
Διπλό συζευγμένο εκκρεμές

ΠΑΤΡΑ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2025

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

- 1 Σκοπός
- 2 Θεωρία
 - 2.1 Απλό εκκρεμές
 - 2.2 Διπλό συζευγμένο εκκρεμές
- 3 Πειραματική διάταξη
- 4 Πειραματική διαδικασία
- 5 Πλήρης ομαδική έκθεση
- 6 Βιβλιογραφία

1 Σκοπός

Στην άσκηση αυτή μελετιούνται οι ταλαντώσεις δυο εκκρεμών τα οποία είναι συζευγμένα με ένα ελατήριο. Αυτό το μηχανικό σύστημα εξομοιάζει σε πολύ μεγάλο βαθμό τις ταλαντώσεις διατομικών μορίων όπου τον ρόλο του δεσμού μεταξύ των μορίων τον παίζει το ελατήριο. Τα δυο εκκρεμή ταλαντώνονται με δυο βασικές συχνότητες, γνωστές και ως ιδιοσυχνότητες και ο σκοπός της άσκησης είναι να εξαχθούν αυτές οι ταλαντώσεις από τα δεδομένα του πειράματος.

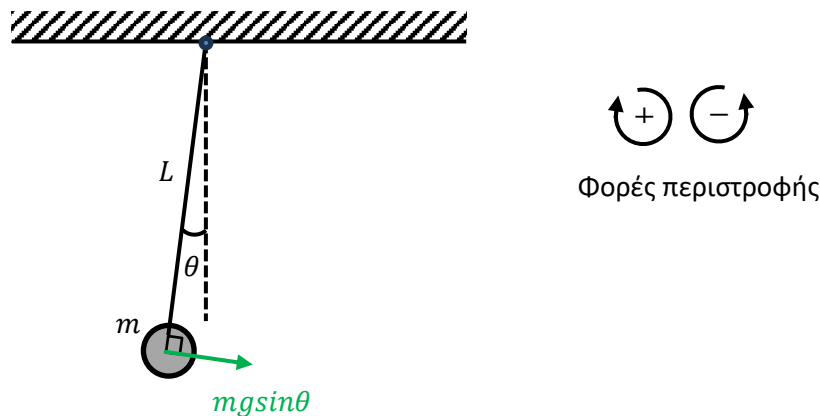
2 Θεωρία

2.1 Απλό εκκρεμές

Έστω ένα απλό εκκρεμές όπως στο παρακάτω σχήμα από αβαρή ράβδο μήκους L στην άκρη του οποίου αναρτάται σημειακή μάζα m . Έστω τυχαία θέση του εκκρεμούς στην οποία σχηματίζει μια γωνία θ με την κατακόρυφο. Στη μάζα του σώματος δρα το βάρος του mg με κάθετη συνιστώσα στη ράβδο $mg\sin\theta$ η οποία είναι υπεύθυνη για την περιστροφή του εκκρεμούς με μια αντίστοιχη ροπή

$$\tau = -Lmg\sin\theta$$

(το μείον εμφανίζεται επειδή έχουμε λάβει τις μη συμβατικές φορές περιστροφής που φαίνονται στο σχήμα)



Σχήμα 1. Απλό εκκρεμές

Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφή, αυτή η ροπή τ θα πρέπει να είναι ίση με την ροπή αδράνειας I του εκκρεμούς επί τη γωνιακή του επιτάχυνση. Η γωνιακή ταχύτητα του εκκρεμούς είναι ίση με $\dot{\theta}$ και επομένως και η γωνιακή του επιτάχυνση θα είναι ίση με $\ddot{\theta}$ (οι τελείες συμβολίζουν παραγώγιση ως προς το χρόνο) και έτσι ο νόμος του Νεύτωνα γίνεται

$$I\ddot{\theta} = -mgL\sin\theta$$

και για μικρές γωνίες όπου ισχύει $\sin\varphi \approx \varphi$, η παραπάνω γίνεται

$I\ddot{\theta} = -mgL\theta$	(1)
-------------------------------	-----

Αυτή η Διαφορική Εξίσωση επιδέχεται αρμονική λύση της μορφής

$$\theta = \theta_0 \sin \omega_0 t$$

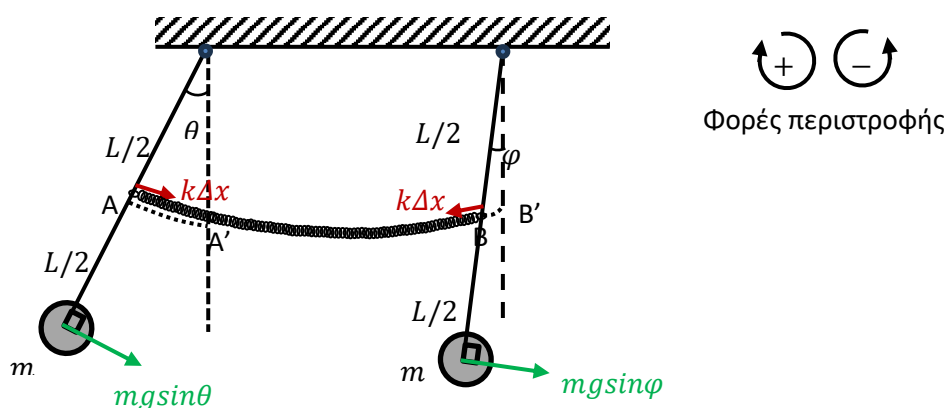
αρκεί η γωνιακή συχνότητα ταλαντώσεων ω_0 να ικανοποιεί την σχέση

$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$	(2)
-----------------------------------	-----

(το αποτέλεσμα προκύπτει εύκολα με απλή αντικατάσταση της θ στην παραπάνω διαφορική εξίσωση). Η σχέση (2) θα μπορούσε να απλοποιηθεί περαιτέρω εάν για I λαμβάναμε την ροπή αδράνειας της σημειακής μάζας και έτσι θα καταλήγαμε στο γνωστό αποτέλεσμα για το απλό εκκρεμές, όπως στην Άσκηση 1, αλλά θα αφήσουμε το I έτσι γενικό επειδή στην παρούσα άσκηση γενικά η ράβδος δεν είναι τελείως αβαρής (στην 1 έχουμε νήμα που είναι πρακτικά αβαρές).

2.2 Διπλό συζευγμένο εκκρεμές

Έστω ένα διπλό συζευγμένο εκκρεμές, με όμοια εκκρεμή μήκους L και σημειακής μάζας m όπως στο παρακάτω σχήμα. Σε τυχαία θέση το κάθε εκκρεμές γενικά θα έχει τη δικιά του γωνία θ και φ αντίστοιχα.



Σχήμα 2. Συζευγμένα εκκρεμή

Έστω επίσης ότι ένα ελατήριο AB σταθεράς k ενώνεται στο μέσο $L/2$ του κάθε εκκρεμούς και ότι όταν τα δυο εκκρεμή βρίσκονται στη θέση ισορροπίας τους στην κατακόρυφο, τότε το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Λόγω της περιστροφικής μετακίνησης του εκκρεμούς στα αριστερά, το ελατήριο παραμορφώνεται κατά το τόξο AA' , ενώ λόγω της αντίστοιχης μετακίνησης του εκκρεμούς στα δεξιά,

αυτό συσπειρώνεται κατά το τόξο BB' και έτσι η συνολική παραμόρφωση Δx του ελατηρίου είναι ίση με την διαφορά των δυο τόξων. Από απλή γεωμετρία γνωρίζουμε ότι το μήκος τόξου είναι ίσο με την ακτίνα επί τη γωνία (σε ακτίνια) και έτσι μπορούμε να γράψουμε ότι

$\Delta x = \frac{L}{2}(\theta - \varphi)$	(3)
--	-------

Η δύναμη του ελατηρίου ισούται με

$$F = k\Delta x$$

Εάν θεωρηθεί ότι αυτή δρα κάθετα στα δυο εκκρεμή, τότε ασκεί ροπή σε αυτά ίση με

$$\pm \frac{kL}{2}\Delta x$$

(για τα πρόσημα έχουμε λάβει τις μη συμβατικές φορές περιστροφής που φαίνονται στο σχήμα). Συμπεριλαμβάνοντας και την ροπή του βάρους όπως και στην περίπτωση του απλού εκκρεμούς, η συνολική ροπή (βαρυτική συν ροπή ελατηρίου) για το κάθε ελατήριο είναι ίση με

$$\tau_1 = -\frac{kL}{2}\Delta x - mgL\sin\theta$$

$$\tau_2 = +\frac{kL}{2}\Delta x - mgL\sin\varphi$$

(ο δείκτης "1" αντιστοιχεί στο ελατήριο στα αριστερά και ο δείκτης "2" στο ελατήριο στα δεξιά αντίστοιχα). Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στην περιστροφή, αυτές οι ροπές θα πρέπει να είναι ίσες με την ροπή αδράνειας I του εκκρεμούς επί τη γωνιακή του επιτάχυνση. Για το ελατήριο στα αριστερά το οποίο κινείται περιστροφικά με γωνία θ , η γωνιακή του επιτάχυνση θα είναι ίση με $\ddot{\theta}$ (οι τελείες συμβολίζουν παραγωγή ως προς το χρόνο) και ομοίως και για το άλλο ελατήριο και έτσι ο νόμος του Νεύτωνα γίνεται

$-\frac{kL}{2}\Delta x - mgL\sin\theta = I\ddot{\theta}$	(4α)
$\frac{kL}{2}\Delta x - mgL\sin\varphi = I\ddot{\varphi}$	(4β)

Οι εξισώσεις (4) μπορούν να λυθούν σχετικά απλά, κάνοντας τον εξής συλλογισμό. Αρχικά θα γίνει η προσέγγιση των μικρών γωνιών όπως και στην περίπτωση του απλού εκκρεμούς και έτσι αυτές γίνονται

$-\frac{kL}{2}\Delta x - mgL\theta = I\ddot{\theta}$	(5α)
$\frac{kL}{2}\Delta x - mgL\varphi = I\ddot{\varphi}$	(5β)

Μπορούμε αυτές τις εξισώσεις να τις προσθέσουμε κατά μέλος καταλήγοντας στο αποτέλεσμα

$$I(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) = -mgL(\theta + \varphi)$$

Αυτή η Διαφορική Εξίσωση είναι ταυτόσημη με την Διαφορική Εξίσωση (1) με τη μόνη διαφορά ότι αντί για φ έχουμε τις το άθροισμα των γωνιών $\theta + \varphi$ και επομένως η λύση θα είναι επίσης αρμονική

$\theta + \varphi = A \cos \omega_0 t$	(6)
--	-----

με A : σταθερά και με την ίδια γωνιακή συχνότητα

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

που βρήκαμε για το απλό εκκρεμές, Εξίσωση (2). Αντιθέτως η αφαίρεση κατά μέλη των εξισώσεων (5) οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$I(\theta - \varphi)'' = -kL\Delta x - mgL(\theta - \varphi)$$

Αντικαθιστούμε στην παραπάνω την εξίσωση (3) και έχουμε

$$I(\theta - \varphi)'' = -\frac{kL^2}{2}(\theta - \varphi) - mgL(\theta - \varphi)$$

ή

$$I(\theta - \varphi)'' = -mgL \left(1 + \frac{kL}{2mg}\right) (\theta - \varphi)$$

Θέτοντας

$$L' = L \left(1 + \frac{kL}{2mg}\right)$$

η παραπάνω γίνεται

$$I(\theta - \varphi)'' = -mgL'(\theta - \varphi)$$

Αυτή η Διαφορική Εξίσωση είναι ταυτόσημη με την Διαφορική Εξίσωση (1) με τη μόνη διαφορά ότι αντί για φ έχουμε τις τη διαφορά των γωνιών $\theta - \varphi$ και αντί για L έχουμε το L' και επομένως η λύση θα είναι επίσης αρμονική

$\theta - \varphi = B \cos \omega_\delta t$	(7)
---	-----

με B : σταθερά και παρόμοια με την Εξ. (2), η κυκλική συχνότητα ω_δ θα δίνεται από την

$$\omega_\delta = \sqrt{\frac{mgL'}{I}}$$

ή

$\omega_\delta = \sqrt{\frac{mgL}{I} \left(1 + \frac{kL}{2mg}\right)}$	(8)
--	-----

Με προσθαφαίρεση των Εξν. (6) και (7) εύκολα βρίσκουμε ότι οι γωνίες θ και φ αποτελούνται από δυο αρμονικούς όρους με συχνότητες ω_0 και ω_δ ως εξής:

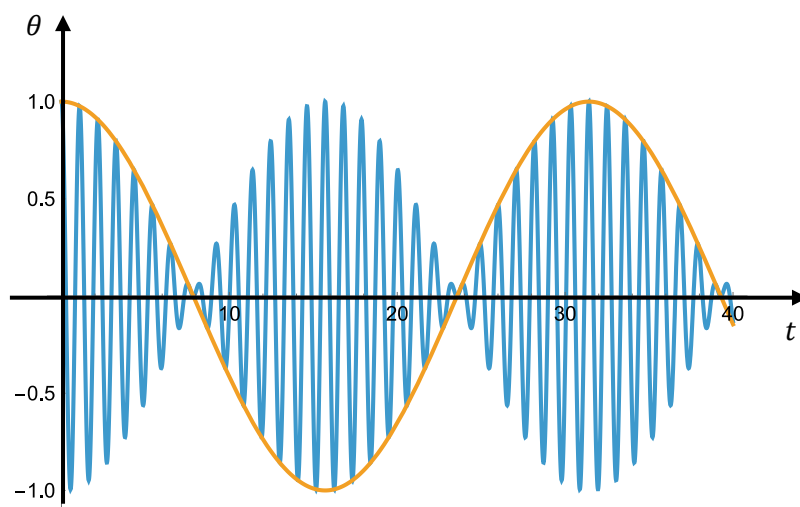
$$\theta = \frac{A}{2} \cos \omega_0 t + \frac{B}{2} \cos \omega_\delta t$$

$$\varphi = \frac{A}{2} \cos \omega_0 t - \frac{B}{2} \cos \omega_\delta t$$

Για όμοια εκκρεμή, οι δυο σταθερές είναι ίσες $A = B$. Με τη χρήση απλών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$\theta = A \cos \left(\frac{\omega_0 + \omega_\delta}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_\delta - \omega_0}{2} t \right)$	(9α)
$\varphi = -\sin \left(\frac{\omega_0 + \omega_\delta}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega_\delta - \omega_0}{2} t \right)$	(9β)

Θεωρητικά οι γραφικές παραστάσεις των δυο παραπάνω γωνιών συναρτήσει του χρόνου φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Σε αυτές γίνεται φανερό ότι εμφανίζονται δυο συχνότητες, μια χαμηλή συχνότητα

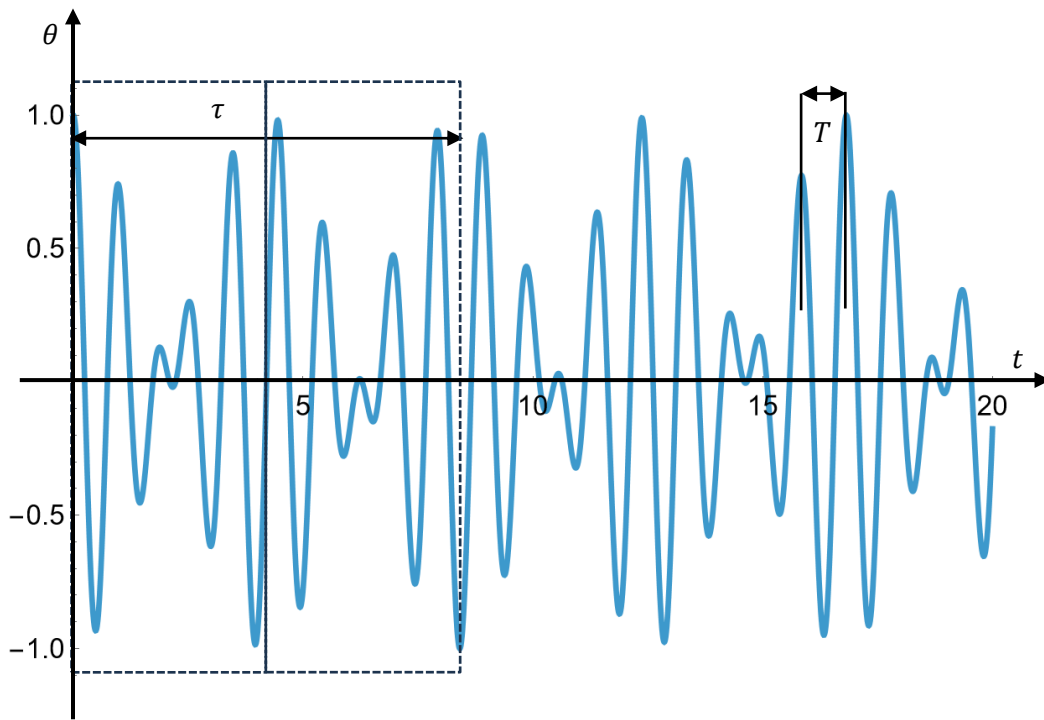


$\omega = \frac{\omega_\delta - \omega_0}{2}$	(10)
---	------

της περιβάλλουσας (με μαύρη έντονη γραμμή) και μια μεγαλύτερη συχνότητα

$\Omega = \frac{\omega_\delta + \omega_0}{2}$	(11)
---	------

των κυματισμών. Στην πράξη τα δεδομένα που λαμβάνουμε έχουν την εξής μορφή:



Σχήμα 3. Τυπικές μετρήσεις της γωνίας του ενός εκκρεμούς για την διάταξη του Σχήματος 2.

Δηλαδή φαίνεται σαν να υπάρχει ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο το οποίο το περιορίζουμε με την βοήθεια του διακεκομμένου πλαισίου. Η περίοδος τ που αντιστοιχεί στο ω της Εξ. (10) ισοδυναμεί με τον χρόνο δυο τέτοιων μοτίβων, όπως φαίνεται και στο σχήμα. Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε την κυκλική της συχνότητα ω από την σχέση

$\omega = \frac{2\pi}{\tau}$	(12)
------------------------------	------

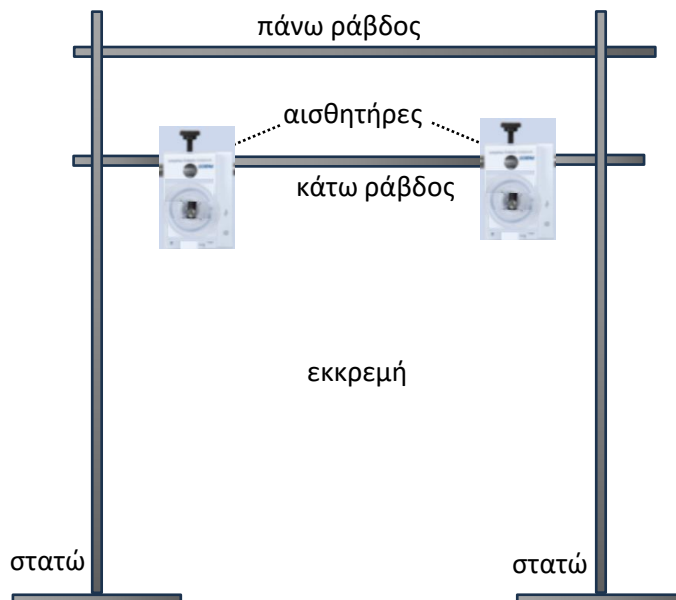
Ομοίως οι κυματισμοί έχουν την δική τους περίοδο T και έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε την αντίστοιχη κυκλική συχνότητα Ω από την σχέση

$\Omega = \frac{2\pi}{T}$	(13)
---------------------------	------

3 Πειραματική διάταξη

Για τη διεξαγωγή της άσκησης θα πρέπει οι φοιτητές να έχουν προμηθευτεί μια μίνι μονάδα USB αποθήκευσης αρχείων (USB stick) επειδή θα ληφθούν αυτόματα κάποια δεδομένα. Σε αυτή την άσκηση ΔΕΝ ασχολούμαστε με σφάλματα αλλά μόνο με τις καθαρές μετρήσεις και πρέπει να γίνουν τα εξής βήματα:

Με τη βοήθεια των δυο στατώ και των δυο οριζόντιων ράβδων, πρέπει να χτιστεί ένα ορθογώνιο πλαίσιο επάνω στον πάγκο σας ώστε να αναρτηθούν στην χαμηλότερη ράβδο οι δυο αισθητήρες της γωνίας, όπως στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4. Πλαίσιο για την στήριξη των αισθητήρων.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι αισθητήρες είναι πολύ ευαίσθητα μετρητικά όργανα και απαιτούν ιδιαίτερη φροντίδα ώστε να μη χτυπήσουν με άλλα αντικείμενα ή να μην πέσουν από ύψος.

Αφού γίνει η μηχανολογική στήριξη του πλαισίου και η τοποθέτηση των αισθητήρων επάνω σε αυτό με σταθερό τρόπο, συνδέουμε τους δυο αισθητήρες μέσω USB στον υπολογιστή, σε όποια θύρα είναι διαθέσιμη, δεν έχει σημασία. Ακολουθως ανοίγουμε τον υπολογιστή και μέσα στο φάκελο "Άσκηση 3" Που βρίσκεται στην επιφάνεια εργασίας αναζητούμε και ανοίγουμε το αρχείο "ΟΔΗΓΙΕΣ λογισμικό PASCO.docx". Αυτό το αρχείο είναι ο οδηγός μας για την αυτόματη καταγραφή των γωνιών με τη χρήση του λογισμικού PASCO σε συνεργασία με τους δυο αισθητήρες.

4 Πειραματική διαδικασία της άσκησης

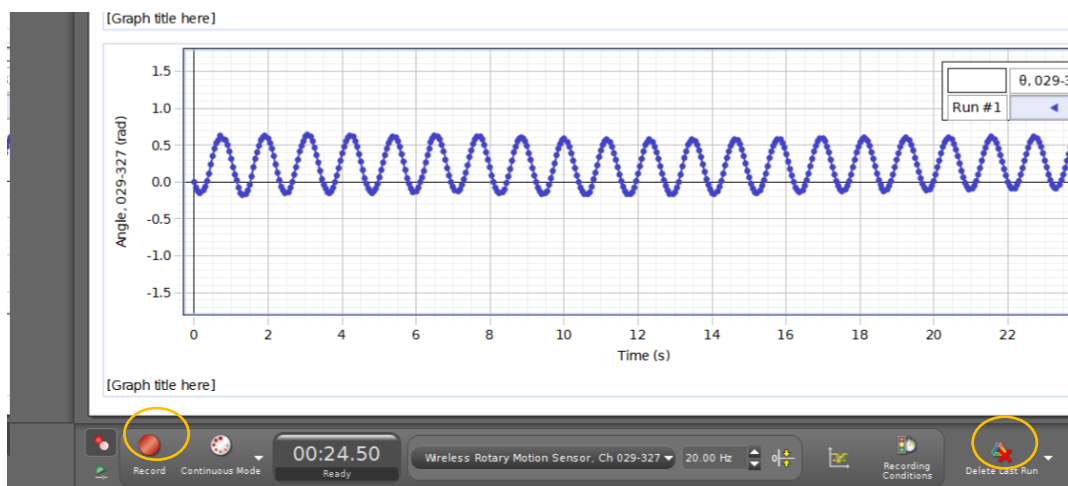
4.1 Μονό εκκρεμές, καταγραφή ταλαντώσεων σε αρχείο

Βεβαιωθείτε ότι οι αισθητήρες σας είναι στερεωμένοι σφιχτά στην κάτω ράβδο του πλαισίου σας στο Σχήμα 4 και εάν δεν έχει γίνει ήδη, αναρτήστε επάνω τους το μαύρο ραβδί όπως στο παρακάτω σχήμα, σφίγγοντας αρκετά την βίδα που επισημαίνεται. Καλά είναι το σφίξιμο να γίνει με το χέρι. Βεβαιωθείτε ότι στο κάτω μέρος του ραβδιού, έχετε αναρτήσει κάποιο βάρος το οποίο παίζει τον ρόλο της σημειακής μάζας.



Σχήμα 5. Προσαρμογή του εκκρεμούς επάνω στον αισθητήρα.

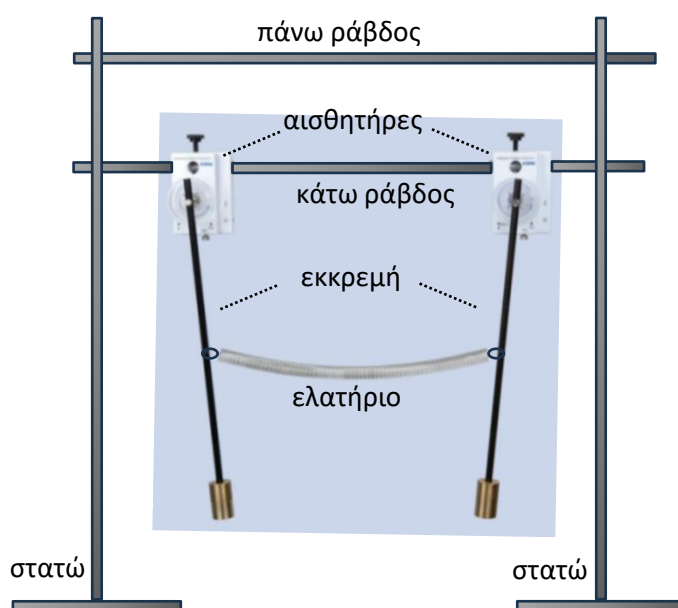
Ακολουθούμε πιστά τα βήματα στο αρχείο "ΟΔΗΓΙΕΣ λογισμικό PASCO.docx" ώστε να είμαστε έτοιμοι να λάβουμε δεδομένα. Εκτρέπουμε το εκκρεμές κατά μια μικρή γωνία μερικών μοιρών και κατόπιν αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να εκτελέσει ταλάντωση εκκρεμούς. Αφού περιμένουμε 3-4 περιόδους να εξελιχθούν, πατάμε στο λογισμικό της PASCO το κομβίο "RECORD" στα κάτω αριστερά, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Αφού έχουμε πάρει έναν ικανοποιητικό αριθμό περιόδων, παραδείγματος χάρη 10, σταματάμε τη λήψη δεδομένων πατώντας το ίδιο κομβίο (το οποίο τώρα έχει την ένδειξη "PAUSE"). Εάν δεν είμαστε ικανοποιημένοι με το αποτέλεσμα και θέλουμε να επαναλάβουμε την μέτρηση, πατάμε το κομβίο "DELETE LAST RUN" κάτω δεξιά. Ακολούθως αποθηκεύουμε τα δεδομένα μας σε κάποιο αρχείο



στον φάκελο "Άσκηση 3" στην επιφάνεια εργασίας, σύμφωνα με τα βήματα στο αρχείο "ΟΔΗΓΙΕΣ λογισμικό PASCO.docx".

4.2 Διπλό συζευγμένο εκκρεμές, καταγραφή ταλαντώσεων σε αρχείο

Συνδέουμε τα δυο εκκρεμή με ένα ελατήριο όπως στο παρακάτω σχήμα. Στην μέση περίπου των δυο ραβδιών, υπάρχει μια οπή στο καθένα όπου μπορείτε να περάσετε τα άκρα των ελατηρίων, είναι από όλκιμο υλικό, μπορείτε να τα παραμορφώσετε αρκετά χωρίς αυτά να χάσουν την ελαστικότητά τους ώστε να περάσουν από τις οπές.



Σχήμα 6. Πειραματική διάταξη συζευγμένων εκκρεμών.

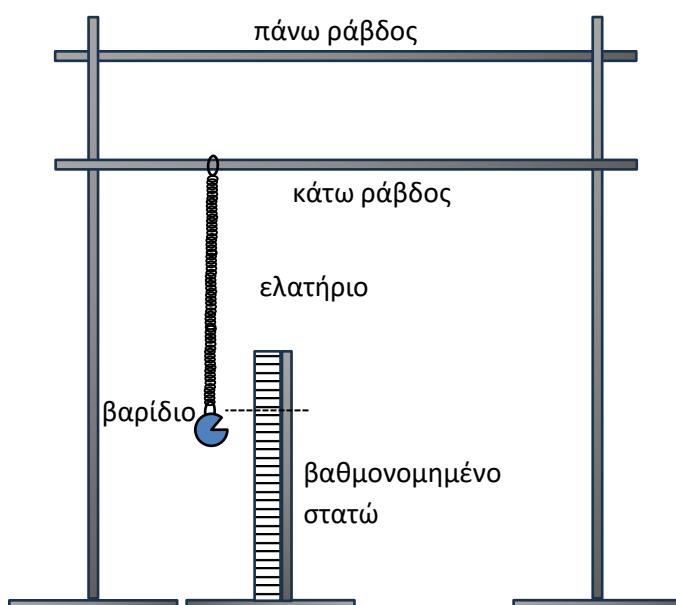
Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, απομακρύνουμε το ένα εκκρεμές από τη θέση ισορροπίας του κατά περίπου 5 μοίρες κρατώντας το άλλο σταθερό, και αφού απελευθερώσουμε τα δυο εκκρεμή, καταγράφουμε σχεδόν άμεσα την μέτρηση των δυο γωνιών συναρτήσει του χρόνου σύμφωνα με τα βήματα στο αρχείο "ΟΔΗΓΙΕΣ λογισμικό PASCO.docx". Ακολούθως αποθηκεύουμε τα δεδομένα μας σε κάποιο αρχείο στον φάκελο "Άσκηση 3" δίνοντας ένα διαφορετικό όνομα από ότι στην προηγούμενη ενότητα, π.χ. "διπλό εκκρεμές.csv".

4.3 Ζύγιση των μαζών και μέτρηση της σταθεράς ελατηρίου

Σε αυτό το μέρος θα μετρηθούν οι σταθερές του προβλήματος που είναι η μάζα m της σημειακής μάζας, η μάζα m_p και το μήκος L του ραβδιού στο Σχήμα 5 καθώς και η σταθερά k του ελατηρίου. Για να μετρήσουμε τις πρώτες τρεις ποσότητες, ξεβιδώνουμε τη βίδα στο Σχήμα 5 και ξεχωρίζουμε το ραβδί με

τη σημειακή μάζα. Ακολουθώντας τα τοποθετούμε ξεχωριστά επάνω στον μικρό ζυγό που υπάρχει επάνω στον πάγκο της άσκησης, κι αφού έχουμε πρώτα μηδενίσει τη ζυγαριά μετράμε τα βάρη τους σε γραμμάρια. Τέλος μετράμε με μετροταινία το μήκος L του ραβδίου.

Για τη μέτρηση της σταθεράς ελατηρίου αφαιρούμε το ελατήριο από τα δυο εκκρεμή και το αναρτούμε κατακόρυφα στην κάτω ράβδο του πλαισίου, όπως στο παρακάτω σχήμα. Στο κάτω άκρο του ελατηρίου αναρτούμε βαρίδια και με τη βοήθεια ενός βαθμονομημένου στατώ (στατώ με προσαρμοζόμενο χάρακα) μετράμε την παραμόρφωση του ελατηρίου για τουλάχιστον τέσσερα ξεχωριστά βαρίδια.



Σχήμα 6. Πειραματική διάταξη .

Οι μετρήσεις σας πρέπει να καταγραφούν στο φύλλο μετρήσεων το οποίο έχει τον εξής πίνακα

Σημειακή μάζα $m =$	Ραβδί $m_\delta =$ Μήκος $L =$
Βαρίδιο (g)	Ένδειξη χάρακα (cm)

5 Πλήρης ομαδική έκθεση

ΠΕΡΙΛΗΨΗ – ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ – ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ -

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ/ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ -ΣΥΜΒΟΛΑ – ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ -

ΠΑΡΑΤΗΜΑ (φύλλο μετρήσεων)

Κάθε ομάδα παραδίδει μια έκθεση, η οποία περιλαμβάνει

- a. Ένα αρχείο EXCEL με γραφικές παραστάσεις και
- b. το υπόλοιπο γραπτό (με μια χειρόγραφη γραφική παράσταση!) σε μορφή pdf.

Η τελική μορφή της έκθεσής θα πρέπει να ακολουθεί πιστά τις οδηγίες συγγραφής που δίνονται στα «Έγγραφα» στις [ΓΕΝΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ ΕΡΓ 2023](#).

Κάθε έκθεση ελέγχεται για λογοκλοπή με το πρόγραμμα [Turnitin](#). Σε περίπτωση [λογοκλοπής](#) άνω του 30%, η έκθεση θα αξιολογηθεί με 0/10.

- ✓ Το όνομα του αρχείου περιέχει μόνο το αντίστοιχο τμήμα και τον αριθμό μητρώου των συμμετεχόντων φοιτητών, για παράδειγμα τμήμα A1 και AM = 1020875, 103567 -> A1-1020875-103567.pdf.
- ✓ Η ομαδική εργασία μεταφορτώνεται **μόνο** από **ένα μέλος** της ομάδας.
- ✓ Η εργασία αυτή παραδίνεται αυστηρά μέχρι δυο εβδομάδες μετά την εκτέλεση της άσκησης ηλεκτρονικά μέσω του eclass «Εργασίες» στο πλαίσιο της σχετικής άσκησης (οι διακοπές του Πάσχα δεν προσμετρώνται στην καταμέτρηση). Εάν δεν τηρηθεί η προθεσμία, θα αφαιρεθούν πόντοι.
- ✓ Κατά προτίμηση, οι εργασίες πρέπει να ανεβαίνουν σε μορφή PDF. Τα σχόλια του βαθμολογητή μπορούν να φανούν μόνο σε υπολογιστή με εφαρμογή που ανοίγει τέτοιου είδους αρχεία, όπως το Adobe Reader και όχι σε φυλλομετρητές του διαδικτύου ή σε κινητά. Εκεί τα σχόλια δεν εμφανίζονται ορθά.

5.1 Μέτρηση της συχνότητας του απλού εκκρεμούς

Από το αρχείο Excel που πήρατε με τις μετρήσεις του απλού εκκρεμούς, πρέπει να γίνει η γραφική παράσταση της γωνίας του συναρτήσεως του χρόνου (στο ίδιο Excel). Αυτή πρέπει να έχει τη μορφή ενός αρμονικού ταλαντωτή με μια μικρή απόσβεση και αφού μετρήσετε επάνω στη γραφική παράσταση τον χρόνο μερικών (5-10) πλήρων ταλαντώσεων πρέπει να βρείτε την περίοδο T_0 της μιας ταλάντωσης. Από αυτήν πρέπει να βρεθεί η γωνιακή συχνότητα ω_0 του απλού εκκρεμούς. Προσοχή, αυτό είναι το ένα από τα αρχεία που θα παραδώσετε.

5.2 Μέτρηση των δυο ιδιοσυχνοτήτων των συζευγμένων εκκρεμών

Από το αρχείο Excel που περιέχει τις μετρήσεις των συζευγμένων εκκρεμών, μεταφέρετε σε νέο φύλλο στο αρχείο Excel της προηγούμενης υποενότητας, τον χρόνο και τις γωνίες των δυο εκκρεμών. Σε αυτό το αρχείο, που είναι και το αρχείο που θα παραδώσετε, πρέπει να γίνει η γραφική παράσταση των

δύο γωνιών συναρτήσει του χρόνου (σε ξεχωριστές γραφικές παραστάσεις). Κάθε μία από αυτές, πρέπει να έχει τη μορφή του Σχήματος 3. Επιλέγουμε την καλύτερη από αυτές και προσπαθούμε να διακρίνουμε μια επαναλαμβανόμενη πατέντα, όπως στο προαναφερθέν σχήμα, και να υπολογίσουμε την περίοδο της τ . Επίσης μετράμε έναν αριθμό ταλαντώσεων των υψίσυχων κυματισμών και από αυτές προσδιορίζουμε την περίοδο τους T . Να γίνουν οι εξής υπολογισμοί από αυτές τις περιόδους:

- (α) Να βρεθούν οι κυκλικές συχνότητες (ιδιοσυχνότητες) ω και Ω .
- (β) Από αυτές, να βρεθούν οι κυκλικές συχνότητες ω_0 και ω_δ .
- (γ) Επαληθεύστε ότι η κυκλική συχνότητα ω_0 που βρήκατε στο προηγούμενο βήμα συμπίπτει με την αντίστοιχη κυκλική συχνότητα του απλού εκκρεμούς της προηγούμενης υποενότητας

5.3 Μέτρηση των κυκλικών συχνοτήτων του αθροίσματος και της διαφοράς των γωνιών

Στο παραπάνω αρχείο Excel με τις γραφικές παραστάσεις, υπολογίστε σε δυο νέες στήλες το άθροισμα $\theta + \varphi$ και τη διαφορά $\theta - \varphi$ των δυο γωνιών και ακολούθως κάντε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις συναρτήσει του χρόνου (ξεχωριστά). Ποιο συμπέρασμα βγάξετε από αυτές τις γραφικές παραστάσεις; Από τις αντίστοιχες περιόδους που θα μετρήσετε επάνω σε αυτές, υπολογίστε τις αντίστοιχες κυκλικές συχνότητες και επαληθεύστε ότι συμπίπτουν με τις ω_0 και ω_δ της προηγούμενης υποενότητας.

5.4 Προσδιορισμός της σταθεράς του ελατηρίου

Από τις μετρήσεις των συντεταγμένων του κάτω άκρου του κατακόρυφου ελατηρίου συναρτήσει των διαφόρων μαζών που αναρτήσατε σε αυτό, να γίνει στο χέρι σε χαρτί μιλιμετρέ η γραφική παράσταση της δύναμης του βάρους N συναρτήσει των συντεταγμένων σε cm . Από την κλίση αυτής της γραφικής παράστασης να βρεθεί η σταθερά του ελατηρίου k που χρησιμοποιήσατε στο πείραμα. Δεν χρειάζεται απαραίτητα να αφαιρείται το αρχικό μήκος του ελατηρίου δηλαδή η γραφική παράσταση δεν χρειάζεται να περνάει από την αρχή των αξόνων.

5.5 Άσκηση για ΕΠΙΠΛΕΟΝ βαθμολόγηση

Στη θεωρία θεωρήθηκε ότι το εκκρεμές είναι ιδανικό με μια αβαρή ράβδο και μια σημειακή μάζα στα στο κάτω άκρο της. Γνωρίζετε όμως από τις μετρήσεις σας ότι η ράβδος όχι μόνο δεν είναι αβαρής αλλά αντιθέτως το βάρος της είναι συγκρίσιμο με αυτό του βαριδίου. Σκεφτείτε τι θα άλλαζε στη θεωρία εάν αντικαταστήσουμε την αβαρή ράβδο με μια ράβδο μάζας m_p . Πώς θα αλλάξει ο τύπος της συχνότητας ω_0 ; Εάν εξαγάγετε ένα νέο τύπο για την ω_0 , αντικαταστήστε σε αυτήν τις σταθερές του προβλήματός σας και δείτε πόσο κοντά πέφτετε στη μετρήσιμη τιμή της (που προσδιορίστηκε από τις γραφικές παραστάσεις με τη βοήθεια των περιόδων). Κάνετε το ίδιο και για την ω_δ

6 Βιβλιογραφία

- [1] R. A. Serway, “Physics for Scientists and Engineers, Volume 2”, Saunders College Publishing, 1990.
- [2] H. D. Young, «Πανεπιστημιακή Φυσική», Τόμος Α, Κεφ. 27, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1994 .
- [3] [ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΦΑΛΜΑΤΑ 2022](#)