

Άσκηση ΣΤ3 (βιβλίου)

Έστω ροή κάποιου ρευστού πυκνότητας ρ και ιξώδους μ μέσα σε ένα κυλινδρικό αγωγό. Οι παράμετροι που επηρεάζουν την πτώση πίεση κατά μήκος του αγωγού (εκτός από τις ρ και μ) είναι η μέση ταχύτητα $\bar{v}$, το μήκος L , η διάμετρος d του αγωγού και ακόμα ένα μέγεθος e που εκφράζει την τραχύτητα της επιφάνειας του αγωγού.

Χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση να βρεθούν οι αδιάστατες ομάδες που επηρεάζουν το φαινόμενο.



Βήμα 1^ο: Γράφουμε τις εξαρτημένες μεταβλητές του προβλήματος

Φυσικές μεταβλητές: $\Delta P, \rho, \mu, \bar{v}, L, D, e \rightarrow n=7$

Βήμα 2^ο: Επιλέγουμε τα βασικά μεγέθη του προβλήματος

Βασικά μεγέθη: M, L, T (M: mass L: length T: time) $\rightarrow D=3$

Βήμα 3^ο: Εφαρμόζουμε το θεώρημα Buckingham

Αδιάστατες ομάδες: $G=n-D=7-3=4 \rightarrow G=4$

Βήμα 4^ο: Εκφράζουμε τις μονάδες μέτρησης κάθε φυσικής μεταβλητής συναρτήσει των βασικών μεγεθών

Φυσική μεταβλητή	Μονάδες μέτρησης	Βασικά μεγέθη
ΔP	$\text{kg}/(\text{ms}^{-2})$	$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$
ρ	kg/m^3	ML^{-3}
μ	$\text{kg}/(\text{ms})$	$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$
L	m	L
$\bar{v}$	m/s	MT^{-1}
D	m	L
e	m	L

Βήμα 5^ο: Διαμορφώνουμε το αδιάστατο γινόμενο Π

$$\Delta P^{\alpha_1} \cdot \rho^{\alpha_2} \cdot \mu^{\alpha_3} \cdot \bar{v}^{\alpha_4} \cdot L^{\alpha_5} \cdot D^{\alpha_6} \cdot e^{\alpha_7} = M^0 \cdot L^0 \cdot T^0$$

$$(\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2})^{\alpha_1} \cdot (\text{ML}^{-3})^{\alpha_2} \cdot (\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1})^{\alpha_3} \cdot (\text{LT}^{-1})^{\alpha_4} \cdot (L)^{\alpha_5} \cdot (L)^{\alpha_6} \cdot (L)^{\alpha_7} = M^0 \cdot L^0 \cdot T^0$$

$$\mathbf{M:} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$\mathbf{L:} \quad -\alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 = 0$$

$$\mathbf{T:} \quad -2\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4 = 0$$

Βήμα 6^ο: Λύνω ως προς 4 αγνώστους, τυχαία επιλέγουμε $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7$

$$\mathbf{M:} \quad \alpha_2 = -\alpha_1 - \alpha_3$$

$$\mathbf{T:} \quad \alpha_4 = 2\alpha_1 + \alpha_3$$

$$\mathbf{L:} \quad \alpha_6 = \alpha_1 - 3\alpha_1 - 3\alpha_3 + \alpha_3 + 2\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_5 - \alpha_7 \rightarrow \alpha_6 = -\alpha_3 - \alpha_5 - \alpha_7$$

Βήμα 7^ο: μαζεύω τις φυσικές μεταβλητές με τον ίδιο εκθέτη

$$\Pi = \Delta P^{\alpha_1} \cdot \rho^{-\alpha_1 - \alpha_3} \cdot \mu^{\alpha_3} \cdot \bar{v}^{-2\alpha_1 - \alpha_3} \cdot L^{\alpha_5} \cdot D^{-\alpha_3 - \alpha_5 - \alpha_7} \cdot e^{\alpha_7}$$

$$\Pi = \left(\frac{\Delta P}{\rho \bar{v}^2} \right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\mu}{\rho \bar{v} D} \right)^{\alpha_3} \cdot \left(\frac{L}{D} \right)^{\alpha_5} \cdot \left(\frac{e}{D} \right)^{\alpha_7}$$

Το πρόβλημα επηρεάζεται από τις αδιάστατες ομάδες που βρίσκονται στις παρενθέσεις. Πρέπει λοιπόν, να ερευνηθεί πειραματικά μια συνάρτηση της μορφής:

$$\frac{\Delta P}{\rho \bar{u}^2} = f(Re, \frac{D}{L}, \frac{D}{e})$$

Όπου, $Re = \frac{\rho \bar{u} D}{\mu}$