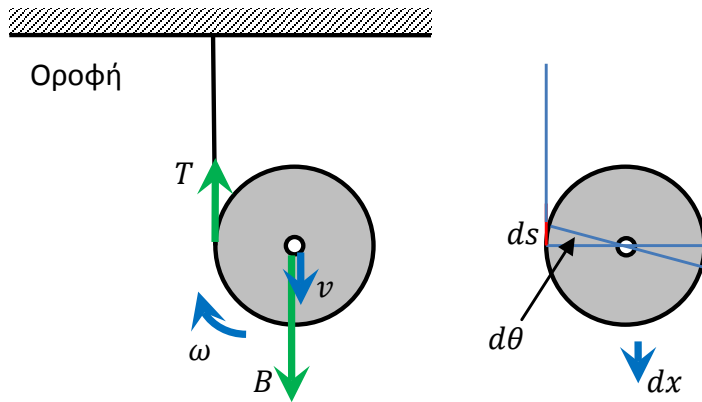
$$v = 0 \Rightarrow t - 2 = v_1/g = 12/10 = 1.2 \Rightarrow t = 3.2 \text{ s}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0 \rightarrow \omega = \omega_1 = 40 \text{ rad/s}$$



Παράδειγμα 2

Στο παρακάτω σχήμα, αβαρές νήμα έχει τυλιχθεί γύρω από λεπτό δίσκο ακτίνας R και μάζας m ενώ η μια του άκρη προσδένεται σε οροφή. Ο δίσκος αφήνεται ελεύθερος και το νήμα ξετυλίγεται με την κίνηση αυτή. Να δοθεί μια έκφραση για την ταχύτητα v του κέντρου μάζας του δίσκου συναρτήσει του χρόνου ενώ το νήμα ξετυλίγεται.



$$ds = R d\theta$$

$$dx = ds = R d\theta$$

$$v = R\omega$$

$$a_{KM} = R\alpha$$

$$\tau = TR$$

$$\tau = I\alpha$$

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

$$TR = \frac{1}{2}mR^2 \frac{a_{KM}}{R} \rightarrow T = \frac{1}{2}ma_{KM}$$

$$B - T = ma_{KM}$$

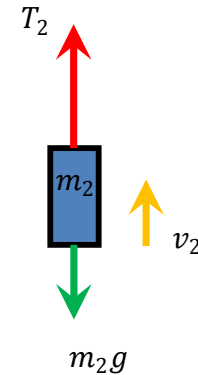
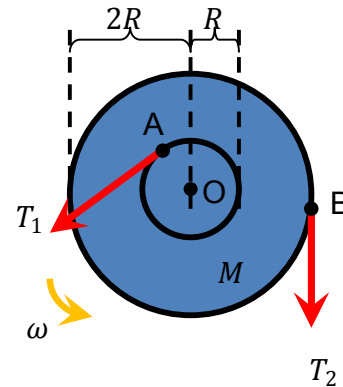
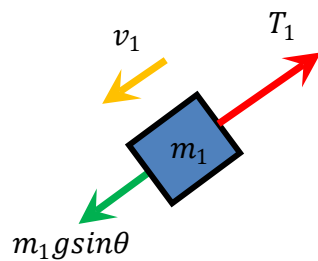
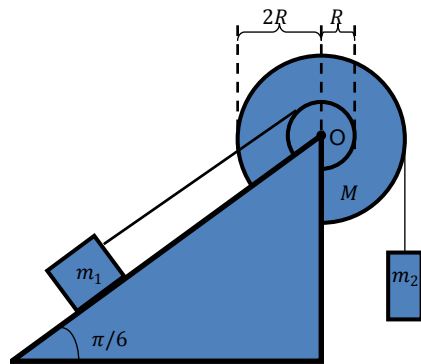
$$mg - ma_{KM} = ma_{KM} \Rightarrow a_{KM} = g/2$$

$$v = a_{KM}t = gt/2$$



Παράδειγμα 3

Στο παρακάτω σχήμα η τροχαλία μάζας M μπορεί και περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από το σταθερό σημείο O και τα νήματα είναι αβαρή. Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας



$$m_1 g \sin \theta = m_1 g \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} m_1 g$$

$$\frac{1}{2} m_1 g - T_1 = m_1 a_1$$

$$a_1 = R\alpha$$

$$\frac{1}{2} m_1 g - T_1 = m_1 \alpha R$$

$$\tau_1 = T_1 R$$

$$\tau_2 = -2T_2 R$$

$$\tau_1 + \tau_2 = I\alpha \Rightarrow T_1 R - 2T_2 R = \frac{1}{2} M R^2 \alpha$$

$$\frac{1}{2} m_1 g - m_1 \alpha R - 4m_2 \alpha R - 2m_2 g = \frac{1}{2} M R \alpha$$

$$\alpha = \frac{m_1 - 4m_2}{M + 2m_1 + 8m_2} \cdot \frac{g}{R}$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a_2$$

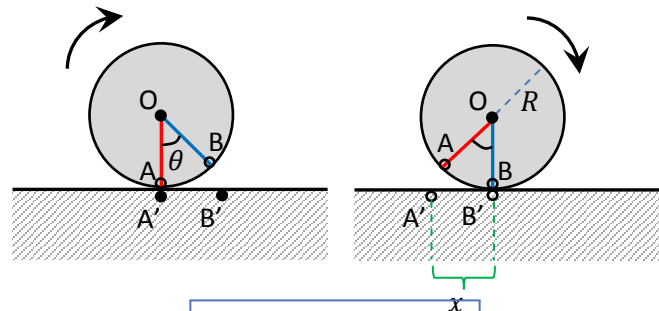
$$a_2 = 2R\alpha$$

$$T_2 - m_2 g = 2m_2 \alpha R$$



Κύλιση

- Σώμα κυκλικής διατομής
- Επαφή με οριζόντιο δάπεδο (τριβή)
- *Κύλιση χωρίς ολίσθηση*
 - Αναλογία μεταφορικής – περιστροφικής κίνησης



$$x = R\theta$$

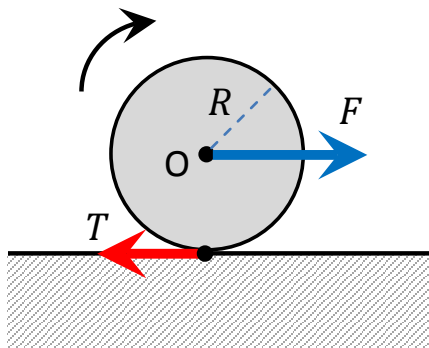
$$v = R\omega$$

$$a_{KM} = R\alpha$$



Παράδειγμα 4

Μια οριζόντια δύναμη 1.4 N εφαρμόζεται στο Κ.Μ. ενός λεπτού κυκλικού δίσκου μάζας 0.2 kg και ακτίνας 0.12 m ο οποίος βρίσκεται όρθιος επάνω σε δάπεδο. Να βρεθεί η γραμμική επιτάχυνσή του Κ.Μ. του δίσκου.



$$F - T = ma_{KM}$$

$$\tau = TR \rightarrow TR = I\alpha$$

$$\text{Δίσκος: } I = \frac{1}{2}mR^2$$

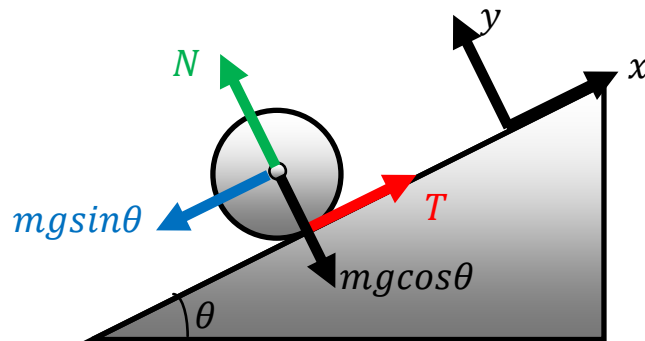
$$TR = \frac{1}{2}mR^2 \frac{a_{KM}}{R} \Rightarrow T = \frac{1}{2}ma_{KM}$$

$$F - \frac{1}{2}ma_{KM} = ma_{KM} \Rightarrow a_{KM} = \frac{2F}{3m} = 4.67 \text{ m/s}^2$$



Παράδειγμα 5

Συμπαγής σφαίρα μάζας m και ακτίνας R αφήνεται να κυλήσει ελεύθερα σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ . Να βρεθεί η γραμμική επιτάχυνσή του Κ.Μ. της σφαίρας.



$$mg \sin \theta - T = ma_{KM}$$

$$TR = I\alpha$$

$$\text{σφαίρα } I = \frac{2}{5}mR^2$$

$$TR = \frac{2}{5}mR^2 \frac{a_{KM}}{R} \Rightarrow T = \frac{2}{5}ma_{KM}$$

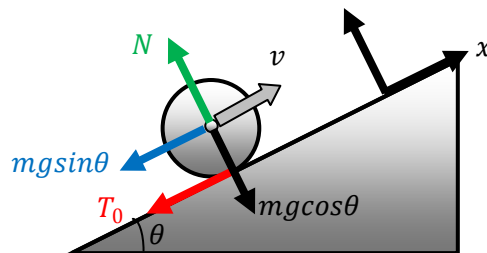
$$mg \sin \theta - \frac{2}{5}ma_{KM} = ma_{KM} \Rightarrow a_{KM} = \frac{5}{7}g \sin \theta$$



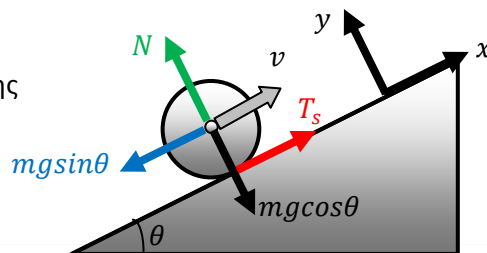
Παράδειγμα 6

Συμπαγής σφαίρα μάζας m και ακτίνας R δέχεται αρχική μεγάλη ώθηση προς τα πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ . Η σφαίρα αρχικά ολισθαίνει περισσότερο παρά περιστρέφεται αλλά μετά από λίγο εκτελεί κύλιση. α) Να δειχθούν οι δυνάμεις που δρουν στην σφαίρα κατά την φάση ολίσθησης, β) Να δειχθούν οι δυνάμεις που δρουν στην σφαίρα κατά την φάση κύλισης, γ) Να βρεθεί η γραμμική επιτάχυνσή του Κ.Μ. της σφαίρας στη φάση κύλισης.

Φάση Ολίσθησης



Φάση κύλισης



$$T_S - mg \sin \theta = ma_{KM}$$

$$-T_S R = I \alpha \Rightarrow -T_S = \frac{2}{5} m R \alpha$$

$$\alpha = a_{KM} / R$$

$$-T_S = \frac{2}{5} m a_{KM}$$

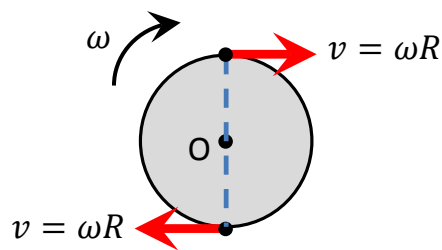
$$T_S - mg \sin \theta = -\frac{5}{2} T_S \Rightarrow T_S = \frac{2}{7} mg \sin \theta$$

$$-\frac{2}{7} mg \sin \theta = \frac{2}{5} m a_{KM} \Rightarrow a_{KM} = -\frac{5}{7} g \sin \theta$$

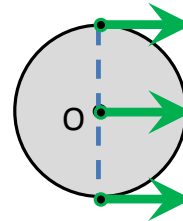


Κύλιση με ολίσθηση

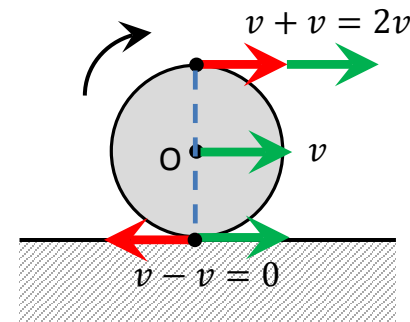
- Αμελητέα τριβή (π.χ. πάγος)
 - $x \approx 0$ και $R\theta \gg x$
- Πολύ μεγάλη τριβή (π.χ. φρένο)
 - $\theta \approx 0$ και $R\theta \ll x$



Περιστροφή



Μεταφορά



Κύλιση



Θεώρημα έργου – ενέργειας στην κύλιση

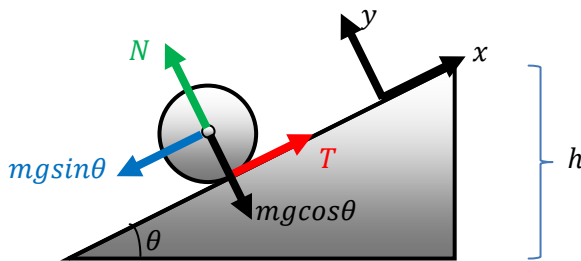
- Συνδυασμός όλων των κινήσεων
 - Κινητική ενέργεια – έργο μεταφορικής κίνησης
 - Κινητική ενέργεια – έργο περιστροφικής κίνησης

Κίνηση	Κινητική Ενέργεια	Έργο
Μεταφορική	$K = \frac{1}{2}mv^2$	$W = \int_{x_1}^{x_2} Fdx$
Περιστροφική	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$	$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta$



Παράδειγμα 7

Επανερχόμαστε στο Παράδειγμα 2 του προηγούμενου εδαφίου όπου μια συμπαγής σφαίρα μάζας m και ακτίνας R αφήνεται να κυλήσει ελεύθερα σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ . Εάν η σφαίρα αφήνεται ελεύθερη στο πάνω άκρο του κεκλιμένου επιπέδου, να βρεθεί η γωνιακή της ταχύτητα όταν φτάσει στο κάτω άκρο α) από το θεώρημα έργου ενέργειας και β) από τα αποτελέσματα του παραδείγματος του προηγούμενου εδαφίου.



$$K_B - K_A = W \quad \mu \epsilon \quad K_A = 0$$

$$\int_0^\theta \tau d\theta = TR \int_0^\theta d\theta = TR\theta$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}I\omega_B^2 = mgsin\theta x - Tx + Tx$$

$$\frac{1}{2}mR^2\omega_B^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mR^2\omega_B^2 = mgsin\theta x$$

$$xsin\theta = h$$

$$\frac{7}{10}R^2\omega_B^2 = gh \Rightarrow \omega_B = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

$$a_{KM} = \frac{5}{7}gsin\theta$$

$$x = \frac{1}{2}a_{KM}t^2 \Rightarrow \frac{h}{sin\theta} = \frac{15}{27}gsin\theta t^2 \Rightarrow t = \frac{1}{sin\theta} \sqrt{\frac{14h}{5g}}$$

$$v_B = a_{KM}t = \frac{5}{7}gsin\theta \frac{1}{sin\theta} \sqrt{\frac{14h}{5g}} = \sqrt{\frac{10gh}{7}}$$

$$\omega_B = \frac{v_B}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$



Κέντρο μάζας

- Μεταφορά όλων των δυνάμεων
- Συγκέντρωση όλης της μάζας
- Σύνολο πεπερασμένων υλικών σημείων

$$x_{KM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i$$

$$y_{KM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i$$

- Στερεό Σώμα

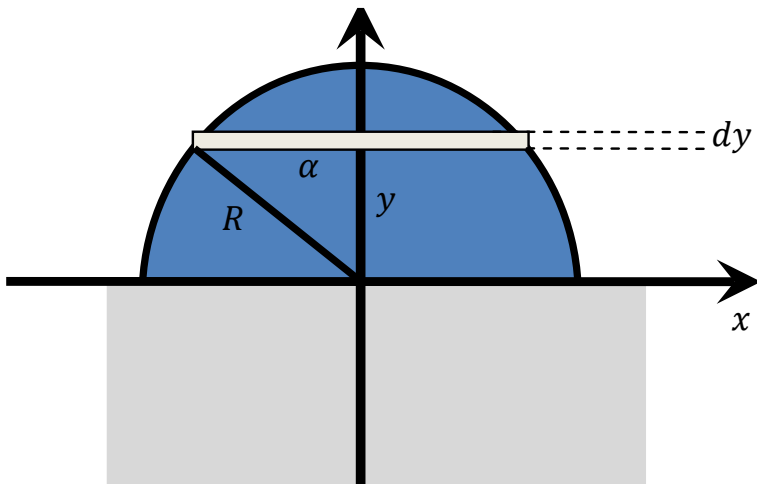
$$x_{KM} = \frac{1}{M} \int x dm$$

$$y_{KM} = \frac{1}{M} \int y dm$$



Παράδειγμα 8

Να βρεθεί το Κ.Μ. του παρακάτω λεπτού ημικυκλικού δίσκου ακτίνας R εάν είναι ομοιογενής.



x συνιστώσα του Κ.Μ. είναι 0 (στο κέντρο)

$$\alpha = \sqrt{R^2 - y^2}$$

$$dA = 2\alpha dy = 2\sqrt{R^2 - y^2} dy$$

$$\frac{dm}{m} = \frac{dA}{A}$$

$$A = \frac{1}{2}\pi R^2$$

$$dm = m \frac{dA}{A} = m \frac{4\sqrt{R^2 - y^2}}{\pi R^2} dy$$

$$y_{KM} = \frac{1}{m} \int_{y=0}^R y dm = \frac{4}{\pi R^2} \int_{y=0}^R y \sqrt{R^2 - y^2} dy$$

$$y_{KM} = \frac{4}{\pi R^2} \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3\pi} R$$



Βιβλιογραφία

- Serway R.A., Jewett W. Jr., 2012, *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς : μηχανική, ταλαντώσεις και μηχανικά κύματα, θερμοδυναμική, σχετικότητα, Κλειδάριθμος, Αθήνα*
- Halliday D., Resnick R., Walker J., 2008, *Φυσική, τ.1. Μηχανική, Κυματική, Θερμοδυναμική, Gutenberg, Αθήνα*
- Young H.D., 1994, *Πανεπιστημιακή φυσική , 8^η έκδ., Παπαζήσης , Αθήνα*
- Kittel C., Knight W. D., Ruderman M.A., 1985, *Μηχανική, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων , Αθήνα*
- Wells D.A. , Slusher H. S., 1983, *Schaum's outline of theory and problems of physics for engineering and science, McGraw - Hill Book Company, New York*



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών

Δημήτριος Κουζούδης. «Φυσική Ι»

Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<https://eclass.upatras.gr/courses/CMNG2162/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού-Μη Εμπορική Χρήση-Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.