
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΠΑΤΡΑ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2026

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- 1 Εισαγωγή
- 2 Διαστάσεις και μονάδες
- 3 Σημαντικά ψηφία
 - 3.1 Κανόνες στρογγυλοποίησης
 - 3.2 Σημαντικά ψηφία και σφάλματα - «Ορθός τρόπος γραφής» πειραματικών αποτελεσμάτων
- 4 Ταξινόμηση των σφαλμάτων
- 5 Μέση τιμή
- 6 Εκτίμηση σφάλματος
- 7 Μετάδοση σφάλματος
- 8 Εκτίμηση παραμέτρων
- 9 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων για γραμμικές εξισώσεις
- 10 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων για μη-γραμμικές εξισώσεις
- 11 Εκτίμηση ανακριβειών μετρητικών οργάνων
 - 11.1 Διακριτική ικανότητα
 - 11.2 Ακρίβεια
 - 11.3 Ανάγνωση αναλογικών κλιμάκων
 - 11.4 Ανάγνωση ψηφιακών κλιμάκων
- 12 Βιβλιογραφία

1 Εισαγωγή

Οι κύριοι λόγοι, για τους οποίους ένας μηχανικός καλείται να εκτελέσει μία μέτρηση αφορούν:

- ✓ Τη σύγκριση και ταξινόμηση μεγεθών.
- ✓ Τη λήψη αποφάσεων για ένα σύστημα.
- ✓ Την ανάδραση σε ένα σύστημα αυτομάτου ελέγχου.
- ✓ Την πιστοποίηση και τον έλεγχο ποιότητας ενός συστήματος.
- ✓ Τη διάγνωση της ορθής λειτουργίας ενός συστήματος.

Η γνώση που έχουμε για το φυσικό κόσμο έχει προκύψει μέσω της διεξαγωγής πειραματικών μετρήσεων και πειραμάτων. Η επεξεργασία πειραματικών δεδομένων δεν έχει πάντα σαν σκοπό την εύρεση της αριθμητικής τιμής ενός μετρούμενου μεγέθους με απλή ή σύνθετη μέτρηση. Τις περισσότερες φορές ο σκοπός ενός πειράματος είναι η εύρεση ή επαλήθευση μιας μαθηματικής σχέσης που να συνδέει τα μετρούμενα μεγέθη. Είναι σημαντικό να ξέρει κανείς να εκφράζει αυτά τα **δεδομένα (data)**, πως να τα αναλύει και πως να οδηγείται σε συμπεράσματα από αυτά. Κατά τη διαδικασία αυτή, είναι σημαντικό να καταλάβουμε ότι όλες οι μετρήσεις φυσικών μεγεθών εμπεριέχεται κάποια αβεβαιότητα (**πειραματικό σφάλμα**).

Πάντως διευκρινίζουμε εδώ, ότι στο εκπαιδευτικό εργαστήριο φυσικής το πρόβλημα δεν είναι να έχουμε μικρά σφάλματα, αλλά να μπορούμε να εξηγήσουμε τις αιτίες των σφαλμάτων αυτών.

2 Διαστάσεις και μονάδες

Οι επτά βασικές ποσότητες και οι αντίστοιχες μονάδες τους στο σύστημα SI είναι:

- ✓ Η μάζα, με μονάδα το ένα χιλιόγραμμο, kg
- ✓ Το μήκος, με μονάδα το ένα μέτρο, m .
- ✓ Ο χρόνος, με μονάδα το ένα δευτερόλεπτο, s .
- ✓ Η ένταση ηλεκτρικού ρεύματος, με μονάδα το ένα αμπέρ, A .
- ✓ Η θερμοκρασία, με μονάδα τον ένα βαθμό Κέλβιν, K .
- ✓ Η ποσότητα ουσίας, με μονάδα γραμμομόριο, mol
- ✓ Η ένταση φωτεινότητας, με μονάδα τη μία καντέλα, cd .

Οι μονάδες του συστήματος SI, που μετρούν όλες τις υπόλοιπες φυσικές ποσότητες, προκύπτουν από τις ανωτέρω επτά, ακόμη και όταν οι φυσικές αυτές ποσότητες διαθέτουν μονάδες με συγκεκριμένη ονομασία. Για παράδειγμα η δύναμη μετριέται σε Newton (N), όπου $1N = 1 kg m s^{-2}$.

Πίνακας 1: Οι μονάδες του συστήματος SI

Μέγεθος που μετρά	Όνομα μονάδας	Ορισμός μονάδας
Μάζα	χιλιόγραμμα (<i>kg</i>)	Το Χιλιόγραμμα είναι η μάζα του πρότυπου χιλιόγραμμου, ενός κυλίνδρου από ιριδιούχο λευκόχρυσο που φυλάσσεται στο Διεθνές Γραφείο Μέτρων και Σταθμών (International Bureau of Weights and Measures) στις Sevres στη Γαλλία.
Μήκος	μέτρο (<i>m</i>)	Το Μέτρο είναι η απόσταση την οποία διανύει το φως στο κενό σε χρονικό διάστημα ίσο με $1/299.792.458$ δευτερόλεπτα.
Χρόνος	δευτερόλεπτο (<i>s</i>)	Το Δευτερόλεπτο είναι η χρονική διάρκεια $9.192.631.770$ περιόδων ακτινοβολίας που αντιστοιχεί στην μετάβαση δύο υπέρλεπτων ενεργειακών σταθμών της κατάστασης ελάχιστης ενέργειας του ατόμου του κασίου 133 (^{133}Cs) σε θερμοκρασία 0 K .
Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος	αμπέρ (<i>A</i>)	Το Αμπέρ είναι το σταθερό ηλεκτρικό ρεύμα το οποίο όταν διατηρείται σε δύο ευθύγραμμους παράλληλους αγωγούς απείρου μήκους και αμελητέας διατομής, τοποθετημένους σε απόσταση 1 μέτρου στο κενό, θα παρήγαγε μεταξύ αυτών των αγωγών μία δύναμη ίση με $2 \times 10^{-7}\text{ N}$ ανά μέτρο μήκους.
Απόλυτη Θερμοκρασία	Κέλβιν (<i>K</i>)	Το Κέλβιν είναι το κλάσμα $1/273,16$ της απόλυτης θερμοκρασίας του τριπλού σημείου του νερού.
Ποσότητα Ουσίας	γραμμομόριο (<i>mol</i>)	Το γραμμομόριο είναι η ποσότητα μίας ουσίας που περιέχει τόσες στοιχειώδεις μονάδες (π.χ. μόρια) όσα είναι τα άτομα σε $0,012\text{ kg}$ καθαρού άνθρακα 12 (^{12}C).
Ένταση Φωτεινότητας	Καντέλα (<i>cd</i>)	Η Καντέλα είναι η φωτεινή ένταση, σε μία δεδομένη διεύθυνση, μίας πηγής που εκπέμπει μονοχρωματική ακτινοβολία με συχνότητα $540 \times 10^{12}\text{ Hz}$ και έχει ένταση ακτινοβολίας στην κατεύθυνση αυτή ίση με $1/683\text{ Watt}$ ανά στερεακτίνιο.

Τα πολλαπλάσια και τα δεκαδικά υποπολλαπλάσια των μονάδων SI υποδηλώνονται με προθέματα. Τα συχνότερα χρησιμοποιούμενα παρατίθεται στον Πίνακα 2.

Πίνακας 2: Προθέματα μονάδων SI

πολλαπλάσιος	πρόθεμα	σύμβολο	πολλαπλάσιος	πρόθεμα	σύμβολο
10^{-12}	pico	p	10^{12}	tera	T
10^{-9}	nano	n	10^9	giga	G
10^{-6}	micro	μ	10^6	mega	M
10^{-3}	milli	m	10^3	kilo	k
10^{-2}	centi	c			
10^{-1}	deci	d			

3 Σημαντικά ψηφία

Σημαντικό ψηφίο ονομάζεται εκείνο το ψηφίο, το οποίο δίνει αξιόπιστη πληροφορία σχετικά με την τιμή του φυσικού μεγέθους. Έτσι, στην περίπτωση που μετράμε κάποιο φυσικό μέγεθος με το τελευταίο ψηφίο «κατ'εκτίμηση», αυτό ακριβώς το ψηφίο είναι το τελευταίο σημαντικό. Ακολουθούν μερικοί απλοί κανόνες για τον προσδιορισμό των σημαντικών ψηφίων:

- ✓ Κάθε ψηφίο που δεν είναι μηδέν είναι σημαντικό.

549 τρία σημαντικά ψηφία

18,92 τέσσερα σημαντικά ψηφία

- ✓ Τα μηδενικά μεταξύ μη-μηδενικών ψηφίων είναι σημαντικά ψηφία.

501 τρία σημαντικά ψηφία

4,023 τέσσερα σημαντικά ψηφία

- ✓ Τα μηδενικά του πρώτου μη-μηδενικού ψηφίου δεν είναι σημαντικά.

0,000034 (34×10^{-6}) δυο σημαντικά ψηφία

400 (4×10^2) ένα σημαντικό ψηφίο

- ✓ Για αριθμούς με δεκαδικά ψηφία, τα μηδενικά στα δεξιά του μη-μηδενικού ψηφίου είναι σημαντικά. Για αυτό το λόγο, είναι σημαντικό να κρατάει κανείς στις τιμές το απαιτούμενο πλήθος μηδενικών μετά την υποδιαστολή για να δείξει τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων.

2,00 τρία σημαντικά ψηφία

400,0 (4.000×10^2) τέσσερα σημαντικά ψηφία

0,050 ($5,0 \times 10^{-2}$) δύο σημαντικά ψηφία

Για παράδειγμα, μια μέτρηση μήκους 100 m έχει ένα σημαντικό ψηφίο, αλλά είναι πιθανό ότι αυτή η μέτρηση πραγματικά έγινε με μεγαλύτερη ακρίβεια (δηλαδή έχει δύο ή παραπάνω σημαντικά ψηφία). Τότε γράφεται η μέτρηση με διαφορετικό τρόπο, χρησιμοποιώντας την επιστημονική μορφή. Αν θέλουμε να βεβαιώσουμε ότι η μέτρηση 100 m έχει μια ακρίβεια με δύο σημαντικά ψηφία (ΣΨ), τότε γράφουμε $1,0 \times 10^2\text{ m}$. Αν έχει τρία ΣΨ, τότε γράφουμε $1,00 \times 10^2\text{ m}$. Αν έχει τέσσερα ΣΨ, τότε αρκεί το $100,0\text{ m}$.

Στην πράξη οι τιμές μεγεθών που έχουν προκύψει από μετρήσεις χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό κάποιου άλλου μεγέθους. Το τελικό αποτέλεσμα όμως πρέπει να εκφραστεί με το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων:

Κατά την πρόσθεση ή την αφαίρεση, το αποτέλεσμα γράφεται με όσα δεκαδικά ψηφία έχει ο αριθμός με την μικρότερη ακρίβεια:

$$89,332 + 1,1 = 90,432 \text{ (λάθος)}$$

Πρέπει να γίνει στρογγυλοποίηση στο 90,4 (το 1,1 με μικρότερη ακρίβεια καθορίζει τα σημαντικά ψηφία).

Κατά τον πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση, το αποτέλεσμα γράφεται με όσα σημαντικά ψηφία έχει ο αριθμός με τα λιγότερα σημαντικά ψηφία:

$$(2,80) \times (4,5039) = 12,61092 \text{ (λάθος)}$$

Πρέπει να γίνει στρογγυλοποίηση στο 12,61 (το 2,80 με τα λιγότερα σημαντικά ψηφία καθορίζει τα σημαντικά ψηφία).

Are Significant Figures Important? A Fable

A student once needed a cube of metal that had to have a mass of 83 *g*. He knew the density of this metal was 8.67 *g/cm*³, which told him the cube's volume. Believing significant figures were invented just to make life difficult for students and had no practical use in the real world, he calculated the volume of the cube as 9.573 *cm*³. He thus determined that the edge of the cube had to be 2.097 *cm*. He took his plans to the machine shop where his friend had the same type of work done the previous year. The shop foreman said, "Yes, we can make this according to your specifications - but it will be expensive."

"That's OK," replied the student. "It's important." He knew his friend has paid € 35, and he had been given € 50 out of the school's research budget to get the job done.

He returned the next day, expecting the job to be done. "Sorry," said the foreman. "We're still working on it. Try next week." Finally, the day came, and our friend got his cube. It looked very, very smooth and shiny and beautiful in its velvet case. Seeing it, our hero had a premonition of disaster and became a bit nervous. But he summoned up enough courage to ask for the bill. "€ 500, and cheap at the price. We had a terrific job getting it right -- had to make three before we got one right."

"But--but--my friend paid only € 35 for the same thing!"

"No. He wanted a cube 2.1 *cm* on an edge, and your specifications called for 2.097 *cm*. We had yours roughed out to 2.1 *cm* that very afternoon, but it was the precision grinding and lapping to get it down to 2.097 *cm* which took so long and cost the big money. The first one we made was 2.089 *cm* on one edge when we got finished, so we had to scrap it. The second was closer, but still not what you specified. That's why the three tries."

"Oh!"

From <http://dbhs.wvusd.k12.ca.us/SigFigs/SigFigRules.html>

3.1 Κανόνες στρογγυλοποίησης φυσικών μεγεθών

Η στρογγυλοποίηση μπορεί να γίνει σε οποιοδήποτε ψηφίο του αριθμού (δεκαδικό ή ακέραιο) ανάλογα με την ακρίβεια της μέτρησης που θέλουμε να εκφράσει.

Έστω ότι επιλέξαμε το ψηφίο στο οποίο θέλουμε να κάνουμε την στρογγυλοποίηση (το υπογραμμισμένο με έντονη γραφή ψηφίο στους αριθμούς των παρακάτω παραδειγμάτων). Προσέχουμε πάντα το αμέσως επόμενο ψηφίο στα δεξιά (το ψηφίο της αμέσως μικρότερης τάξης) και ακολουθούμε τους εξής κανόνες:

A) Αν είναι μικρότερο του 5 (αρά παίρνει τις τιμές 1, 2, 3 ή 4), διατηρείται το υπό στρογγυλοποίηση ψηφίο ως έχει, και τα υπόλοιπα ψηφία των μικρότερων τάξεων μετατρέπονται σε μηδενικά.

Παραδείγματα

8, <u>6</u> 17	0,0 <u>3</u> 43	37,1 <u>3</u> 25	7 <u>5</u> 24	6 <u>4</u> 443,32
8,6	0,03	37,13	7500	64000

B) Αν είναι μεγαλύτερο του 5 (και άρα παίρνει τις τιμές 6, 7, 8 ή 9), αυξάνεται το υπό στρογγυλοποίηση ψηφίο κατά μια μονάδα και τα υπόλοιπα ψηφία των μικρότερων τάξεων μετατρέπονται σε μηδενικά.

Παραδείγματα

8, <u>6</u> 77	0,0 <u>3</u> 63	37,1 <u>3</u> 85	7 <u>5</u> 94	6 <u>4</u> 872,32
8,7	0,04	37,14	7600	65000

Γ) Αν είναι ίσο με το 5, τότε κοιτάζουμε αν το υπό στρογγυλοποίηση ψηφίο είναι περιττό (μονό), τότε αυτό το ψηφίο αυξάνεται κατά 1. Αν το εν λόγω ψηφίο είναι άρτιο (ζυγό), τότε το υπό στρογγυλοποίηση ψηφίο παραμένει ως έχει. Τα υπόλοιπα ψηφία των μικρότερων τάξεων μετατρέπονται σε μηδενικά. Προσοχή: Το μηδέν θεωρείται άρτιο.

Παραδείγματα

8, <u>6</u> 52	0,0 <u>3</u> 53	37,1 <u>2</u> 53	7 <u>5</u> 54	6 <u>4</u> 532,32	2,04 <u>9</u> 5	43, <u>0</u> 51
8,6	0,04	37,12	7600	64000	2,050	43,0

Τέλος, παρακάτω σκιαγραφούμε βήμα προς βήμα την στρογγυλοποίηση του αριθμού

34615,574 (8 ΣΨ) → 34615,57 (7 ΣΨ) → 34615,6 (6 ΣΨ) → 34616 (5 ΣΨ) → 34620 (4 ΣΨ) →
34600 (3 ΣΨ) → 35000 (2 ΣΨ) → 40000 (1 ΣΨ)

3.2 Σημαντικά ψηφία και σφάλματα - «Ορθός τρόπος γραφής» πειραματικών αποτελεσμάτων

Ο όρος «σφάλμα» στην επιστημονική γλώσσα σημαίνει την αναπόφευκτη, αριθμητικά εκφρασμένη, έλλειψη ακρίβειας που υπάρχει στη μέτρηση ενός μεγέθους σ' όλα τα πειράματα καθώς και τις τυχόν ατέλειες ή ελαττωματικότητας των οργάνων και των μεθόδων μας.

Δεν είναι ποτέ δυνατή η μέτρηση ενός μεγέθους με 100% ακρίβεια. Είναι καλό βεβαίως το σφάλμα που επιβαρύνει τη μέτρηση να είναι όσο το δυνατό μικρότερο. Προκειμένου να οδηγηθούμε σε συμπεράσματα που ισχύουν, τα σφάλματα πρέπει να προσδιορίζονται και να αντιμετωπίζονται με σοβαρότητα. Έτσι, μια μέτρηση για να έχει νόημα θα πρέπει να συνοδεύεται από την ακρίβειά της. Σε πολλές περιπτώσεις, πιο πολύ προσπάθεια απαιτείται για τον προσδιορισμό του σφάλματος ή της αβεβαιότητας μιας μέτρησης παρά για τη διεξαγωγή της ίδιας της μέτρησης. Το αποτέλεσμα λοιπόν μιας πειραματικής μέτρησης αποτελείται από δύο στοιχεία:

- (1) Την **αριθμητική τιμή** (σε καθορισμένο σύστημα μονάδων) μετρημένη με τον καλύτερο δυνατό τρόπο και
- (2) το **βαθμό της αβεβαιότητας** που σχετίζεται με την αριθμητική τιμή. Δηλαδή: $x = x_b \pm \delta x$.

Για παράδειγμα, η μέτρηση του μήκους ενός αντικειμένου που παρουσιάζεται ως εξής: $95,3 \pm 0,1 \text{ cm}$. Το αποτέλεσμα της μέτρησης δεν είναι μόνο η τιμή x_b , αλλά και το σφάλμα δx . Μια πειραματική τιμή είναι εντελώς άχρηστη αν δεν είναι γνωστή η αβεβαιότητα που τη βαρύνει. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι με τον όρο «**σφάλμα**» (**error**) εννοούμε την αβεβαιότητα που βαρύνει το αποτέλεσμα μιας μέτρησης και την οποία δεν είναι δυνατό να εκμηδενίσουμε.

Το σφάλμα που βαρύνει την τιμή ενός φυσικού μεγέθους, θέτει όριο στο πλήθος των ψηφίων, με τα οποία αυτή γράφεται. Ακολουθούμε τους εξής κανόνες:

- A) Η μέτρηση και το σφάλμα της γράφονται πάντα με τις ίδιες μονάδες.
- B) Το σφάλμα γράφεται με ένα σημαντικό ψηφίο. Τα υπόλοιπα ψηφία στρογγυλοποιούνται.
- Γ) Κατά την αναγραφή ενός πειραματικού αποτελέσματος γράφεται η μετρούμενη τιμή με τόσα δεκαδικά όσα έχει το σφάλμα μετά την στρογγυλοποίηση.

Παρατηρείτε προσεκτικά τα ακολουθία παραδείγματα.

Μέγεθος	τιμή πριν από την επιλογή των σημαντικών ψηφίων		τιμή μετά την επιλογή των σημαντικών ψηφίων		Ορθός τρόπος γραφής
	x	δx	δx	x	
Βάρος	2,64	0,001	0,001	2,640	$2,640 \pm 0,001 g$ ή $(2,640 \pm 0,001) \times 10^{-3} kg$
Δύναμη	12,3	0,01832	0,02	12,30	$12,30 \pm 0,02 N$
Μήκος	9,82145	0,0136	0,01	9,82	$9,82 \pm 0,01 mm$ ή $(9,82 \pm 0,01) \times 10^{-3} m$
Μήκος κύματος	42	2,5	2	42	$42 \pm 2 nm$ ή $(42 \pm 2) \times 10^{-9} m$
Τάση	5,2134	0,4786	0,5	5,2	$5,2 \pm 0,5 V$
Χρόνος	15,36978	$2,35 \times 10^{-4}$	2×10^{-4}	153700×10^{-4}	$(153700 \pm 2) \times 10^{-4} s$
Περίοδος	478	12	10	480	$480 \pm 10 h$
Πίεση	45742	134	100	45700	$45700 \pm 100 Pa$ ή $(45,7 \pm 0,1) \times 10^3 Pa$

4 Ταξινόμηση των σφαλμάτων

Ακούσια σφάλματα

Οι αποκλίσεις από το σωστό αποτέλεσμα που οφείλονται σε λανθασμένη ανάγνωση της ένδειξης ενός μετρητικού οργάνου, ή λανθασμένη καταγραφή ή σε λανθασμένες αριθμητικές πράξεις χαρακτηρίζονται με τον όρο «**λάθη**» (**mistakes**). Τέτοια λάθη μπορούν να αποφευχθούν αν τηρηθούν οι παρακάτω απλοί κανόνες:

- ✓ Να γίνει αξιολόγηση της μέτρησης, δηλαδή να βεβαιωθεί ότι η τάξη μεγέθους είναι μέσα σε λογικά όρια.
- ✓ Να καταγράφονται αμέσως οι μετρήσεις.
- ✓ Να γίνεται η μέτρηση ξεχωριστά από όλα τα μέλη της εργαστηριακής ομάδας.

Συστηματικά σφάλματα

Συστηματικά σφάλματα ονομάζονται εκείνα τα σφάλματα, τα οποία επηρεάζουν πάντα κατά την ίδια φορά ένα πειραματικό αποτέλεσμα, δηλαδή κάνουν το αποτέλεσμα να προκύπτει ή πάντοτε μεγαλύτερο ή πάντοτε μικρότερο από την «ορθή» τιμή. Τα συστηματικά σφάλματα μπορεί να οφείλονται

ή στις προσεγγιστικές σχέσεις που χρησιμοποιούμε ή στον ίδιο τον παρατηρητή. Ο χαρακτηρισμός «συστηματικό» σφάλμα αναφέρεται στο ότι κάποιο σφάλμα εκτρέπει συστηματικά προς την ίδια φορά ένα πειραματικό αποτέλεσμα και δεν αφορά την αιτία που το προκαλεί. Για να μπορέσουμε να εντοπίσουμε και να εξουδετερώσουμε τα συστηματικά σφάλματα, χρειάζεται να εξετάσουμε με μεγάλη προσοχή τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες ισχύουν οι μαθηματικές σχέσεις που χρησιμοποιούμε και να ελέγχουμε τα όργανα που μεταχειριζόμαστε συγκρίνοντας τα με άλλα μεγαλύτερης ακρίβειας.

Τυχαία (ή στατιστικά ή πειραματικά) σφάλματα

Τα **τυχαία σφάλματα** είναι εκείνα που παραμένουν ακόμη και όταν όλα τα ακούσια και συστηματικά σφάλματα έχουν αποφευχθεί. Τα τυχαία σφάλματα οφείλονται σε τυχαίους παράγοντες (ατέλειες του πειράματος, στις αισθήσεις μας και στα μετρητικά όργανα, ακαθόριστες μεταβολές στην διάρκεια του πειράματος), οι οποίοι κάνουν το αποτέλεσμα μιας μέτρησης να προκύπτει τότε μεγαλύτερο και τότε μικρότερο από την «ακριβή» τιμή. Τα σφάλματα αυτά είναι αναπόφευκτα. Για την αξιόπιστη εκτίμηση των τυχαίων σφαλμάτων χρησιμοποιούνται στατιστικές μέθοδοι και υπολογισμοί (παράγραφοι 5 και 6).

Απόλυτο και σχετικό σφάλμα

Στο αποτέλεσμα του πειραματικού προσδιορισμού μιας ποσότητας $x = x_b \pm \delta x$, το σφάλμα αποτελεί μέτρο της αξιοπιστίας των μετρήσεων. Όταν η αβεβαιότητα εκφράζεται κατά τον τρόπο αυτό, ονομάζεται **απόλυτο σφάλμα** και έχει τις ίδιες μονάδες με το μετρούμενο μέγεθος, δείτε τον παρακάτω πίνακα. Η αβεβαιότητα δx , όμως αν δεν έχει θεωρηθεί σε σχέση με την τιμή x_b του μετρούμενου μεγέθους, δεν δίνει το μέτρο της αξιοπιστίας.

Επομένως, η ποιότητα της μέτρησης δεν εκφράζεται τόσο άμεσα από το σφάλμα δx , όσο από το λόγο $\delta x / |x_b|$. Η ποσότητα αυτή ονομάζεται **σχετικό σφάλμα**, δείτε τα παραδείγματα στον παρακάτω πίνακα.

Το απόλυτο και το σχετικό σφάλμα δεν αποτελούν δύο διαφορετικά είδη σφαλμάτων, αλλά εκφράζουν την ίδια ακριβώς αβεβαιότητα με διαφορετικούς τρόπους. Δηλαδή, το σχετικό σφάλμα μας δίνει μία ιδέα σχετικά με την ποιότητα της μέτρησης μας. Λόγω του τρόπου ορισμού του, ως ο λόγος του απόλυτου σφάλματος προς τη μέση τιμή, είναι σα να εμπεριέχει και μία σύγκριση, πληροφορία που σε καμία περίπτωση δε μπορεί να μας δώσει το απόλυτο σφάλμα από μόνο του. Γνωρίζοντας μόνο το απόλυτο σφάλμα, δε μπορούμε να ξέρουμε αν η μέτρηση μας είναι καλή ή όχι.

Μέγεθος	Ορθός τρόπος γραφής	σχετικό σφάλμα
	$x \pm \delta x$	$\frac{\delta x}{ x_b } \times \%$
βάρος	$2,654 \pm 0,001 g$	0,04
Δύναμη	$12,30 \pm 0,02 N$	0,2
Μήκος	$9,82 \pm 0,01 mm$ ή $(9,82 \pm 0,01) \times 10^{-3} m$	0,1
Μήκος κύματος	$40 \pm 2 nm$ ή $(40 \pm 2) \times 10^{-9} m$	5
Τάση	$5,2 \pm 0,5 V$	10
Χρόνος	$(153700 \pm 2) \times 10^{-4} s$	0,01
Περίοδος	$500 \pm 1 h$	0,2
Πίεση	$45700 \pm 100 Pa$ ή $(45,7 \pm 0,1) \times 10^3 Pa$	0,2

5 Μέση τιμή

Αν υποθέσουμε ότι ένα φυσικό μέγεθος μετράται N φορές, δηλαδή λαμβάνουμε για αυτό τις τιμές $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ και τα σφάλματα είναι τυχαία, τότε αυτά θα είναι διαφορετικά σε πρόσημο και σε μέγεθος. Η **μέση τιμή** των μετρήσεων μπορεί να προσδιοριστεί από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k}{N} = \frac{\sum_{k=1}^N x_k}{N} \quad (4)$$

Μερικά από τα τυχαία σφάλματα θα αναιρεθούν μεταξύ τους. Αυτό είναι το καλύτερο που μπορεί να γίνει με τα τυχαία σφάλματα, δηλαδή να επαναληφθεί η μέτρηση πολλές φορές και να υπολογιστεί η μέση τιμή. Πρέπει να σημειωθεί ότι αυτή η εκτίμηση για δεδομένο N θα διαφέρει από μια άλλη εκτίμηση όπου $N \rightarrow \infty$. Τότε η μέση τιμή, για μεγαλύτερο N , θα είναι πιο κοντά στην «ακριβή» τιμή.

Εκτελώντας την παραπάνω διαδικασία, το αποτέλεσμα θα βαρύνεται από μικρότερο σφάλμα σε σχέση με τις επιμέρους τιμές. Αυτό βέβαια είναι δεν είναι εφικτό πάντα για διαφόρους λόγους, όπως ο περιορισμός του χρόνου λήψης μετρήσεων στο εργαστήριο. Έτσι, πρέπει να επιλεγεί ο αριθμός των επαναλήψεων της μέτρησης με βάση τις ανάγκες του συγκεκριμένου πειράματος και της ακρίβειας που αυτό απαιτεί. Συμπερασματικά, επαναλαμβάνοντας το πείραμα είναι ο μόνος τρόπος να αυξηθεί η ακρίβεια σε ένα πείραμα.

6 Εκτίμηση του σφάλματος

Το συνολικό σφάλμα (u_{total}) εκτιμάται ως το άθροισμα δύο συνεισφορών, του συστηματικού σφάλματος ($u_{systematic}$) και του τυχαίου σφάλματος (u_{random}).

Αν u αναπαριστά την αβεβαιότητα σε μια μέτρηση, η οποία εκφράζεται μέσω του σφάλματος,

$$u_{total} \approx (u_{random}^2 + u_{systematic}^2)^{1/2} \quad (5)$$

Τα τυχαία σφάλματα συχνά εκφράζονται με τη μορφή της **τυπικής απόκλισης (standard deviation, SD) της μέσης τιμής**, η οποία μπορεί να βασίζεται σε επαναλαμβανόμενες μετρήσεις. Για ένα πλήθος μετρήσεων ενός μεγέθους με την ίδια συσκευή, ισχύει:

$$\text{Διακύμανση} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}, \text{ όπου } \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (6)$$

$$SD(\sigma) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} = (\text{Διακύμανση})^{1/2} \quad (7)$$

$$\text{Μέγιστο τυχαίο σφάλμα } (u_{random}) = 2\sigma \quad (8)$$

Σημειώνεται ότι απαιτούνται πολλά πειραματικά δεδομένα για τη σωστή εφαρμογή της στατιστικής. Επιπλέον, οι στατιστικές αναλύσεις βασίζονται σε Gaussian κατανομή των μετρήσεων γύρω από τη μέση τιμή.

Για μια σειρά επαναλαμβανόμενων μετρήσεων x_i (της ίδιας ποσότητας) σε διαφορετικά πειραματικά συστήματα, όλα με διαφορετικές αβεβαιότητες σ_i , μια κοινή διαδικασία είναι να ελαχιστοποιηθεί το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων διαιρεμένων με **παράγοντες βάρους**. Οι παράγοντες βάρους είναι οι αβεβαιότητες των επιμέρους μετρήσεων. Αυτό οδηγεί στην παρακάτω εξίσωση:

$$\text{Weighted Mean} = \bar{x}_{WM} = \frac{\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (9)$$

Η τυπική απόκλιση υπολογίζεται τότε από την τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης κατά το συνηθισμένο τρόπο. Σημειώνεται ότι η τυπική απόκλιση θα είναι μεγαλύτερη από την υπολογιζόμενη απόκλιση, όπου έχει θεωρηθεί ότι όλα τα δεδομένα έχουν ίδια αβεβαιότητα, αλλά θα είναι μια καλύτερη αναπαράσταση των δεδομένων.

7 Μετάδοση σφάλματος

Οι περισσότερες φυσικές ποσότητες δεν μετριοούνται άμεσα, αλλά έμμεσα. Δηλαδή, μετρά κανείς ένα ή περισσότερα μεγέθη και κατόπιν από αυτά υπολογίζει την ποσότητα που θέλει. Είναι φανερό ότι οι άμεσα μετρούμενες ποσότητες βαρύνονται από κάποια αβεβαιότητα και αυτό συνεπάγεται την επιβάρυνση της υπολογιζόμενης ποσότητας με κάποια αβεβαιότητα επίσης. Στη συνέχεια θα αναφερθεί ο τρόπος με τον οποίο οι αβεβαιότητες των μετρούμενων μεγεθών μεταδίδονται με τους υπολογισμούς στα τελικά αποτελέσματα.

Σημείωση: Όλες οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στη συνέχεια είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Η γενική εξίσωση μετάδοσης σφάλματος είναι:

$$y = f(x_1, x_2, \dots)$$

$$\sigma_y^2 \approx \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \bigg|_a \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \bigg|_a \sigma_{x_2}^2 + \dots \quad (10)$$

Όπου «a» είναι το σημείο που μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε το σφάλμα $(x_1^{(a)}, x_2^{(a)} \dots)$.

8 Εκτίμηση παραμέτρων

Ένα συνηθισμένο πρόβλημα που παρουσιάζεται σε ένα πείραμα, αφορά στον προσδιορισμό των **παραμέτρων (των σταθερών) μιας εξίσωσης** που χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει τα πειραματικά δεδομένα. Το πρόβλημα εστιάζεται στην εύρεση της **καλύτερης προσαρμογής ("best fit")** της εξίσωσης στα δεδομένα. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να ελαχιστοποιηθούν οι αποκλίσεις μεταξύ των δεδομένων και της εξίσωσης της προσαρμογής. Αφού ορισμένες αποκλίσεις είναι θετικές και άλλες είναι αρνητικές, το άθροισμα των αποκλίσεων δεν είναι δείκτης της **απόδοσης της προσαρμογής (goodness of fit)** λόγω των αλληλοαναιρέσεων θετικών και αρνητικών αποκλίσεων.

Η ποιότητα της προσαρμογής εκφράζεται από το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων, χρησιμοποιώντας δηλαδή τη **μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων ("method of least squares")**. Το

πρόβλημα έγκειται δηλαδή, στην εύρεση των σταθερών που ελαχιστοποιούν το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων μεταξύ των μετρούμενων τιμών και των υπολογιζόμενων τιμών.

Σημείωση: Έχει υποτεθεί ότι οι εκτιμώμενες αβεβαιότητες σε όλα τα δεδομένα είναι οι ίδιες. Αν δεν είναι, τότε μια πιο πολύπλοκη προσέγγιση πρέπει να χρησιμοποιηθεί, η οποία λαμβάνει υπόψη την εκτιμώμενη αβεβαιότητα κάθε δεδομένου. Αυτό γίνεται στις **μεθόδους χ -τετράγωνο (“chi-square” fitting procedures)**.

9 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων για γραμμικές εξισώσεις

Η γραφική μέθοδος είναι ίσως η καλύτερη μέθοδος που γνωρίζουμε για τον προσδιορισμό μιας σχέσης. Έτσι, για να βρούμε τη ζητούμενη σχέση σχεδιάζουμε την καμπύλη των μεταβλητών (π.χ. y και x). Η μαθηματική σχέση που περιγράφει την καμπύλη είναι ουσιαστικά η μαθηματική σχέση των y και x . Για την εύρεση της καλύτερης καμπύλης χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Η μέθοδος αυτή υποθέτει ότι διαθέτουμε N δεδομένα δύο μεταβλητών (y και x). Αυτά είναι δυνατόν να αναπαρασταθούν σε πίνακα με N γραμμές των μεταβλητών y και x . Το επόμενο στάδιο είναι να γίνει μια υπόθεση για το είδος της εξίσωσης που μπορεί να προσαρμοστεί στα δεδομένα.

$$y_{calc} = f(x, a, b, \dots) \quad \text{γενική μορφή}$$

$$y_{calc} = a + bx \quad \text{γραμμική}$$

$$y_{calc} = a + bx + cx^2 \quad \text{δευτεροβάθμια}$$

$$y_{calc} = ax^b \quad \text{πολυωνυμική}$$

$$y_{calc} = ae^{bx} \quad \text{Εκθετική}$$

Η μορφή της εξίσωσης που επιλέγεται μπορεί να στηρίζεται στη θεωρία ή να έχει επιλεγεί εμπειρικά σαν λογική επιλογή για προσαρμογή των δεδομένων. Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων θεωρεί ότι πρέπει να προσδιοριστούν οι τιμές των σταθερών της εξίσωσης, οι οποίες ελαχιστοποιούν το άθροισμα των αποκλίσεων μεταξύ των υπολογισμένων τιμών από την εξίσωση και των πειραματικών y τιμών:

$$\sum (y_{calc} - y)^2 = \min \quad (11)$$

Αυτή η διαδικασία μπορεί να γίνει εύκολα χρησιμοποιώντας προγράμματα επεξεργασίας δεδομένων (π.χ. Excel, Origin, Matlab, QPlot)

Η προσέγγιση των πειραματικών δεδομένων με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων για την περίπτωση της ευθείας γραμμής γίνεται με χρήση των παρακάτω τύπων:

Ευθεία γραμμή: $y = a + bx$, όπου

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (12a)$$

και

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (12b)$$

10 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων για μη-γραμμικές εξισώσεις

Αν η σχέση μεταξύ της εξαρτημένης μεταβλητής y και της ανεξάρτητης μεταβλητής x (ή με περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές $x_1, \dots, x_k$) είναι μη-γραμμική, μπορούν να χρησιμοποιηθούν λογισμικά πακέτα (π.χ. Origin, Excel, Matlab) για να βρεθούν οι σταθερές και η τυπική απόκλιση της προσαρμογής, αλλά δεν θα δώσουν τις αβεβαιότητες των συντελεστών. Υπάρχουν κατάλληλα λογισμικά πακέτα που το κάνουν (SAS).

11 Εκτίμηση ανακρίβειών μετρητικών οργάνων

Το όριο ανακρίβειας που είναι εγγενές στη διαδικασία χειρισμού και ανάγνωσης της ένδειξης ενός μετρητικού οργάνου συχνά καλείται «Οργανικό Όριο Σφάλματος» ή «Σφάλμα Ανάγνωσης» ή «Διακριτική Ικανότητα» (Instrumental Limit of Error [ILE] ή Instrumental Resolution) και συμβολίζεται διεθνώς με το μικρό ελληνικό γράμμα «δ».

11.1 Διακριτική ικανότητα

Η *διακριτική ικανότητα* (ή ελάχιστη υποδιαίρεση της κλίμακας = resolution) εκφράζει τη μικρότερη μεταβολή του φυσικού μεγέθους που μπορεί να ανιχνεύσει το μετρητικό όργανο ή ο αισθητήρας. Για παράδειγμα, ένα θερμόμετρο με διακριτική ικανότητα $0,1^\circ\text{C}$ σημαίνει ότι μπορεί να διακρίνει μεταξύ δύο θερμοκρασιών που απέχουν $0,1^\circ\text{C}$, δηλαδή να παράγει εξόδους ελαφρά διαφορετικής τιμής.

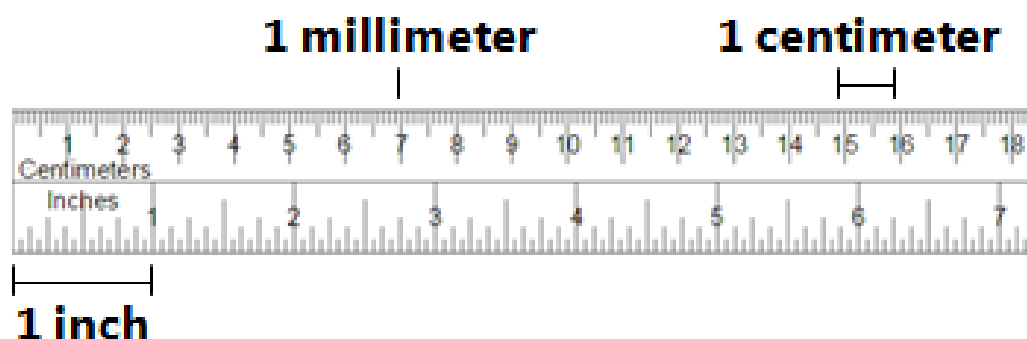
11.2 Ακρίβεια

Η *ακρίβεια* (*accuracy*) ισούται με το σφάλμα που εγγενώς περιέχει η τιμή που αποδίδει το μετρητικό όργανο ή ο αισθητήρας στην έξοδο, δηλώνει δηλαδή την αβεβαιότητα που υπάρχει στην τιμή της εξόδου. Μπορεί να εκφράζεται σε απόλυτες τιμές (για παράδειγμα $\pm 0,05^\circ\text{C}$) ή επί τοις εκατό (για παράδειγμα 1%). Στην πρώτη περίπτωση η ανακρίβεια είναι σταθερή και ανεξάρτητη της τιμής του μετρούμενου φυσικού μεγέθους, ενώ στην άλλη περίπτωση η ανακρίβεια είναι ανάλογη της παραπάνω τιμής.

11.3 Ανάγνωση αναλογικών κλιμάκων

Μετρητικά όργανα τα οποία διαθέτουν αναλογικές κλίμακες είναι για παράδειγμα:

- Ο χάρακας (βαθμολογημένος κανόνας), μετρητικές ταινίες το διαστημόμετρο, το μικρόμετρο (σχήμα 1)
- Το χρονόμετρο (κλασσικό ρολόι)
- Το ηλεκτρικό πολύμετρο (σχήμα 2)
- Το θερμόμετρο διαστολής (σχήμα 3)
- Το πιεσόμετρο ή μανόμετρο (σχήμα 4)
- Ο ζυγός (σχήμα 5)



Σχήμα 1: Μέτρηση του μήκους με κοινό χάρακα

Σε κλίμακα **mm**: διακριτική ικανότητα 1 mm, απόλυτο σφάλμα της μέτρησης $\pm 0,5 \text{ mm}$

Σε κλίμακα **inch**: διακριτική ικανότητα $\frac{1}{16} \text{ inches}$, απόλυτο σφάλμα της μέτρησης $\pm \frac{1}{32} \text{ inches}$



Σχήμα 2: Μέτρηση της τάσης, του ρεύματος και της αντίστασης με αναλογικό πολύμετρο
Για παράδειγμα στην κλίμακα **dc Volt, 0 – 10 V**: διακριτική ικανότητα 0,1 V, απόλυτο σφάλμα της μέτρησης $\pm 0,05 V$



Σχήμα 3: Μέτρηση θερμοκρασίας με αναλογικό θερμόμετρο
Δεξιά εικόνα: Στην κλίμακα °F: διακριτική ικανότητα 2°F, απόλυτο σφάλμα της μέτρησης $\pm 1^{\circ}F$, Στην κλίμακα °C: διακριτική ικανότητα 1°C, απόλυτο σφάλμα της μέτρησης $\pm 0,5^{\circ}C$



Σχήμα 4 Μέτρηση της πίεσης με αναλογικό μανόμετρο (πιεσόμετρο). Προσέξτε τις 3 διαφορετικές κλίμακες του οργάνου που αντιστοιχούν σε 3 διαφορετικές μονάδες

στην κλίμακα **psi**: η διακριτική ικανότητα 5 psi, απόλυτο σφάλμα της μέτρησης $\pm 2,5 \text{ psi}$
 στην κλίμακα **kPa**: η διακριτική ικανότητα 50 kPa, απόλυτο σφάλμα της μέτρησης $\pm 25 \text{ kPa}$
 στην κλίμακα **bar**: η διακριτική ικανότητα 0,5 bar, απόλυτο σφάλμα της μέτρησης $\pm 0,25 \text{ bar}$



Σχήμα 5: Μέτρηση του βάρους με αναλογικό ζυγό

Αριστερή εικόνα

στην κλίμακα **lbs**: διακριτική ικανότητα 1 lbs, απόλυτο σφάλμα της μέτρησης $\pm 0,5 \text{ lbs}$
 στην κλίμακα **kg**: διακριτική ικανότητα 2 kg, απόλυτο σφάλμα της μέτρησης $\pm 1 \text{ kg}$

11.4 Ανάγνωση ψηφιακών κλιμάκων

Η ανάλυση ενός ψηφιακού οργάνου είναι η μικρότερη υποδιαίρεση της κλίμακας που χρησιμοποιεί. Η ανάλυση εξαρτάται από την περιοχή των μετρήσεων που χρησιμοποιεί. Για παράδειγμα, ένα πολύμετρο έχει ανάλυση 1 mV σε μια κλίμακα 10 Volt μπορεί να δείχνει αλλαγές στις μετρήσεις με διαφορά $\pm 1\text{ mV}$.

Η ανάλυση ενός ψηφιακού οργάνου, εκφράζεται με το μικρότερο σημαντικό ψηφίο της ένδειξης. Για παράδειγμα αν η ένδειξη για τη μέτρηση τάσης είναι $1,234\text{ Volt}$ η ανάλυση είναι 1 mV και ίσα με το σφάλμα της μέτρησης.

Εάν το πιο σημαντικό ψηφίο δεν παίρνει όλες τις τιμές από 0 έως 9, αυτό λέγεται κλασματικό ψηφίο. Αν η μέγιστη ένδειξη ενός ψηφιακού πολυμέτρου είναι 19999 λέμε ότι το πολύμετρο είναι $4\frac{1}{2}$ ψηφίων. Ένα ψηφιακό πολύμετρο $3\frac{3}{4}$ ψηφίων μπορεί να απεικονίζει ενδείξεις από 0 έως 3,999 ή 5,999 ανάλογα τον κατασκευαστή.

12 Βιβλιογραφία

- [1] Δ. Κουζούδης «Εργαστήριο Φυσικής, Μηχανική-Θερμοδυναμική-Κυματική», Γενικό Τμήμα Πολυτεχνικής Σχολής, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2011 (eclass, έγγραφα)
- [2] Μ. Πηλακούτα «Μετρήσεις-Αβεβαιότητα Μετρήσεων, Εργαστήριο Φυσικής (eclass, έγγραφα)
- [3] Taylor, John R. "An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties if Physical Measurements". University Science Books, 1982.
- [4] P.V. Bork, H. Grote, D. Notz, M. Regler. "Data Analysis Techniques in High Energy Physics Experiments". Cambridge University Press, 1993.
- [5] Μιχαήλ Ι. Βελγάκης, «Εργαστηριακή φυσική», Γενικό Τμήμα Πολυτεχνικής Σχολής, Πανεπιστήμιο Πατρών, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1996
- [6] Ιωάννης Α. Σιανούδης, «Εισαγωγικά μαθήματα για τα εργαστήρια φυσικής», Αθήνα 2007