



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Φυσική Ι

Ενότητα 9: Στροφορμή

Κουζούδης Δημήτρης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Χημικών Μηχανικών

Σκοποί ενότητας

- Εισαγωγή στην έννοια της στροφορμής
- Διαφοροποίηση υλικού σημείου από στερεό σώμα
- Εναλλακτικοί ορισμοί της στροφορμής
- Ορισμός κεντρικών δυνάμεων
- Συνθήκες ισορροπίας στην στροφορμή
- Εξοικείωση και κατανόηση μέσα από χαρακτηριστικά παραδείγματα



Περιεχόμενα ενότητας

- Στροφορμή υλικού σημείου
- Στροφορμή στερεού σώματος
 - Παραδείγματα
- Αρχή διατήρησης στροφορμής
 - Παραδείγματα



Στροφορμή

Υλικού σημείου – στερεού σώματος

Στροφορμή υλικού σημείου

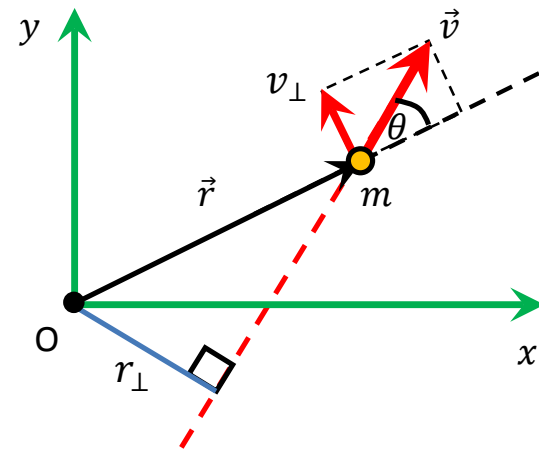
- Περιστροφή αντικειμένων γύρω από σταθερό άξονα
- Το ανάλογο της γραμμικής ορμής στην περιστροφή

$$L = \pm mvr \sin\theta$$

- Μονάδες: $kg \ m^2/s$
- Εναλλακτικοί ορισμοί

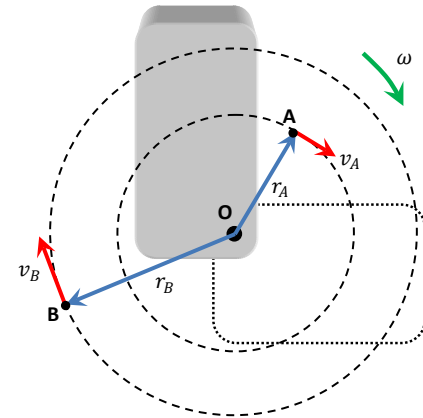
$$- \quad L = \pm mrv_{\perp}$$

$$- \quad L = \pm mvr_{\perp}$$



Στροφορμή στερεού σώματος

- Άθροισμα των στροφορμών όλων των σημειακών μαζών του σώματος
- Ολική ροπή αδράνειας, I



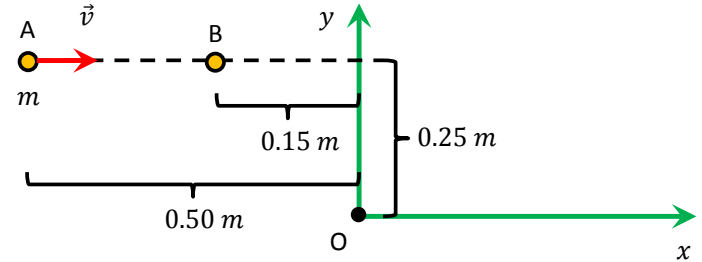
- Αναλογία με ορμή
 - Μάζα \leftrightarrow ροπή αδρανείας
 - Ταχύτητα \leftrightarrow γωνιακή ταχύτητα
- Διανυσματικό μέγεθος
- Διεύθυνση του άξονα και φορά από τον κανόνα του δεξιού χεριού



Παραδείγματα

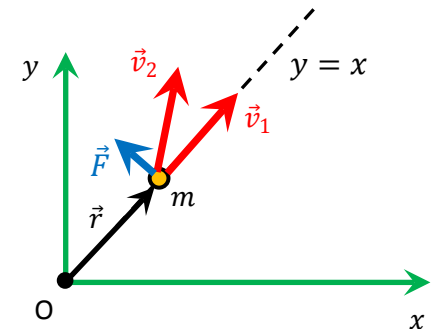
1. Σημειακή μάζα 0.2 kg κινείται οριζόντια όπως στο παρακάτω σχήμα με ταχύτητα $v=4$ m/s. Να βρεθεί η στροφορμή της όταν βρίσκεται στις θέσεις A και B.

- $r_{\perp}=0.25$ m
- $L_A=-mvr_{\perp}=-0.2 \times 4 \times 0.25=-0.2$ kg·m²/s
- Ίδια απόσταση $\rightarrow L_B=-0.2$ kg·m²/s



2. Σημειακή μάζα 0.3 kg κινείται κατά μήκος της ευθείας $y=x$ όπως στο παρακάτω σχήμα με ταχύτητα $v=5$ m/s. Ξαφνικά όταν βρίσκεται στο $x=2$ m, μια δύναμη $F=12$ N εφαρμόζεται κάθετα στην ταχύτητα για πολύ μικρό χρονικό διάστημα, εκτρέποντάς την κατά διεύθυνση μόνο, ώστε να σχηματίζει γωνία 60° ως προς τον άξονα x (το μέτρο της ταχύτητας παραμένει το ίδιο). α) Να υπολογισθεί η αρχική και τελική στροφορμή της μάζας αμέσως μετά την εφαρμογή της F και β) η ροπή που ασκείται επάνω της.

- $\theta=0^\circ \rightarrow L_1=mvr\sin\theta=0$
- $\theta=45^\circ, x=2, r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ m
- $60^\circ - 45^\circ = 15^\circ \rightarrow L_2=mvr\sin\theta=0.3 \times 5 \times 2\sqrt{2} \times \sin 15^\circ = 1.1$ kg·m²/s
- $\theta=90^\circ, \tau=Fr\sin\theta_F=12 \times 2\sqrt{2} \times \sin 90^\circ = 24\sqrt{2}$ N·m



Παράδειγμα 3

Σε συμπαγή σφαίρα μάζας 0.25 kg και ακτίνας 0.1 m η οποία αρχικά περιστρέφεται σαν την υδρόγειο με γωνιακή ταχύτητα 4.0 rad/s, ελεύθερα γύρω από άξονα που περνάει από τους πόλους της, εφαρμόζεται επιφανειακή δύναμη τριβής 0.015 N, εφαπτόμενη στον ισημερινό για 2 δευτερόλεπτα. Να βρεθεί η τελική στροφορμή της σφαίρας, στο πέρας των 2 δευτερολέπτων.

$$\omega_1 = 4.0 \text{ rad/s}$$

$$\tau = -TR = -0.015 \times 0.1 = -1.5 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$$

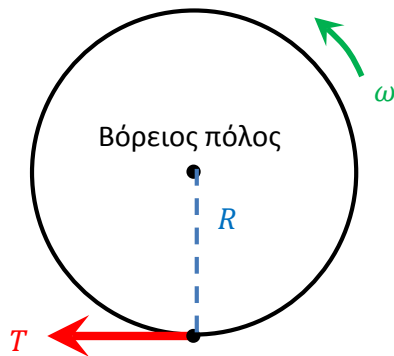
$$I = \frac{2}{5}MR^2 = \frac{2}{5} \times 0.25 \times 0.1^2 = 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = -\frac{1.5 \times 10^{-3}}{10^{-3}} = -1.5 \text{ rad/s}^2$$

$$\omega_2 = \omega_1 + \alpha t = 4 - 1.5 \times 2 = 1 \text{ rad/s}$$

$$L_2 = I\omega_2 = 10^{-3} \times 1 = 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$$

ΚΑΤΟΨΗ ΣΦΑΙΡΑΣ



Διατήρηση της στροφορμής

- 2^{ος} Νόμος Νεύτωνα στην περιστροφή

$$\tau = \frac{dL}{dt}$$

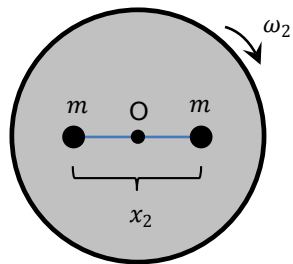
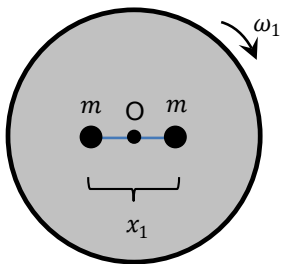
- Μηδενική συνολική ροπή
 - Απουσία εξωτερικών δυνάμεων
 - Αλληλεξουδετέρωση ροπών εξωτερικών δυνάμεων
 - Μόνο κεντρικές δυνάμεις
 - Δυνάμεις προς ή από το κέντρο περιστροφής
- Απουσία ροπών, η στροφορμή ενός περιστρεφόμενου σώματος διατηρείται

$$L_1 = L_2 \Rightarrow I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$



Παράδειγμα 4

Δυο ίσες σημειακές μάζες $m=0.5$ kg προσδένονται στις άκρες αβαρούς ελατηρίου, αρχικά συμπιεσμένο σε μήκος $x_1=0.8$ m με τη βοήθεια νήματος. Συμμετρικά το σύστημα ελατηρίου-μαζών επάνω σε λεπτό οριζόντιο δίσκο μάζας $M=0.2$ kg και ακτίνας $R=1.4$ m, ώστε το Κ.Μ. να βρίσκεται στο κέντρο του δίσκου ο οποίος περιστρέφεται γύρω από αυτό. Δίσκος σε περιστροφή με αρχική γωνιακή ταχύτητα $\omega_1=15$ rad/s και κόβει το νήμα οπότε το ελατήριο σπρώχνει τις μάζες σε νέα $x_2=1.2$ m μεταξύ τους. Να βρεθεί η νέα γωνιακή ταχύτητα του συστήματος



$$I_1 = \frac{1}{2}MR^2 + m\left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + m\left(\frac{x_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}0.2 \times 1.4^2 + 2 \times 0.5 \times 0.4^2 = 0.356 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$x_2 = 1.2 \text{ m}$$

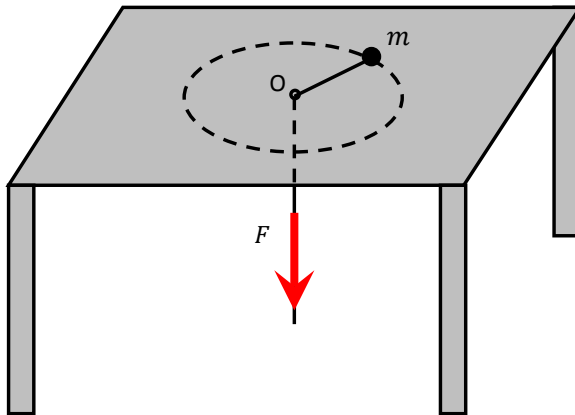
$$I_2 = \frac{1}{2}MR^2 + m\left(\frac{x_2}{2}\right)^2 + m\left(\frac{x_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}0.2 \times 1.4^2 + 2 \times 0.5 \times 0.6^2 = 0.556 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \omega_1 \frac{I_1}{I_2} = 15 \times \frac{0.356}{0.556} = 9.6 \text{ rad/s}$$



Παράδειγμα 5

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, σημειακή μάζα m περιστρέφεται χωρίς τριβή επάνω σε οριζόντιο τραπέζι σε κυκλική τροχιά με αρχική ακτίνα R_1 και γωνιακή ταχύτητα ω_1 επειδή είναι προσδεμένη σε νήμα το οποίο είναι περασμένο από τρύπα O του τραπέζιου. Δύναμη F ασκείται στην άλλη άκρη του νήματος προς τα κάτω έτσι ώστε να μαζεύει πολύ αργά το νήμα και να ελαττώνει την διάμετρο της κυκλικής τροχιάς. Να βρεθεί η τελική γωνιακή ταχύτητα ω_2 όταν η τελική ακτίνα είναι ίση με R_2 .



$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

$$mR_1^2 \omega_1 = mR_2^2 \omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{R_1^2}{R_2^2} \omega_1$$



Βιβλιογραφία

- Serway R.A., Jewett W. Jr., 2012, *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς : μηχανική, ταλαντώσεις και μηχανικά κύματα, θερμοδυναμική, σχετικότητα, Κλειδάριθμος, Αθήνα*
- Halliday D., Resnick R., Walker J., 2008, *Φυσική, τ.1. Μηχανική, Κυματική, Θερμοδυναμική, Gutenberg, Αθήνα*
- Young H.D., 1994, *Πανεπιστημιακή φυσική , 8^η έκδ., Παπαζήσης , Αθήνα*
- Kittel C., Knight W. D., Ruderman M.A., 1985, *Μηχανική, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων , Αθήνα*
- Wells D.A. , Slusher H. S., 1983, *Schaum's outline of theory and problems of physics for engineering and science, McGraw - Hill Book Company, New York*



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών

Δημήτριος Κουζούδης. «Φυσική Ι»

Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<https://eclass.upatras.gr/courses/CMNG2162/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού-Μη Εμπορική Χρήση-Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.