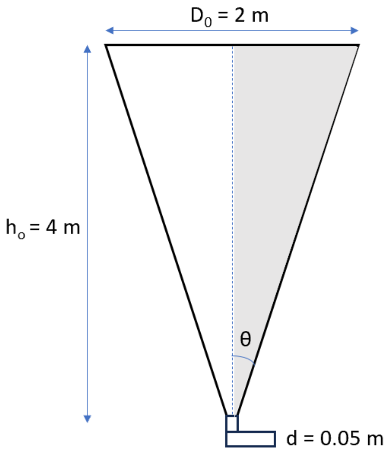
Άσκηση εκτός βιβλίου (Κεφάλαιο Δ, φροντιστήριο 16/01/2024)



Δεξαμενή κωνικού σχήματος συνολικού ύψους h_0 = 4 m είναι αρχικά εντελώς γεμάτη με νερό. Η μέγιστη διάμετρος της δεξαμενής (στο ανώτερο σημείο της στάθμης του νερού) είναι ίση με D_0 = 2 m. Η δεξαμενή αδειάζει από σωλήνα διαμέτρου d = 0.05 m που βρίσκεται στον πυθμένα της δεξαμενής. Να βρεθεί ο απαιτούμενος χρόνος για να αδειάσει η δεξαμενή.

Δίνεται ότι η ταχύτητα εκροής του νερού στον πυθμένα είναι: $u = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

Λύση

Εφαρμόζουμε ισοζύγιο μάζας θεωρώντας ως όγκο ελέγχου το νερό που βρίσκεται εσωτερικά της δεξαμενής.

$$(\Sigma\upsilon\sigma\sigma\acute{\omega}\rho\varepsilon\upsilon\sigma\eta) = \cancel{(E\acute{\iota}\sigma o\delta o\varsigma)} - (\text{Έ}\xi o\delta o\varsigma) \pm \cancel{(A\nu\tau\acute{\iota}\delta\rho\alpha\sigma\eta)}$$

$$\frac{dm}{dt} = -\dot{m}_{out} \rightarrow \frac{d(\rho\, V)}{dt} = -\rho\, F_v \rightarrow \cancel{\rho} \frac{dV}{dt} = -\cancel{\rho}\, A\, u$$

$$\frac{dV}{dt} = -\,A\sqrt{2 \cdot g \cdot h} \rightarrow \frac{dV}{dt} = -\frac{\pi\, d^2}{4}\sqrt{2 \cdot g \cdot h} \qquad (1)$$

Ο όγκος του κώνου δίνεται από την σχέση:

$$V = \frac{1}{3}\,\pi\, r^2\, h = \frac{1}{12}\,\pi\, D^2\, h \qquad (2)$$

Για να μπορέσουμε να εισάγουμε την παραπάνω σχέση στο ισοζύγιο μάζας, απαιτείται να βρεθεί μία σχέση που να συνδέει την διάμετρο του κώνου με το ύψος του νερού στην δεξαμενή κάθε χρονική στιγμή. Αρχικά, με βάση την τριγωνομετρία, μπορούμε να υπολογίσουμε την γωνία θ του σχήματος ως εξής:

$$\tan\theta = \frac{D_0/2}{h_0} = \frac{1}{4} \rightarrow \quad \theta = 14^o$$

Πάλι από την τριγωνομετρία, έχοντας υπολογίσει πλέον την γωνία θ, μπορούμε να βρούμε την σχέση που συνδέει την διάμετρο του κώνου με το ύψους του νερού κάθε χρονική στιγμή:

$$\tan\theta = \frac{D/2}{h} \;\rightarrow\; D = \frac{h}{2} \qquad (3)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1), (2) και (3):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{12}\,\pi\,\left(\frac{h}{2}\right)^2 h\right) = -\frac{\pi\,d^2}{4}\,\sqrt{2\cdot g\cdot h} \;\rightarrow\; \frac{1}{48}\frac{d}{dt}\,(h^3) = -\frac{d^2}{4}\,\sqrt{2\cdot g}\,\sqrt{h}$$

$$\rightarrow \frac{1}{12}\,3h^2\frac{dh}{dt} = -d^2\sqrt{2\cdot g}\,\sqrt{h} \;\rightarrow\; h^{3/2}dh = -4d^2\sqrt{2\cdot g}\,dt$$

$$\rightarrow \int h^{3/2}dh = -\int 4d^2\sqrt{2\cdot g}\,dt \rightarrow \frac{2}{5}\,h^{5/2} = -4d^2\sqrt{2\cdot g}\,t\; + C$$

Για τον υπολογισμό της σταθεράς ολοκλήρωσης, C, εκμεταλλευόμαστε την αρχική συνθήκη:

$$\mathit{\Gamma\iota\alpha}\; t = 0 \rightarrow \; h = h_0 = 4\,m$$

$$\rightarrow \; C = 12.8$$

Συνεπώς:

$$\frac{2}{5}\,h^{5/2} = -4d^2\sqrt{2\cdot g}\,t\; + 12.8$$

Έχοντας βρει την εξίσωση που δίνει το ύψος του νερού μέσα στην δεξαμενή κάθε χρονική στιγμή, μπορούμε να υπολογίσουμε τον χρόνο που απαιτείται για να αδειάσει πλήρως η δεξαμενή θέτοντας όπου h=0:

$$0 = -4d^2\sqrt{2\cdot g}\,t\; + 12.8 \rightarrow \; t = 289\;sec$$