



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Φυσική Ι

Ενότητα 6: Έργο και κινητική ενέργεια

Κουζούδης Δημήτρης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Χημικών Μηχανικών

Σκοποί ενότητας

- Κατανόηση και ορισμός της έννοιας του έργου
- Κατανόηση της κινητικής ενέργειας
- Εξοικείωση με το θεώρημα έργου-ενέργειας
- Ορισμός και επεξήγηση των συντηρητικών ή μη δυνάμεων
- Διατύπωση και κατανόηση της αρχής διατήρησης της μηχανικής ενέργειας
- Ορισμός και ερμηνεία της ισχύος
- Εισαγωγή στις δέσμιες τροχιές



Περιεχόμενα ενότητας

- Ορισμός του έργου
 - Υποπεριπτώσεις
- Κινητική ενέργεια
- Θεώρημα έργου-ενέργειας
- Συντηρητικές δυνάμεις
 - Παραδείγματα
- Διατήρηση μηχανικής ενέργειας
- Ισχύς
- Δέσμιες τροχιές



Έργο και κινητική ενέργεια

Ορισμός του έργου

- Μια δύναμη παράγει έργο όταν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της
 - Δύναμη \times μετατόπιση
- Μονάδα μέτρησης: Joule, $J (=N \times m)$
- Οποιαδήποτε τροχιά
 - Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F \cos\theta \, dr$$



Υποπεριπτώσεις

- Δύναμη και μετατόπιση σε 1-διάσταση

$$W = \int_{x_A}^{x_B} F dx$$

- Σταθερή δύναμη και μετατόπιση σε 1-διάσταση

$$W = F\Delta x$$

- Κίνηση σε ευθεία, υπό γωνία ϑ με τη δύναμη

$$W = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx$$

- Κίνηση σε ευθεία, με γωνία θ με τη δύναμη, δύναμη σταθερή

$$W = F_x \Delta x = F \Delta x \cos \theta$$

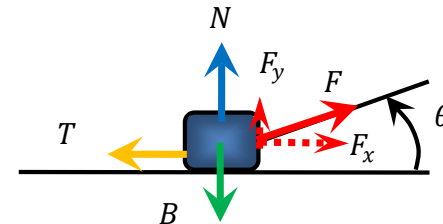
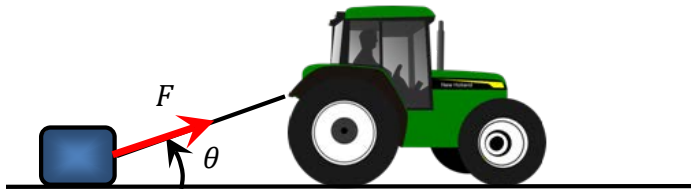
- Σε δυο διαστάσεις

$$W = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y dy$$



Παράδειγμα 1

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, τρακτέρ ελκύει κιβώτιο μάζας 800 kg υπό γωνία $\theta=41^\circ$ με δύναμη $F=5000$ N. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι 0.35. Εάν το κιβώτιο μετακινείται κατά 6 m, να υπολογισθεί το έργο της κάθε δύναμης που δρα στο κιβώτιο.



$$B = mg = 800 \times 9.8 = 7840 \text{ N}$$

$$F_x = F \cos 41^\circ = 3773 \text{ N}$$

$$F_y = F \sin 41^\circ = 3280 \text{ N}$$

$$N + F_y = B \Rightarrow N = 4560 \text{ N}$$

$$T = \mu N = 0.35 \times 4560 = 1596 \text{ N}$$

$$W_F = F \Delta x \cos(41^\circ) = 5000 \times 6 \times \cos(41^\circ) = 22640 \text{ J}$$

$$W_B = B \Delta x \cos(-90^\circ) = 0 \text{ J}$$

$$W_N = N \Delta x \cos(90^\circ) = 0 \text{ J}$$

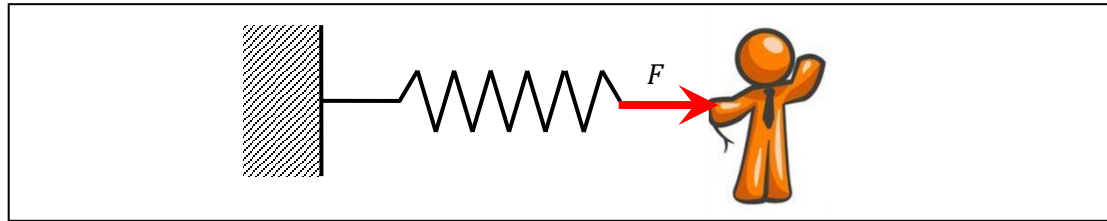
$$W_T = T \Delta x \cos(180^\circ) = -1596 \times 6 = -9576 \text{ J}$$

Οι δυνάμεις
κάθετα στη
μετατόπιση
δεν
παράγουν έργο!!



Παράδειγμα 2

Ελατήριο σταθεράς k έχει τη μια άκρη του στερεωμένη σε ακλόνητο σημείο. Όταν το ελατήριο είναι στο φυσικό του μήκος, τότε η ελεύθερη άκρη του βρίσκεται στο $x=0$. Ένας φοιτητής το παραμορφώνει αργά εφαρμόζοντας κατάλληλη δύναμη F στο ελεύθερο άκρο του. Να βρεθεί το έργο της δύναμης του φοιτητή από αρχική παραμόρφωση $x=x_1$ έως και $x=x_2$.

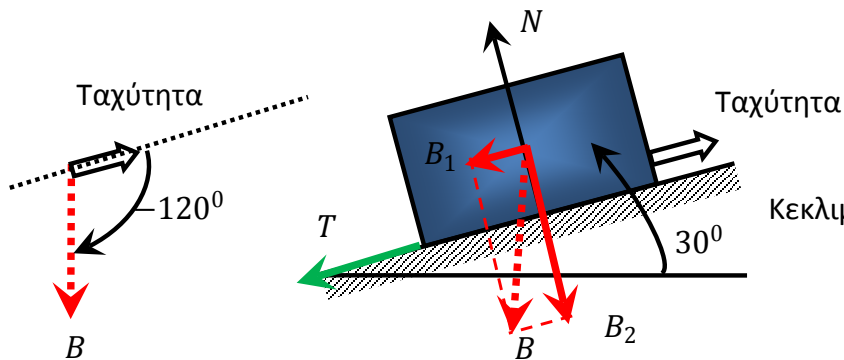


$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = k \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{k}{2} (x_2^2 - x_1^2)$$



Παράδειγμα 3

Έστω ότι στο παρακάτω σχήμα το κιβώτιο μάζας $m=12 \text{ kg}$ κινείται σε επαφή με το κεκλιμένο επίπεδο προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα λόγω εφαρμογής μιας προώθησης που δεν δείχνεται. Εάν ο συντελεστής της τριβής ολίσθησης ισούται με $\mu=0.6$, να βρεθεί το έργο της τριβής ολίσθησης και του βάρους για μια μετακίνηση 2 m κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.



$$B = 12 \times 9.8 = 117.6 \text{ N.}$$

$$N = B_2 = B \cos 30^\circ = 101.8 \text{ N.}$$

$$\text{Κεκλιμένο επίπεδο } T = \mu N = 0.6 \times 101.8 = 61.1 \text{ N}$$

$$W_T = -61.1 \times 2 = -122.2 \text{ J}$$

$$W_B = 117.6 \times 2 \times \cos(-120^\circ) = -117.6 \text{ J}$$



Παράδειγμα 4

Μια διανυσματική δύναμη $\vec{F} = c(2xy, -y^2)$ όπου $c=30 \text{ N/m}^2$, δρα σε κινητό το οποίο κινείται στην ευθεία $y=2x$. Να βρεθεί το έργο της δύναμης όταν δράσει στο κινητό από $x=2$ έως $x=4 \text{ m}$.

$$W = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y dy$$

$$F_x = 2cxy$$

$$F_y = -cy^2$$

$$2 \int_{x=2}^4 cxy dx = 4 \times 30 \int_{x=2}^4 x^2 dx = 120 \left(\frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3} \right) = 2240 \text{ J}$$

$$\int_{y_A}^{y_B} F_y dy = -c \int_{y=4}^8 y^2 dy = -30 \left(\frac{8^3}{3} - \frac{4^3}{3} \right) = -4480 \text{ J}$$

$$W = 2240 - 4480 = -2240 \text{ J}$$



Κινητική ενέργεια

- Ενέργεια εξαιτίας της κίνησης
- Ορισμός: $K = \frac{1}{2}mv^2$
- Μονάδα: Joule, J
- **Παράδειγμα 5.** Ένα αυτοκίνητο μάζας 1000kg κινείται με 90 km/h (25m/s). α) Βρείτε την κινητική του ενέργεια και β) υπολογίστε τη σταθερή δύναμη που χρειάζεται για να το σταματήσει μετά από 40 .

$$- \quad K = \frac{1}{2} \times 1000 \times 25^2 = 312.5 \text{ kJ}$$

$$- \quad -312500 = F \times 40 \times \cos 180^\circ \Rightarrow F = 7812.5 \text{ N}$$



Θεώρημα έργου – ενέργειας

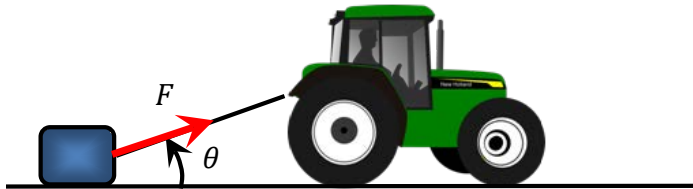
- Για ένα σώμα, ανεξάρτητα από το είδος των δυνάμεων
- Το έργο όλων των δυνάμεων που δρουν σε ένα σώμα, ισούται με τη μεταβολή στην κινητική του ενέργεια

$$W = K_B - K_A$$



Παράδειγμα 5

Έστω ότι στο Παράδειγμα 1 παραπάνω, μας δίνεται ότι η ταχύτητα του τρακτέρ σε κάποιο σημείο της διαδρομής του είναι ίση με 5 m/s και ότι μετά από αυτό το σημείο το τρακτέρ διανύει άλλα 6 m. Να βρεθεί η ταχύτητα του τρακτέρ μετά το πέρας των 6 m θεωρώντας ότι σε όλα αυτή τη διαδρομή το κιβώτιο ελκύει το κιβώτιο ομαλά.



$$W_F = 22640 \text{ J}$$

$$W_B = W_N = 0 \text{ J}$$

$$W_T = -9576 \text{ J}$$

$$W = 22640 - 9576 = 13064 \text{ J}$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + W \Rightarrow v_B^2 = v_A^2 + \frac{2W}{m}$$

$$v_B = 7.59 \text{ m/s}$$



Συντηρητικές δυνάμεις – δυναμική ενέργεια

- Συντηρητικές-διατηρητικές δυνάμεις
 - Το έργο τους είναι ανεξάρτητο της διαδρομής
 - «Αποθήκευση» έργου
 - Βαρυτική, δύναμη ελατηρίου κ.α.
- Δυναμική ενέργεια - Ενέργεια λόγω θέσης
 - Εξαρτάται από το είδος της δύναμης
 - Η αρνητική χωρική παράγωγος της δυναμικής ενέργειας (U) μας δίνει την δύναμη

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$



Παραδείγματα συντηρητικών δυνάμεων

- Βαρυτική δυναμική ενέργεια

$$U(y) = mgy$$

- Δυναμική ενέργεια ελατηρίου

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

- Δύναμη αντιστρόφου τετραγώνου

$$U(r) = -\frac{c}{r}$$



Παραδείγματα

6. Η δυναμική ενέργεια κάποιας δύναμης που δρα σε μια διάσταση δίνεται από τη σχέση $U(x)=ce^{-bx^2}$ όπου c και b σταθερές. Να βρεθεί η δύναμη σε μορφή $F(x)$.

$$\blacktriangleright F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = 2bcxe^{-bx^2}$$

7. Η δυναμική ενέργεια κάποιας δύναμης που δρα σε δυο διαστάσεις δίνεται από τη σχέση $U(x,y) = \frac{c}{\sqrt{x^2 + (y-b)^2}}$ όπου c και b σταθερές. Να βρεθεί το μέτρο και η κατεύθυνση της δύναμης που αντιστοιχεί σε αυτή τη δυναμική ενέργεια.

$$\blacktriangleright F_x = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = \frac{-x}{\{x^2 + (y-b)^2\}^{3/2}} \quad F^2 = F_x^2 + F_y^2 = \frac{1}{\{x^2 + (y-b)^2\}^3} \{x^2 + (y-b)^2\} = \frac{1}{\{x^2 + (y-b)^2\}^2}$$
$$F_y = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \frac{-(y-b)}{\{x^2 + (y-b)^2\}^{3/2}} \quad \tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{y-b}{x}$$



Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας

- Το έργο μιας συντηρητικής δύναμης μεταξύ δυο σημείων, ισούται με την αρνητική διαφορά της δυναμικής ενέργειας στα σημεία αυτά.

- Ορισμός μηχανικής ενέργειας

$$E = K + U$$

- Αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας

$$E_A = E_B$$

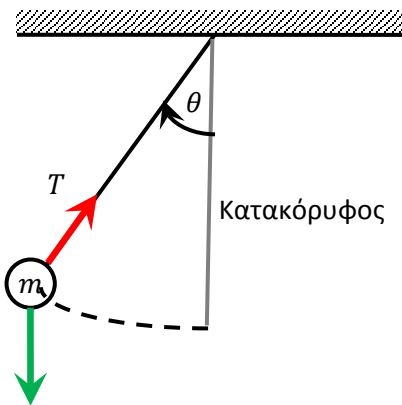
- Συντηρητικές και μη συντηρητικές δυνάμεις

$$K_A + U_A + \tilde{W}_{AB} = K_B + U_B$$



Παράδειγμα 8

Στο παρακάτω σχήμα η μάζα m είναι προσδεμένη στο ένα άκρο ιδανικού νήματος μήκους L το άλλο άκρο του οποίου είναι προσδεμένο σε ακλόνητο σημείο σε οροφή. Έστω ότι εκτρέπουμε την m κατά μια γωνία θ_A και ακολούθως την αφήνουμε ελεύθερη. Να βρεθεί η ταχύτητα της μάζας όταν το νήμα ξανα-επιστρέφει στην κατακόρυφο με γωνία $\theta_B=0$ α) από το θεώρημα έργου-ενέργειας και β) από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας



Οροφή

$$W_T = \int_A^B T \cos \theta_T dr \rightarrow (\theta_T = 90^\circ)^* \rightarrow W_T = 0$$

$$W_B = \int_{x_A}^{x_B} B_x dx + \int_{y_A}^{y_B} B_y dy$$

$$W_B = -mg \int_{y_A}^{y_B} dy = mg(y_A - y_B) = mg\Delta y$$

$$\Delta y = L - L \cos \theta_A$$

$$W_B = mgL(1 - \cos \theta_A)$$

$$K_A + U_A + W_T = K_B + U_B$$

$$0 + mgy_A + 0 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgy_B \Rightarrow v_B^2 = 2mg\Delta y$$

$$v_B = \sqrt{2mg\Delta y} = \sqrt{2mgL(1 - \cos \theta_A)}$$

$$W = W_T + W_B = 0 + W_B = mgL(1 - \cos \theta_A)$$

$$mgL(1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta_A)}$$



Ισχύς

- Το έργο που αποδίδει (ή που καταναλώνει συνήθως μια μηχανή) ανά μονάδα χρόνου

$$P = \frac{W}{t}$$

- Μονάδα: Watt, ($1W=1J/sec$)
– $1hp=742 \text{ Watts}$

- Στιγμιαία ισχύς

$$P = \frac{dW}{dt}$$

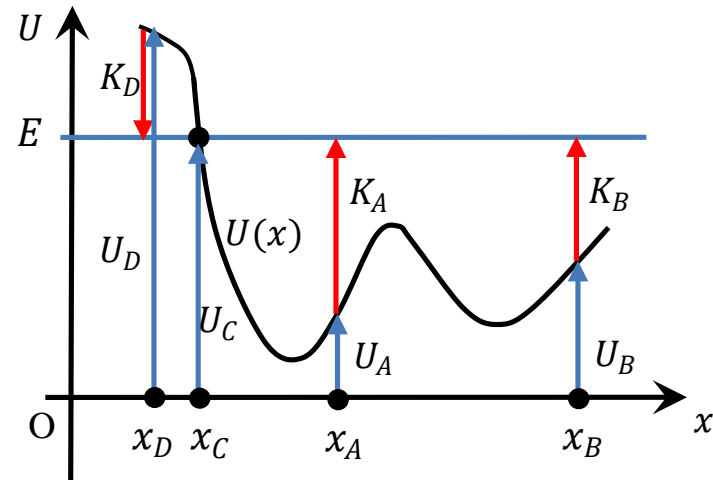
- Εναλλακτικός ορισμός

$$P = Fv$$



Δέσμιες τροχιές

- Δεν έχουν τη δυνατότητα να διαφύγουν στο άπειρο
- Τοπικά ελάχιστα και μέγιστα
- Σταθερή μηχανική ενέργεια
 - Ευσταθής ισορροπία
 - Ασταθής ισορροπία



Βιβλιογραφία

- Serway R.A., Jewett W. Jr., 2012, *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς : μηχανική, ταλαντώσεις και μηχανικά κύματα, θερμοδυναμική, σχετικότητα, Κλειδάριθμος, Αθήνα*
- Halliday D., Resnick R., Walker J., 2008, *Φυσική, τ.1. Μηχανική, Κυματική, Θερμοδυναμική, Gutenberg, Αθήνα*
- Young H.D., 1994, *Πανεπιστημιακή φυσική , 8^η έκδ., Παπαζήσης , Αθήνα*
- Kittel C., Knight W. D., Ruderman M.A., 1985, *Μηχανική, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων , Αθήνα*
- Wells D.A. , Slusher H. S., 1983, *Schaum's outline of theory and problems of physics for engineering and science, McGraw - Hill Book Company, New York*



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών

Δημήτριος Κουζούδης. «Φυσική Ι»

Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<https://eclass.upatras.gr/courses/CMNG2162/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού-Μη Εμπορική Χρήση-Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.