

Θεωρείστε μία σφαίρα ακτίνας R και πυκνότητας $\rho_{\text{σφαίρας}}$, η οποία πέφτει υπό την επίδραση της βαρύτητας (g) σε ένα παχύρρευστο υγρό, με ιξώδες μ και πυκνότητα $\rho_{\text{υγρού}}$. Κάτω από την επίδραση της βαρύτητας, η σφαίρα επιταχύνεται, αλλά αυτό σημαίνει ότι και οι ιξώδεις δυνάμεις αυξάνουν, τείνοντας να αντισταθμίσουν τη δύναμη της βαρύτητας και να οδηγήσουν σε πτώση με οριακή ταχύτητα u_0 . Με χρήση της διαστατικής ανάλυσης, να βρείτε τις αδιάστατες ομάδες.

Λύση:

Βήμα 1^ο

Φυσικές μεταβλητές: $R, \mu, g, \rho_{\text{σφαίρας}}, \rho_{\text{υγρού}}, u_0 \rightarrow n=6$

Βήμα 2^ο

Βασικά μεγέθη προβλήματος: $M, L, T \rightarrow D=3$

Βήμα 3^ο

Αδιάστατες ομάδες: $G=n-D=6-3=3 \rightarrow G=3$

Βήμα 4^ο

Εκφράζουμε τις μονάδες μέτρησης κάθε φυσικής μεταβλητής συναρτήσει των βασικών μεγεθών:

Φυσική μεταβλητή	Μονάδες μέτρησης	Βασικά μεγέθη
R	m	L
μ	$kg/(ms)$	$ML^{-1}T^{-1}$
g	m/s^2	LT^{-2}
$\rho_{\text{σφαίρας}}$	kg/m^3	ML^{-3}
$\rho_{\text{υγρού}}$	kg/m^3	ML^{-3}
u_0	m/s	LT^{-1}

Βήμα 5^ο

Διαμορφώνουμε το αδιάστατο γινόμενο Π

$$\Pi = R^{\alpha_1} \cdot \mu^{\alpha_2} \cdot g^{\alpha_3} \cdot \rho_{\text{σφαίρας}}^{\alpha_4} \cdot \rho_{\text{υγρού}}^{\alpha_5} \cdot u_0^{\alpha_6}$$

$$\Pi = (L)^{\alpha_1} \cdot (ML^{-1}T^{-1})^{\alpha_2} \cdot (LT^{-2})^{\alpha_3} \cdot (ML^{-3})^{\alpha_4} \cdot (ML^{-3})^{\alpha_5} \cdot (LT^{-1})^{\alpha_6}$$

$$M: \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 = 0$$

$$L: \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - 3\alpha_4 - 3\alpha_5 + \alpha_6 = 0$$

$$T: -\alpha_2 - 2\alpha_3 - \alpha_6 = 0$$

Βήμα 6^ο

Λύνουμε ως προς $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$

$$M: \alpha_2 = -\alpha_4 - \alpha_5$$

$$L: \alpha_1 = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$$

$$T: \alpha_6 = \alpha_4 + \alpha_5 - 2\alpha_3$$

Βήμα 7^ο

Μαζεύουμε τις φυσικές μεταβλητές με τον ίδιο εκθέτη

$$\Pi = R^{\alpha_1} \cdot \mu^{\alpha_2} \cdot g^{\alpha_3} \cdot \rho_{\sigma\phi\alpha\iota\rho\alpha\varsigma}^{\alpha_4} \cdot \rho_{\upsilon\gamma\rho\acute{o}\upsilon}^{\alpha_5} \cdot u_o^{\alpha_6}$$

$$\Pi = R^{\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5} \cdot \mu^{-\alpha_4-\alpha_5} \cdot g^{\alpha_3} \cdot \rho_{\sigma\phi\alpha\iota\rho\alpha\varsigma}^{\alpha_4} \cdot \rho_{\upsilon\gamma\rho\acute{o}\upsilon}^{\alpha_5} \cdot u_o^{\alpha_4+\alpha_5-2\alpha_3}$$

$$\Pi = \left(\frac{Rg}{u_o^2}\right)^{\alpha_3} \cdot \left(\frac{u_o R \rho_{\sigma\phi\alpha\iota\rho\alpha\varsigma}}{\mu}\right)^{\alpha_4} \cdot \left(\frac{u_o R \rho_{\upsilon\gamma\rho\acute{o}\upsilon}}{\mu}\right)^{\alpha_5}$$