

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

- ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

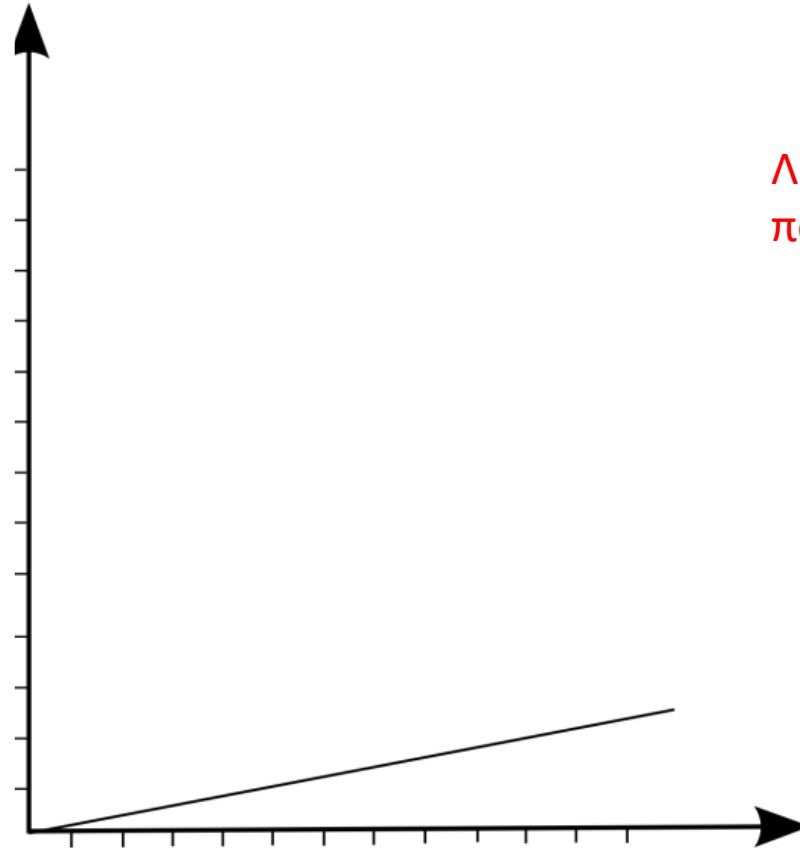
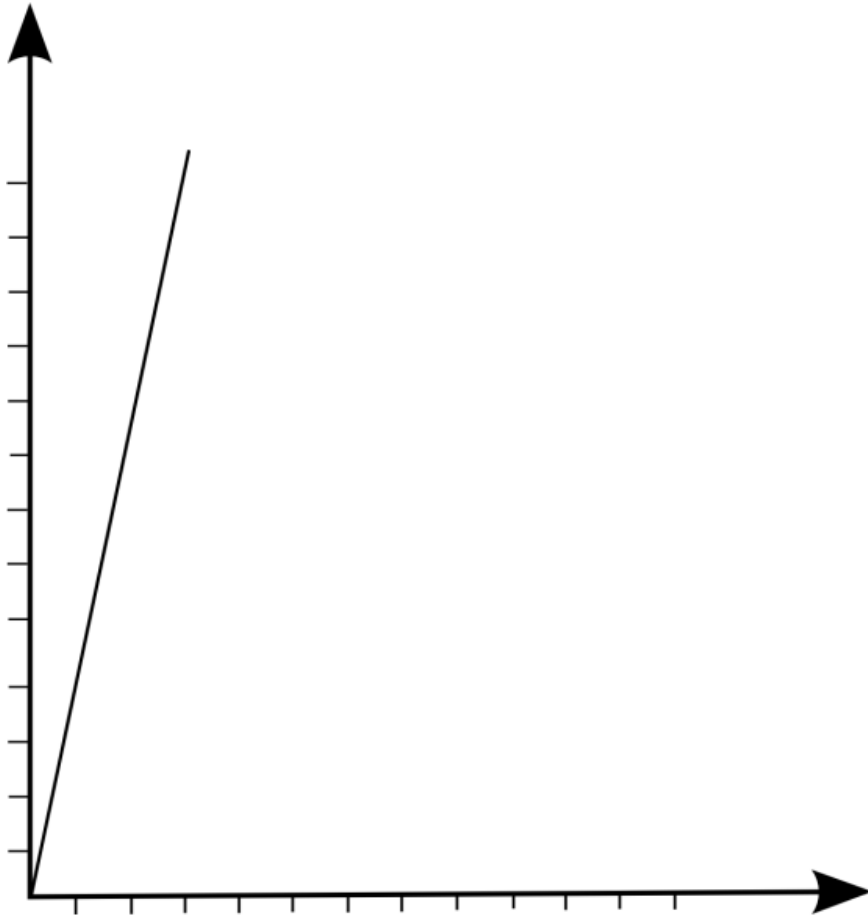
ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

- Έχουμε τα ζεύγη (X,Y) που είναι αποτελέσματα μετρήσεων και περιέχουν τις γνωστές αβεβαιότητες (σφάλματα).
- Ξέρουμε ότι κάθε ζεύγος δίνει και ένα σημείο στο επίπεδο.
- Τι θέλουμε να κάνουμε με τα σημεία αυτά; Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:
- **1η περίπτωση:** Να ερευνήσουμε αν οι τιμές των (X,Y) ικανοποιούν κάποια σχέση που περιγράφει το πείραμα από το οποίο προέκυψαν αυτές οι τιμές. Με άλλα λόγια, κάνουμε επαλήθευση κάποιου Νόμου ή ψάχνουμε για το Νόμο.
- **2η περίπτωση:** Ξέρουμε από πριν την εξίσωση που περιγράφει το φαινόμενο. Άρα, ξέρουμε και τη μορφή της μαθηματικής καμπύλης που αντιστοιχεί στην εξίσωση.
- Οπότε, με βάση τα πειραματικά σημεία που διαθέτουμε, θέλουμε να χαράξουμε την καλύτερη καμπύλη που πλησιάζει στη θεωρητική μαθηματική καμπύλη. **Αυτή η καλύτερη καμπύλη δίνει τώρα τις πληροφορίες για το πείραμα. Τα πειραματικά σημεία δεν παίζουν κανένα ρόλο πλέον.**

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

- *Ερώτημα 1ο: Πώς χαράζω την καλύτερη πειραματική καμπύλη;*
- *Απάντηση:*
- Για να χαράξεις την καλύτερη πειραματική καμπύλη, πρέπει να βάλεις τα σημεία (X,Y) σε ένα επίπεδο με άξονες X και Y . Για να το κάνεις αυτό, πρέπει να **βαθμονομήσεις τους** άξονες. Σύμφωνα με το πεδίο τιμών των X και Y , αποφασίζεις πόσες γραμμές θέλεις να αντιστοιχίσεις, έτσι ώστε να καλύψεις το μεγαλύτερο δυνατό χώρο σε όλο το επίπεδο.

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ



Λανθασμένες γραφικές
παραστάσεις

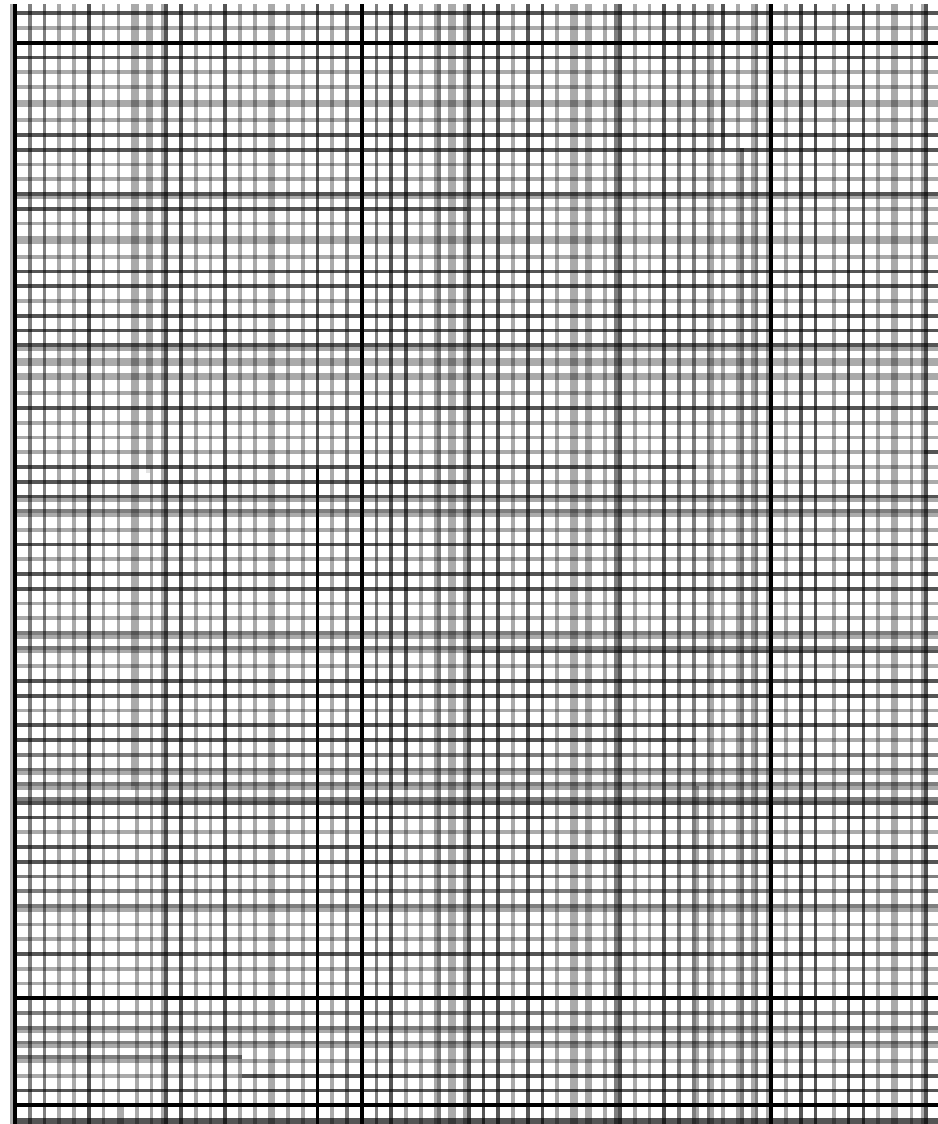
Για να χαραχθεί μια γραφική παράσταση που αφορά αναπαράσταση ενός μεγέθους Y ως συνάρτηση ενός μεγέθους X , $Y=f(X)$, που είναι καταχωρημένα στον κατάλληλο πίνακα δεδομένων, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Χρησιμοποιούμε συνήθως μισή περίπου σελίδα χιλιοστομετρικό χαρτί και στο πάνω μέρος γράφουμε τον τίτλο της γραφικής παράστασης.
2. Επιλέγουμε το μέγεθος που θα παρασταθεί στον κατακόρυφο και οριζόντιο άξονα αντίστοιχα.
Για παράδειγμα εάν θέλουμε να παραστήσουμε γραφικά την τάση ως συνάρτηση του ρεύματος $V=f(I)$, στον κατακόρυφο άξονα θα αντιστοιχηθούν οι τιμές της τάσης και στον οριζόντιο οι τιμές του ρεύματος (Εικόνα 1).
3. Ονομάζουμε τους άξονες και γράφουμε τις μονάδες μέτρησης κάθε μεγέθους (Για παράδειγμα: Τάση (V), Ρεύμα (mA))
4. Επιλέγουμε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή για τον κάθε άξονα ώστε ο κάθε άξονας, να καλύπτει το σύνολο των δεδομένων.
5. Επιλέγουμε το «βήμα», δηλαδή την αντιστοιχία του μεγέθους μας ανά cm του άξονα. (Για παράδειγμα: 2 V/cm για τον κατακόρυφο άξονα και 5 mA/cm στον οριζόντιο.) Αυτό γίνεται με βάση το εύρος των τιμών κάθε μεγέθους που βρίσκεται στον πίνακα δεδομένων.
6. Τοποθετούμε τα σημεία στο γράφημα χρησιμοποιώντας το σύμβολο X.
7. Χαράζουμε την καμπύλη μας συμμετρικά μέσα από τα πειραματικά σημεία.

Επισημάνσεις:

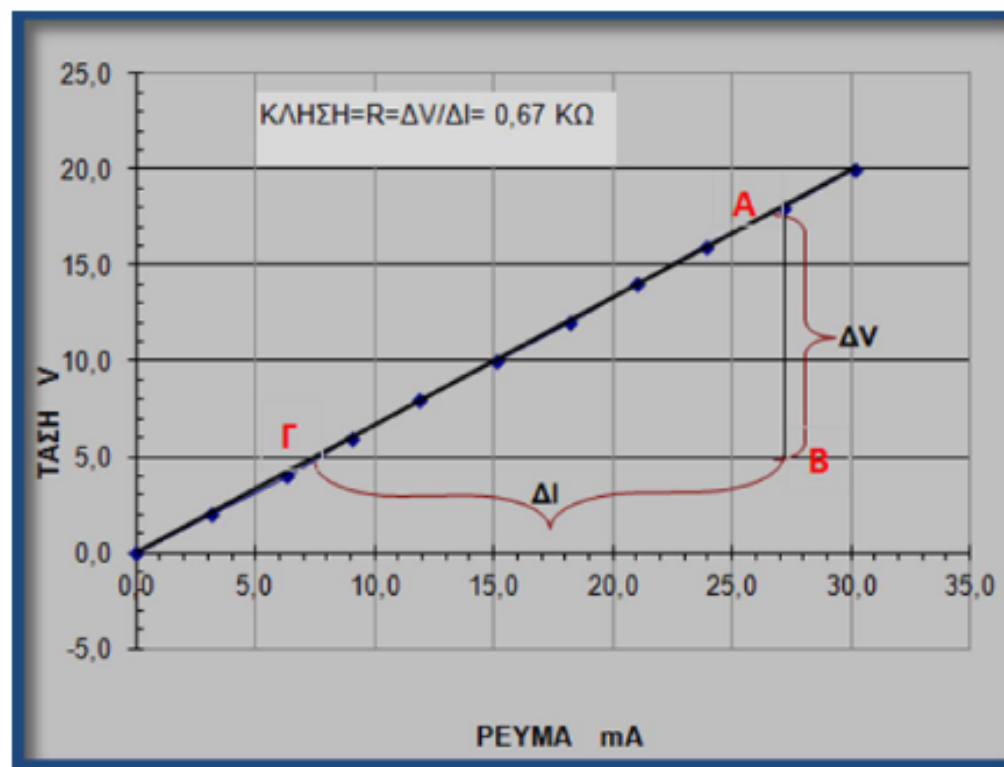
- Για να εκμεταλλευτούμε την ευκολία του χιλιοστομετρικού χαρτιού οι άξονες πρέπει να υποδιαιρούνται σε πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσια του 1,2 και 5.
- Οι άξονες δεν είναι απαραίτητο να υποδιαιρούνται με τον ίδιο τρόπο.

Χιλιοστομετρικό (millimetre) χαρτί



- Η υποδιαίρεση των αξόνων πρέπει να γίνεται με τρόπο ώστε τα πειραματικά σημεία να βρίσκονται στο κέντρο του γραφήματος. Στην περίπτωση που έχουμε γραμμική σχέση, η ευθεία να σχηματίζει $\sim 45^\circ$ με τους άξονες.
- Ανάλογα με το εύρος των μετρήσεων μπορεί να γίνει μετατόπιση αξόνων, δηλαδή ο ένας ή και οι δύο άξονες να μην ξεκινούν από το μηδέν αλλά από άλλη τιμή.

V v	I mA
2,0	3,1
4,0	6,3
6,0	9,0
8,0	11,9
10,0	15,1
12,0	18,2
14,0	21,0
16,0	23,9
18,0	27,2
20,0	30,2



Εικόνα 1: Πίνακας δεδομένων και γραφική παράσταση $V=f(I)$

Μεγέθη που συνδέονται με γραμμική σχέση – Κλίση ευθείας

Όταν η ανεξάρτητη X και εξαρτημένη Y μεταβλητή σε μια γραφική απεικόνιση συνδέονται με γραμμική σχέση, $Y = \alpha X + \beta$, χαράζουμε την καλύτερη ευθεία που περνά μέσα από τα πειραματικά σημεία, με στόχο να υπολογίσουμε τις «καλύτερες τιμές» για τις παραμέτρους α και β . (Όπου α η κλίση της ευθείας και β το σημείο τομής της με τον κατακόρυφο άξονα).

Χαράζουμε την καλύτερη ευθεία «με το μάτι», με τρόπο ώστε τα πειραματικά σημεία να απέχουν κατά μέσο όρο το ίδιο εκατέρωθεν της ευθείας. Η ευθεία δείχνει την μέση συμπεριφορά των μετρήσεων και δεν είναι απαραίτητο να διέρχεται οπωσδήποτε πάνω από όλα τα πειραματικά σημεία.

Η χάραξη της ευθείας που προσαρμόζεται με τον καλύτερο δυνατό τρόπο στα πειραματικά δεδομένα μπορεί να γίνει με υπολογιστικό τρόπο με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων ή τη μέθοδο Gauss. Αρκετά από τα προγράμματα (π.χ Excel) που κάνουν προσαρμογή ευθείας σε πειραματικά δεδομένα χρησιμοποιούν την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων

Ο ρυθμός μεταβολής των μεγεθών που συνδέονται γραμμικά είναι σταθερός και υπολογίζεται από την κλίση της ευθείας.

Στο προηγούμενο παράδειγμα η σχέση που συνδέει την τάση με το ρεύμα είναι $V=R \cdot I$,δηλαδή έχει τη μορφή $Y = \alpha X$.

Η κλίση της ευθείας δίδεται από τον λόγο $AB/B\Gamma = \Delta V / \Delta I$ με βάση τη βαθμονόμηση που έχουν οι άξονες . Δεδομένου ότι στους άξονες έχουμε αντιστοιχίσει φυσικά μεγέθη, η κλίση εκφράζει την αντίσταση, μία ποσότητα η οποία έχει μονάδες. Οι μονάδες της κλίσης προκύπτουν από το λόγο των μονάδων του κατακόρυφου προς τον οριζόντιο άξονα (V/mA) που αντιστοιχούν στο παράδειγμά μας στη μονάδα ΚΩ.

ΠΟΤΕ Η ΚΛΙΣΗ ΙΣΗ ΜΕ εφθ!!!

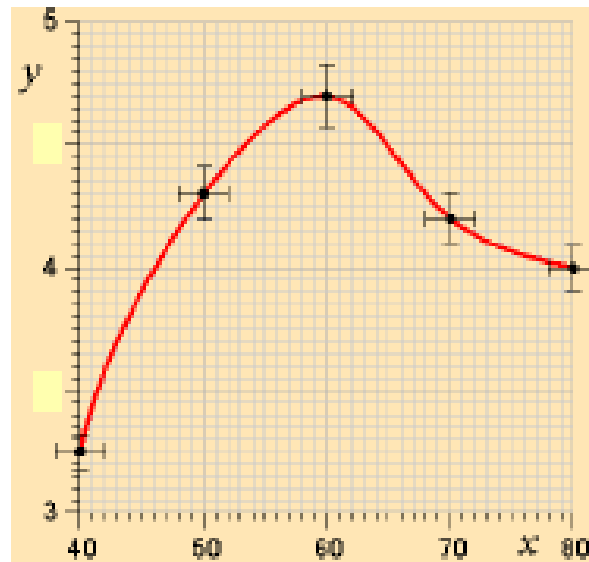
ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

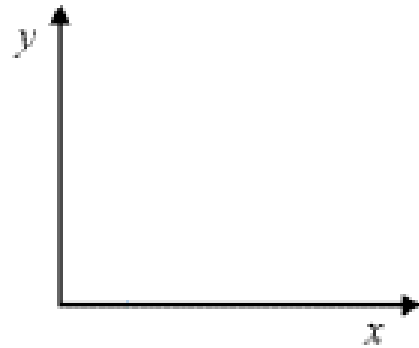
Άσκηση Α2

Η γραφική παράσταση δεδομένων αποτελεί συνήθως τον πιο αποτελεσματικό τρόπο παρουσίασης των αποτελεσμάτων ενός πειράματος και της σύγκρισής του με θεωρητικές προβλέψεις.

ΔΕΔΟΜΕΝΑ

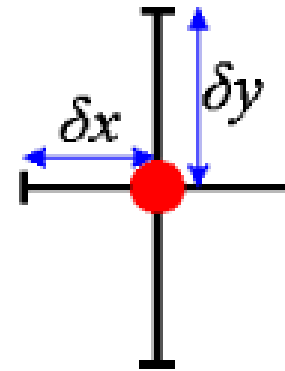
x	y	δx	δy
40	3.25	2	0.07
50	4.30	2	0.11
60	4.70	2	0.13
70	4.20	2	0.10
80	4.00	2	0.09



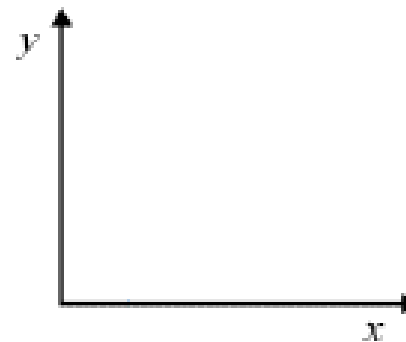


**ΣΥΝΗΘΙΣΜΕΝΗ
ΚΑΙ ΛΑΘΟΣ
ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ**

Κάθε σημείο σχεδιάζεται με την
αβεβαιότητα που το συνοδεύει



Σχεδιάζουμε ομαλή καμπύλη ,
που να συνάδει με την θεωρία.
Δεν αναμένουμε να περνά από
τα πειραματικά σημεία

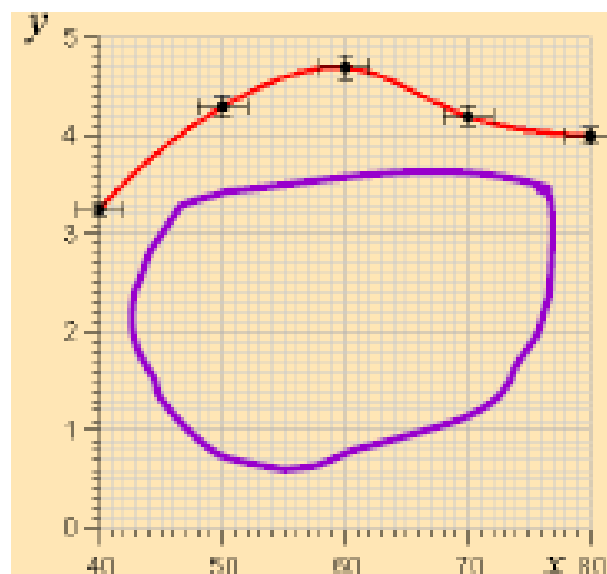


Γραφικές Παραστάσεις

Επιπλέον σε όσα αναφέραμε ήδη για το σχεδιασμό τους

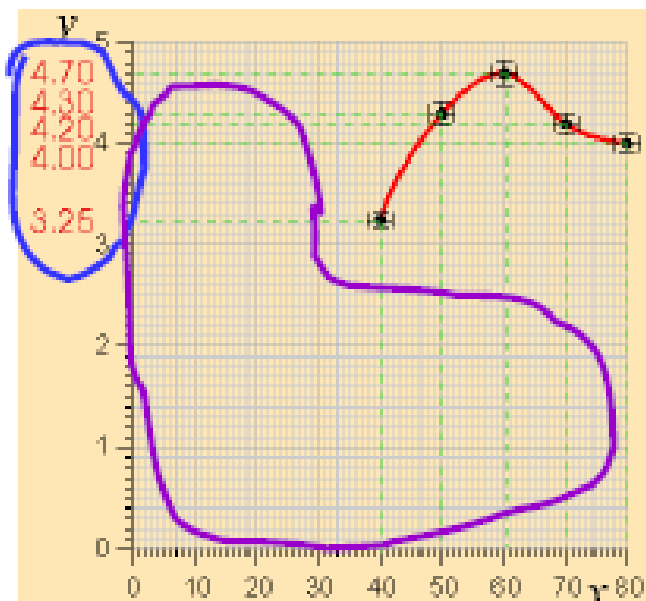
ΔΕΔΟΜΕΝΑ

x	y	δx	δy
40	3.25	2	0.07
50	4.30	2	0.11
60	4.70	2	0.13
70	4.20	2	0.10
80	4.00	2	0.09



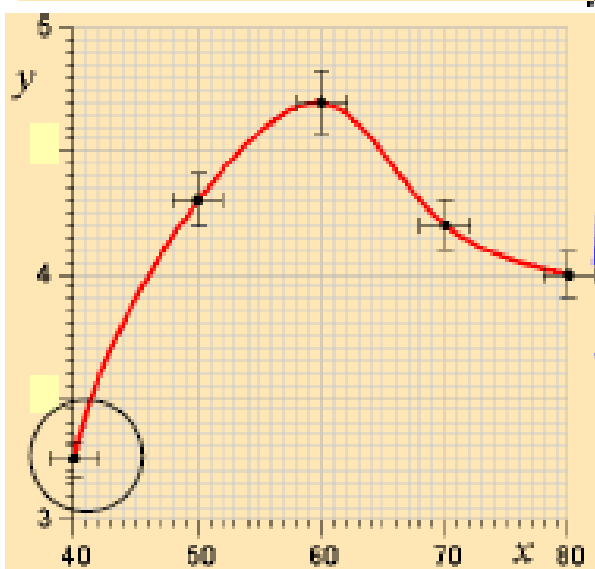
Δεν γίνεται εκμετάλλευση
όλου του χαρτιού

1 Λύθος



3 Λάθη

1. Οι διακεκομμένες γραμμές
2. Οι πειραματικές τιμές
3. Δεν γίνεται εκμετάλλευση όλου του χαρτιού



Αυτή η γραφική παράσταση είναι ~ σωστή
(x: από 35-85 καλύτερο)

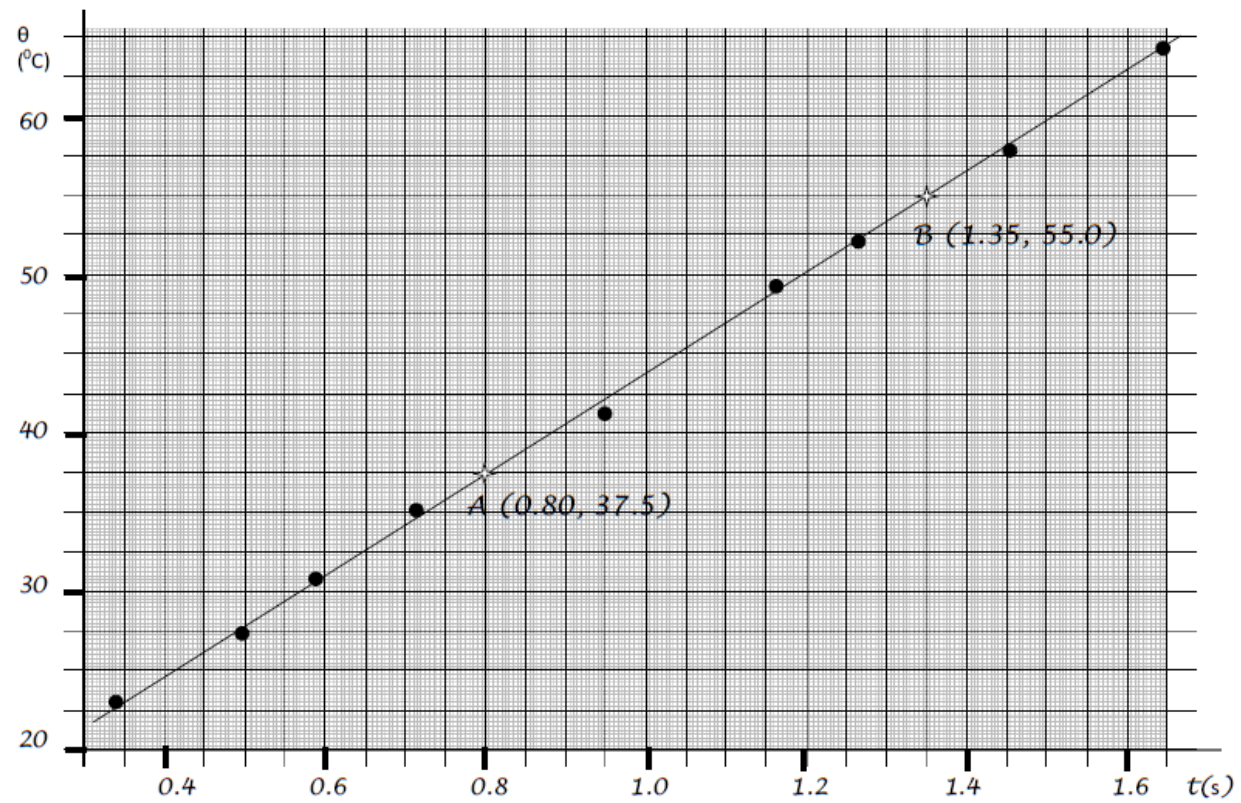
Το συνηθισμένο μέγεθος μιας γραφικής παράστασης είναι περίπου $\frac{1}{2}$ σελίδα A4

Παράδειγμα 5: Να γίνει η γραφική παράσταση των παρακάτω μετρήσεων

t(sec)	$\theta(^{\circ}\text{C})$
0,32	23,2
0,45	27,4
0,58	31,2
0,72	35,4
0,95	42,8
1,18	49,4
1,26	52,1
1,45	58,2
1,65	64,2

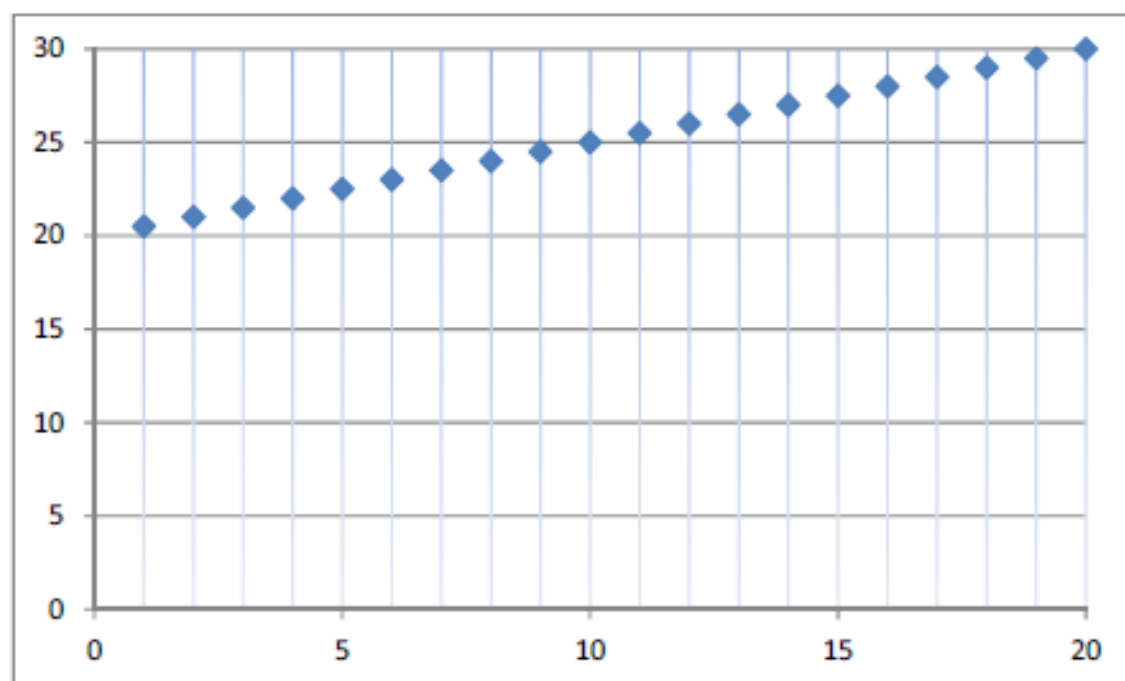
Στην επόμενη σελίδα φαίνεται μια καλή γραφική παράσταση. Τα σημεία καταλαμβάνουν το μεγαλύτερο μέρος της σελίδας και έτσι η γραφική παράσταση είναι αρκετά ευκρινής. Για να το πετύχουμε αυτό, ξεκινάμε από το 20 στον κατακόρυφο άξονα και από το 0.3 στον οριζόντιο. Όπως είναι προφανές, τα δεδομένα τείνουν σε μια ευθεία, συν-πλην κάποιο μικρή διακύμανση που είναι πάντοτε παρούσα σε κάθε μέτρηση. Έτσι σε αυτή την περίπτωση φέρουμε την καλύτερη δυνατή ευθεία όπως στο σχήμα, έτσι ώστε ο ίδιος αριθμός σημείων να είναι από πάνω από την ευθεία με τον αριθμό των σημείων που είναι από κάτω της (κατά το δυνατόν). Για να υπολογίσουμε την κλίση λ , επιλέγουμε δυο σημεία επάνω στην ευθεία όπως τα A(0.80, 37.5) και B(1.35, 55.0) και όχι δυο πειραματικά σημεία. Έτσι έχουμε $\Delta x = 1.35 - 0.80 = 0.55 \text{ sec}$ ενώ $\Delta y = 55.0 - 37.5 = 17.5^{\circ}\text{C}$. Προσέξτε ότι η ακρίβεια των Δy και Δx είναι η ίδια με την ακρίβεια των δεδομένων στον παραπάνω πίνακα. Επίσης αυτοί οι αριθμοί έχουν μονάδες. Η κλίση ισούται με

$$\lambda = \Delta y / \Delta x = 17.5^{\circ}\text{C} / 0.55 \text{ sec} = \mathbf{31.8^{\circ}\text{C sec}^{-1}}$$

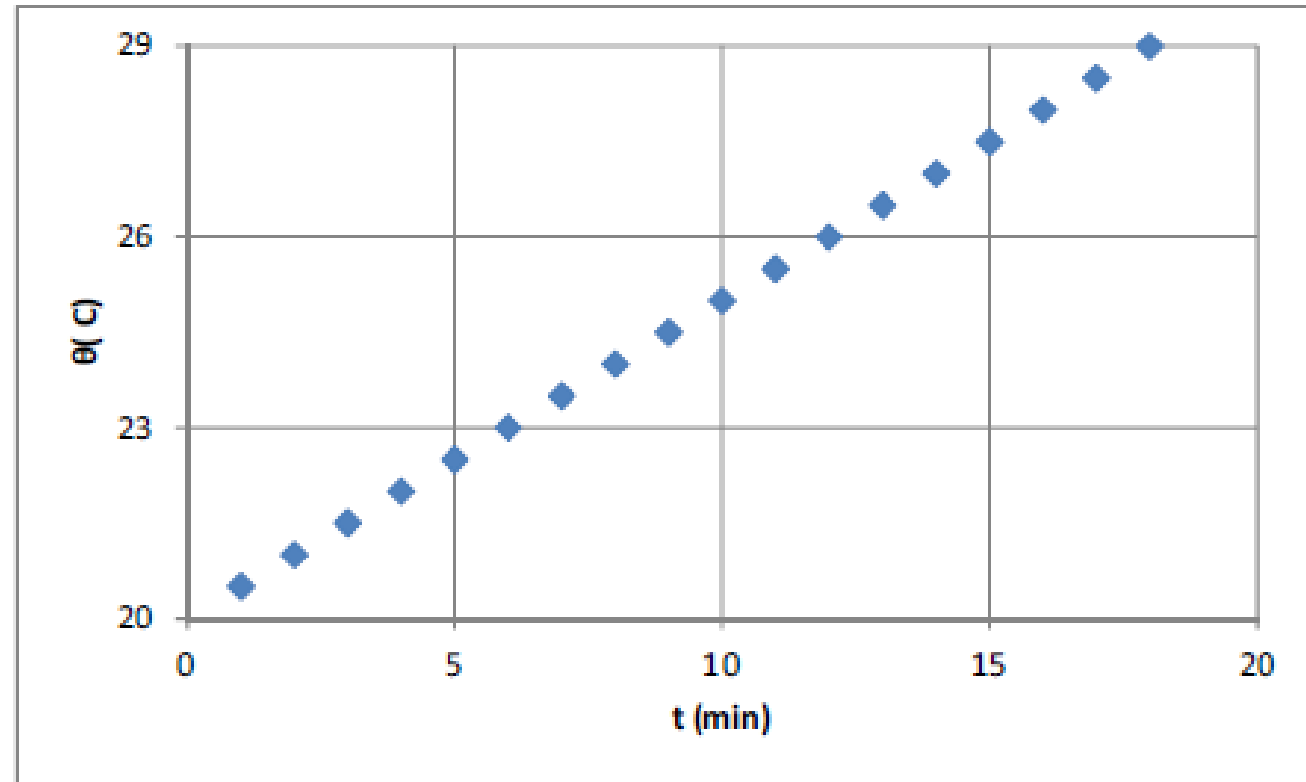


Ακολουθούν παραδείγματα κακών γραφικών παραστάσεων με τα ίδια δεδομένα:

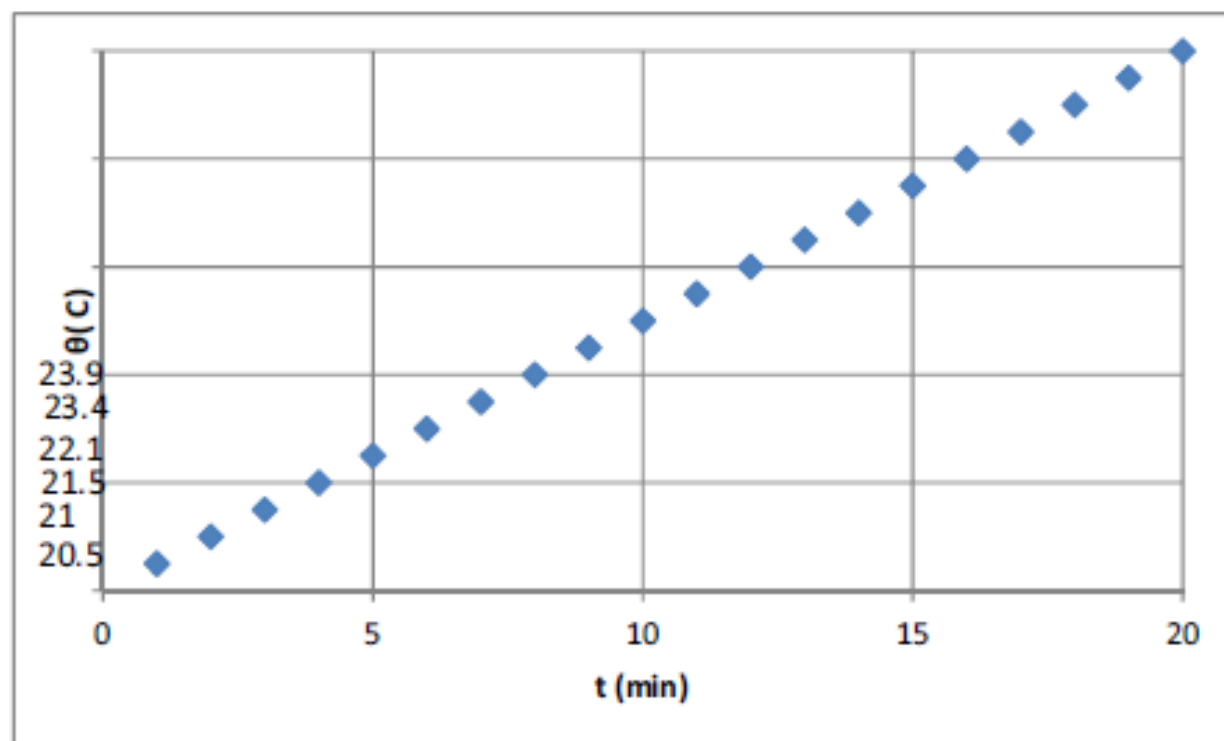
Παράδειγμα 6: Στην παρακάτω γραφική παράσταση υπάρχουν τα εξής λάθη: α) Δεν υπάρχουν μονάδες στους άξονες και β) Τα δεδομένα είναι συμπιεσμένα στο επάνω μέρος γιατί ο χρήστης συμπεριέλαβε και το 0 στον κατακόρυφο άξονα ενώ θα μπορούσε να έχει ξεκινήσει από το 20.



Παράδειγμα 7: Στην παρακάτω γραφική παράσταση απεικονίζονται τα ίδια δεδομένα αλλά ο χρήστης επέλεξε στον κατακόρυφο άξονα ως υποδιαιρέσεις πολλαπλάσια του τρία που είναι γενικώς δύσχρηστα.



Παράδειγμα 8: Στην παρακάτω γραφική παράσταση απεικονίζονται τα ίδια δεδομένα αλλά ο χρήστης γράφει επάνω στον κατακόρυφο άξονα τις τιμές των δεδομένων αντί για ισαπέχουσες υποδιαιρέσεις και έτσι κάνει δύσχρηστη την ανάγνωση των αριθμών.



Διαμόρφωση μη γραμμικών σχέσεων σε γραμμικές

Κάποιες φορές η εξέλιξη των δεδομένων είναι δύσκολο να αντιστοιχηθεί με κάποια μαθηματική σχέση. Επειδή στο εργαστήριο λαμβάνουμε σχετικά λίγες μετρήσεις, δεν είναι πάντα εύκολο να αποφανθούμε για παράδειγμα κατά πόσον τα δεδομένα μας σχετίζονται με παραβολική ή εκθετική σχέση. Γιαυτό είναι πολύ χρήσιμο, οι μη γραμμικές σχέσεις, να διαμορφώνονται με τρόπο ώστε, να μπορούν να παρασταθούν με ευθεία (γραμμικοποίηση). Αυτό επιτυγχάνεται με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών.

Με την «γραμμικοποίηση» μπορεί να ελεγχθεί πιο εύκολα αν η γραμμικοποιημένη σχέση ξεφεύγει από την γραμμική ή όχι. Επιπλέον μας επιτρέπει να υπολογίσουμε διάφορες παραμέτρους που εμπεριέχονται στις σχέσεις αυτές.

Παραδείγματα:

1. Έστω ότι θέλουμε να μετατρέψουμε τη σχέση που εκφράζει την περίοδο απλού εκκρεμούς σε συνάρτηση με το μήκος του σε γραμμική. Αυτό μπορεί να γίνει υψώνοντας τη σχέση στο τετράγωνο και αναδιατάσσοντας τους όρους της προκύπτουσας εξίσωσης.

Ενώ η σχέση $T=f(L)$ είναι καμπύλη, η σχέση $L=f(T^2)$ είναι γραμμική της μορφής $Y=AX+B$. Θέτοντας ως μεταβλητές $Y=L$ και $X=T^2$, η κλίση της ευθείας που προκύπτει, μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τη σταθερά g , ενώ το σημείο τομής της με τον κατακόρυφο άξονα μας δίνει την τιμή της παραμέτρου a . Επομένως ενώ τα μετρούμενα μεγέθη είναι το L και η T , για την χάραξη της ευθείας χρησιμοποιούμε τις νέες μεταβλητές L και T^2 . Η παραπάνω σχέση θα μπορούσε να εκφραστεί και ως $T^2=f(L)$.

Παράδειγμα 2

Έστω ότι θέλουμε να μετατρέψουμε σε γραμμική, τη σχέση $I_0 = I e^{-\mu \chi}$

που εκφράζει τη μεταβολή της έντασης ακτινοβολίας που διέρχεται μέσα από ένα υλικό με γραμμικό συντελεστή εξασθένησης μ ως συνάρτηση του πάχους χ του υλικού. Αυτό μπορεί να γίνει λογαριθμίζοντας την παραπάνω συνάρτηση.

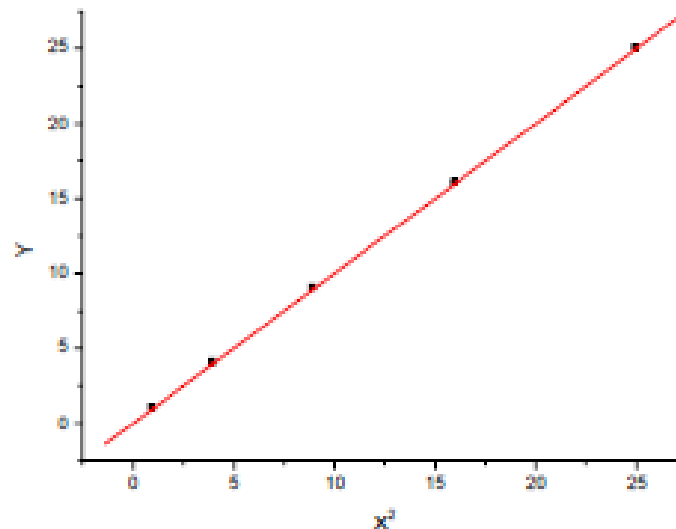
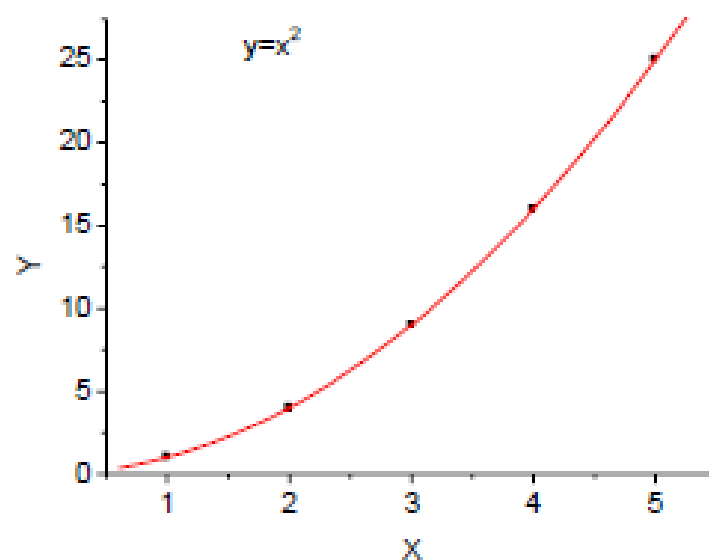
$$I_0 = I e^{-\mu \chi} \text{ άρα } \ln I_0 = \ln I - \mu \chi$$

Η σχέση $I=f(\chi)$ είναι καμπύλη, ενώ η σχέση $\ln I=f(\chi)$ είναι γραμμική της μορφής $Y=AX+B$. Θέτοντας ως μεταβλητές $Y=\ln I$ και $X=\chi$, η κλίση της ευθείας που προκύπτει, μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τον γραμμικό συντελεστή εξασθένησης του υλικού, ενώ το σημείο τομής της με τον κατακόρυφο άξονα δίνει την τιμή της ποσότητας $\ln I_0$, από την οποία μπορεί να υπολογιστεί η αρχική ένταση I_0 . Επομένως ενώ τα μετρούμενα μεγέθη είναι το I και το χ , για την χάραξη της ευθείας χρησιμοποιούμε τις νέες μεταβλητές $\ln I$ και χ .

Άλλες εξισώσεις καμπυλών – αλλαγή μεταβλητών

$$\begin{aligned} y &= Cx^n \longrightarrow \log(y) = \log(C) + n \log(x) \\ y &= De^{kx} \longrightarrow \ln(y) = \ln(D) + kx \\ y &= D10^{kx} \longrightarrow \log(y) = \log(D) + kx \end{aligned} \quad e=2.718$$

Y = A + B X



Εκθετική συνάρτηση

$$y = D10^{kx} \longrightarrow \boxed{\log(y)} = \log(D) + \boxed{kx}$$

$$y = De^{kx} \longrightarrow \boxed{\ln(y)} = \ln(D) + \boxed{kx}$$

$$\boxed{\log(y)} = \log(D) + \frac{k}{2.303} \boxed{x}$$

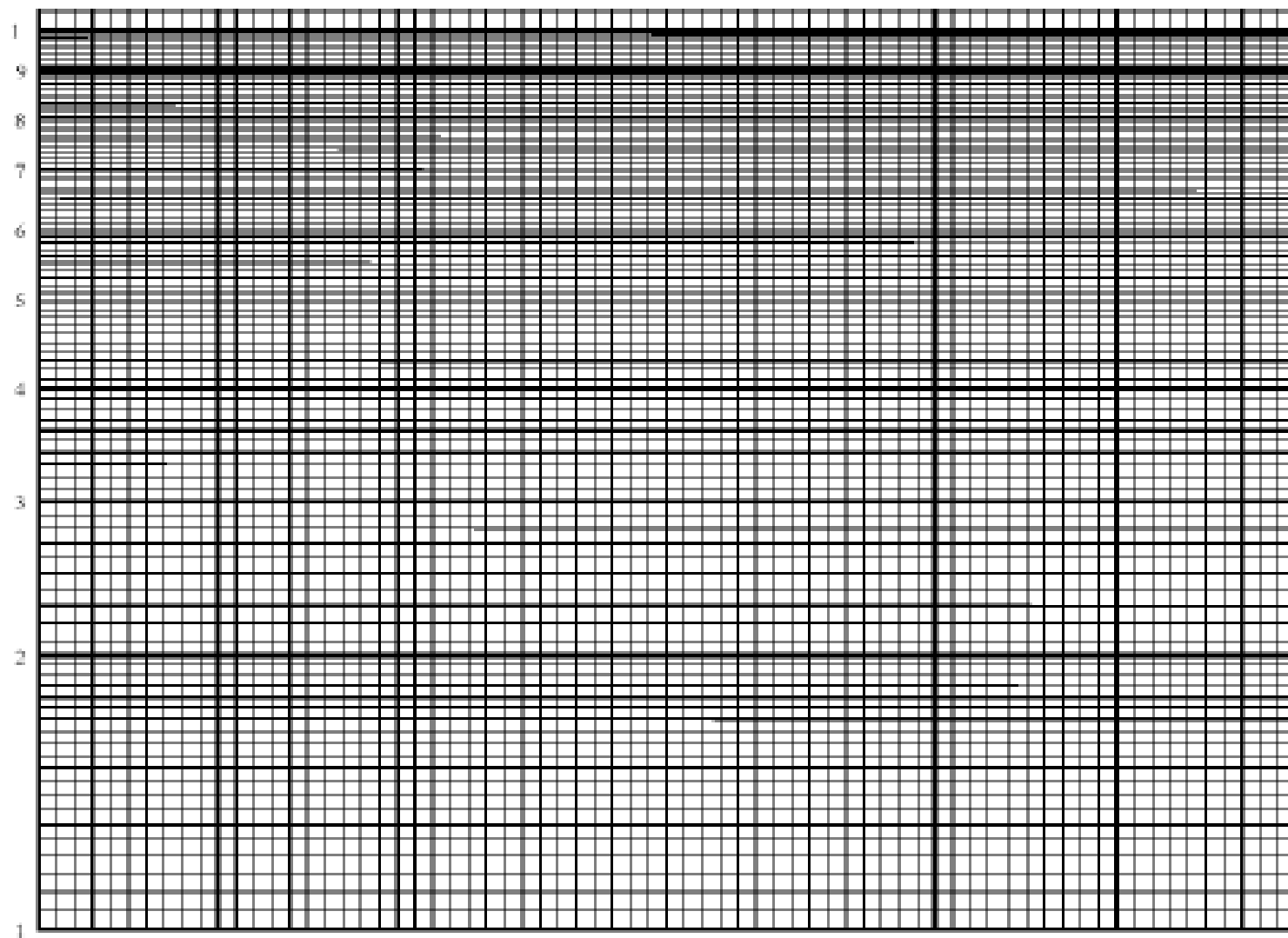
$$Y = A + BX$$

ή

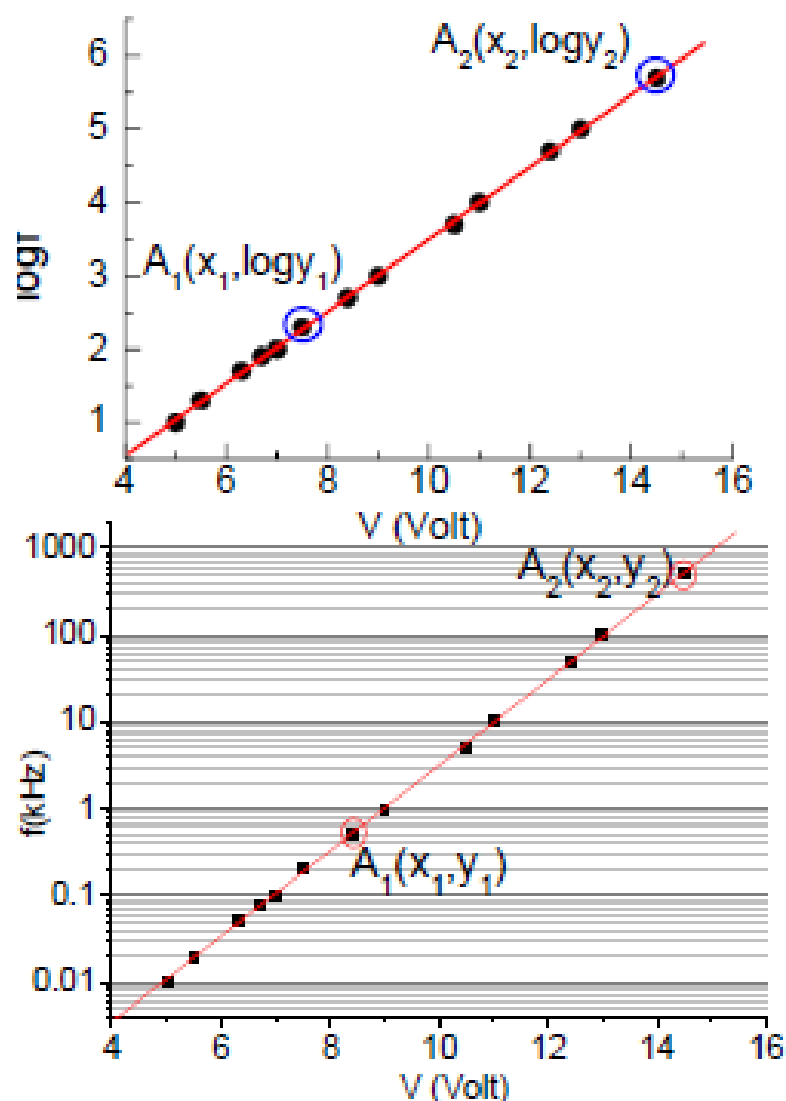
Γραφική παράσταση **y** συναρτήσει του **x** σε
ημιλογαριθμικό χαρτί

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \Rightarrow$$
$$\ln(x) = \frac{\log(x)}{\log(e)} = 2.303 \log(x)$$

Ημιλογαριθμικό χαρτί



Ημιλογαριθμικό χαρτί



Εφαρμογή ελαχίστων τετραγώνων για

$x, \log y$

Κλίση

$$a1 = \frac{\log y_2 - \log y_1}{x_2 - x_1}$$

Για να σχεδιάσω την ΕΕΤ στο ημιλογαριθμικό χαρτί πρέπει να βρω τις συντεταγμένες 2 σημείων βάσει της εξίσωσης της ΕΕΤ.

$$Y = A + BX$$

$$\log(y) = \log(D) + kx$$

→ Για $X_1 \rightarrow$ προκύπτει $Y_1 = \log(y_1)$
για να σχεδιάσω το σημείο στο ημιλογαριθμικό χαρτί $y_1 = 10^{Y_1}$

ΠΡΟΣΟΧΗ: τοποθετώ τα πειραματικά σημεία στο διάγραμμα χωρίς να λογαριθμήσω **αλλά** εφαρμόζω ΕΕΤ για $x, \log y$