



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Αριθμητική Ανάλυση

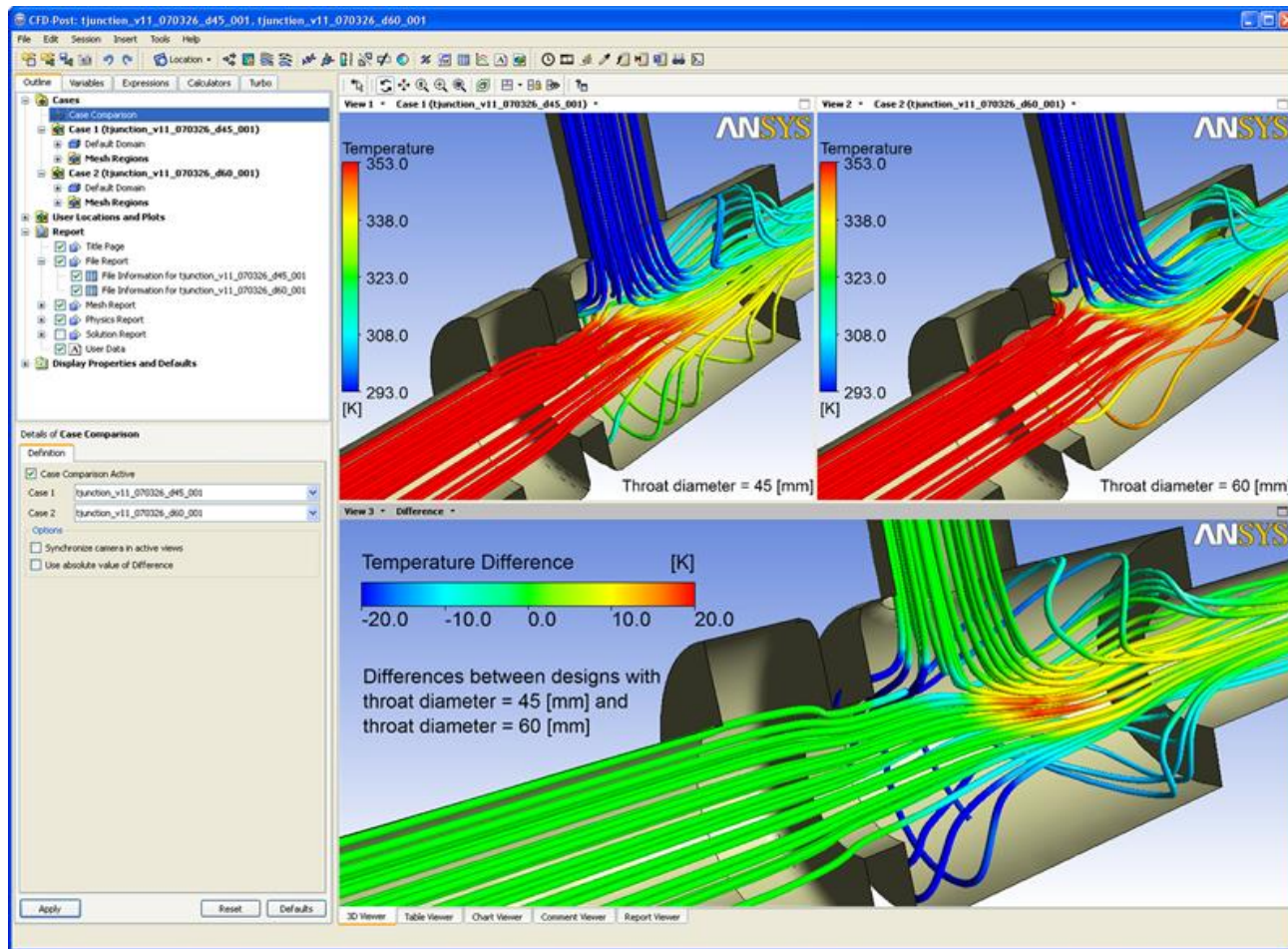
Ενότητα 1: Εισαγωγή – Βασικές Έννοιες

Φραγκίσκος Κουτελιέρης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Χημικών Μηχανικών

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΦΡΑΓΚΙΣΚΟΣ ΚΟΥΤΕΛΙΕΡΗΣ



Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή
2. Αριθμητική παραγωγή
3. Αριθμητική ολοκλήρωση
4. Επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων
5. Επίλυση γραμμικών συστημάτων
6. Παρεμβολή / Παρέκταση
7. Επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων
8. Πεπερασμένες διαφορές.
9. Επίλυση συστημάτων μη γραμμικών εξισώσεων
10. Ειδικά θέματα αριθμητικής ανάλυσης

Αριθμητική Ανάλυση είναι ...

... η μετατροπή μαθηματικών προβλημάτων σε **ισοδύναμα** προβλήματα που επιλύονται με **αριθμητικό τρόπο**.

Τι χρειάζεται ;

Όταν **δεν υπάρχει** αναλυτική επίλυση σε κάποιο πρόβλημα, ή όταν είναι δύσκολο να επιτευχθεί.

Χρονοβόρα

Εξαντλεί τους πόρους

Αριθμητική Ανάλυση

Παράδειγμα

Εξίσωση: $x^2 + 4x + 3 = 0$

Ρίζες: $\frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \begin{matrix} x = -1 \\ x = -3 \end{matrix}$

Εξίσωση: $x = e^{-x}$

Ρίζες: 

Άλλο παράδειγμα

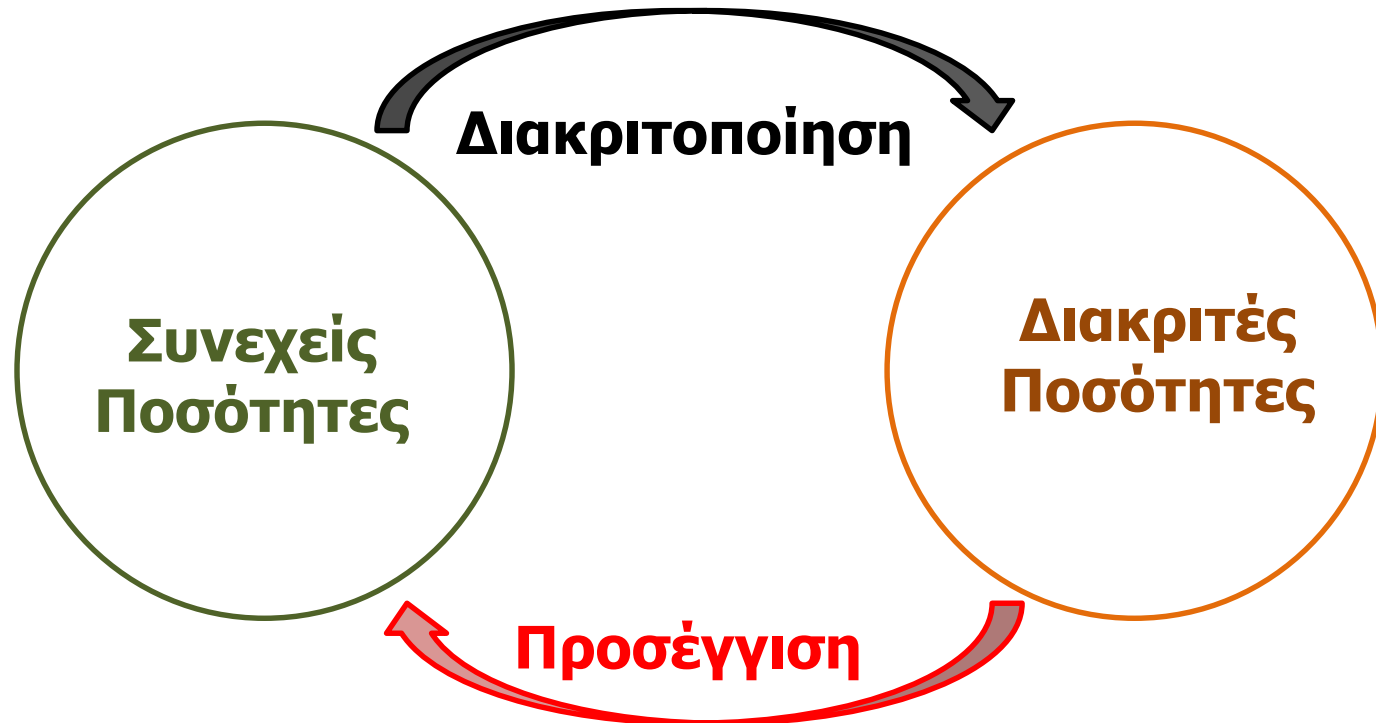
Σύστημα 2X2: $x_1 + x_2 = 3$
 $x_1 + 2x_2 = 5$

Λύσεις: $x_1 = 1, x_2 = 2$

Σύστημα: 4000 X 4000

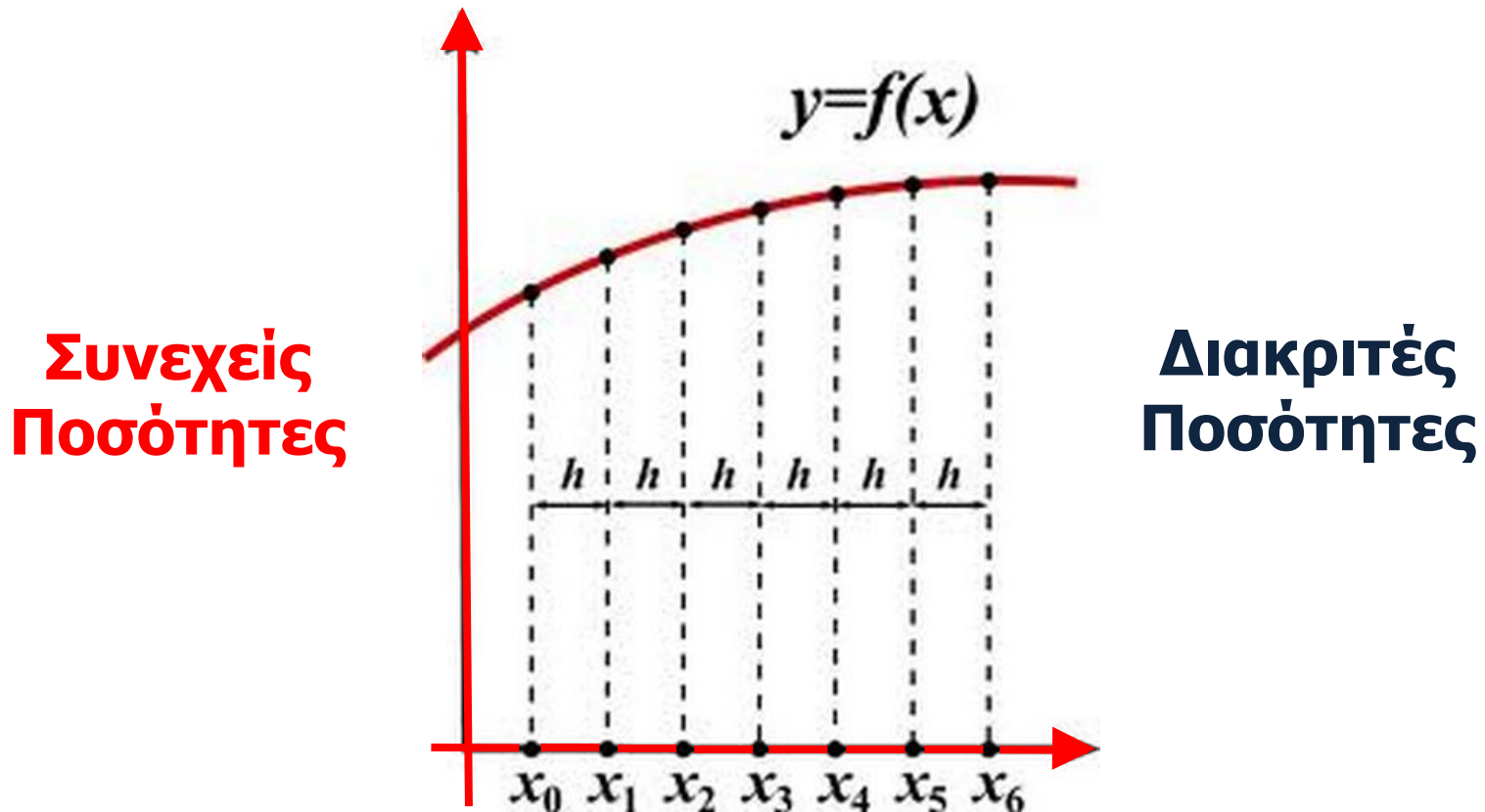
Λύσεις: //////////////

Αριθμητική Ανάλυση



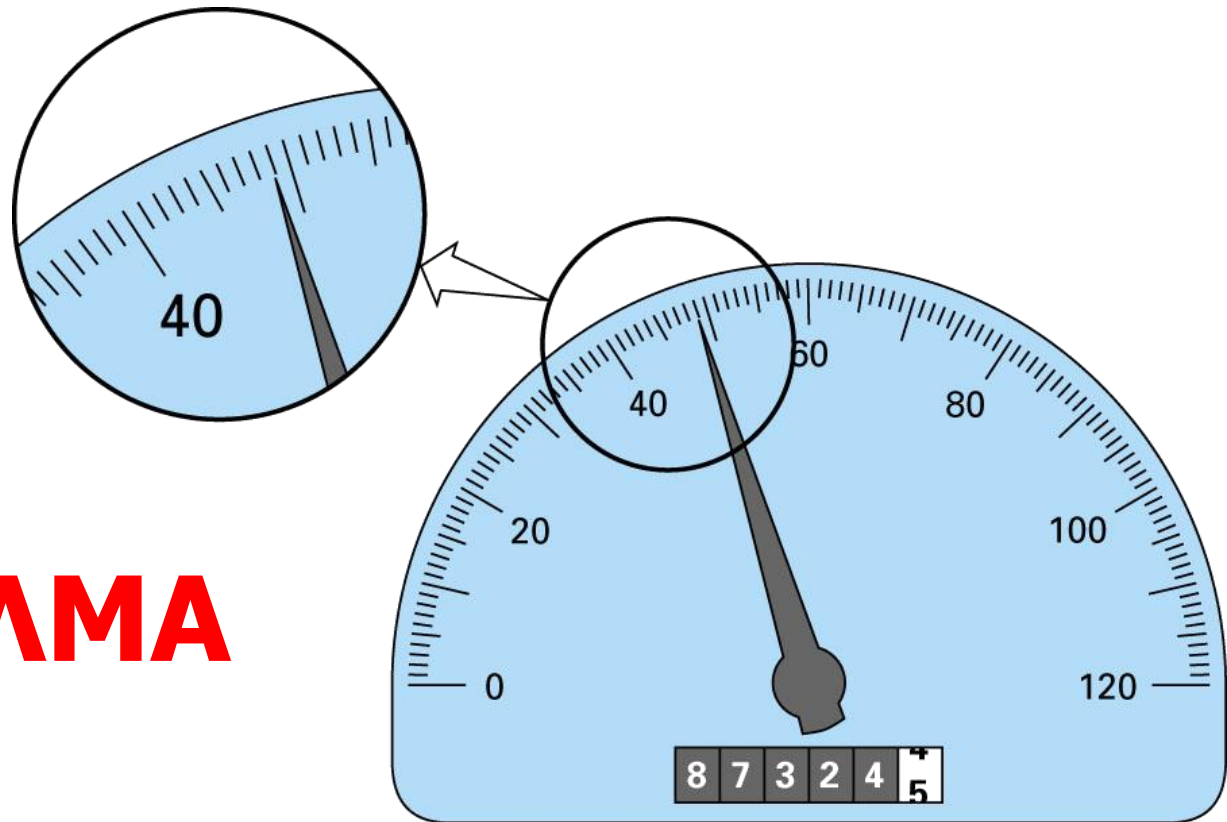
Αριθμητική Ανάλυση

Διακριτοποίηση



Αριθμητική Ανάλυση

Προσέγγιση



ΣΦΑΛΜΑ

Αριθμητική Ανάλυση

Σφάλματα

ΑΠΟΛΥΤΟ

απόλυτο σφάλμα = |πραγματική τιμή – υπολογιζόμενη τιμή|

ΣΧΕΤΙΚΟ

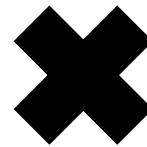
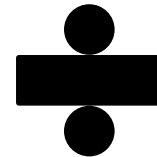
σχετικό σφάλμα = $\left| \frac{\text{πραγματική τιμή} - \text{υπολογιζόμενη τιμή}}{\text{πραγματική τιμή}} \right|$

ΠΟΙΟ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕ ;;;;;;

Αριθμητική Ανάλυση



1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ



Σφάλματα

Σφάλματα στα αρχικά δεδομένα
Διαδιδόμενο σφάλμα
Σφάλμα αποκοπής
Σφάλμα στρογγυλοποίησης

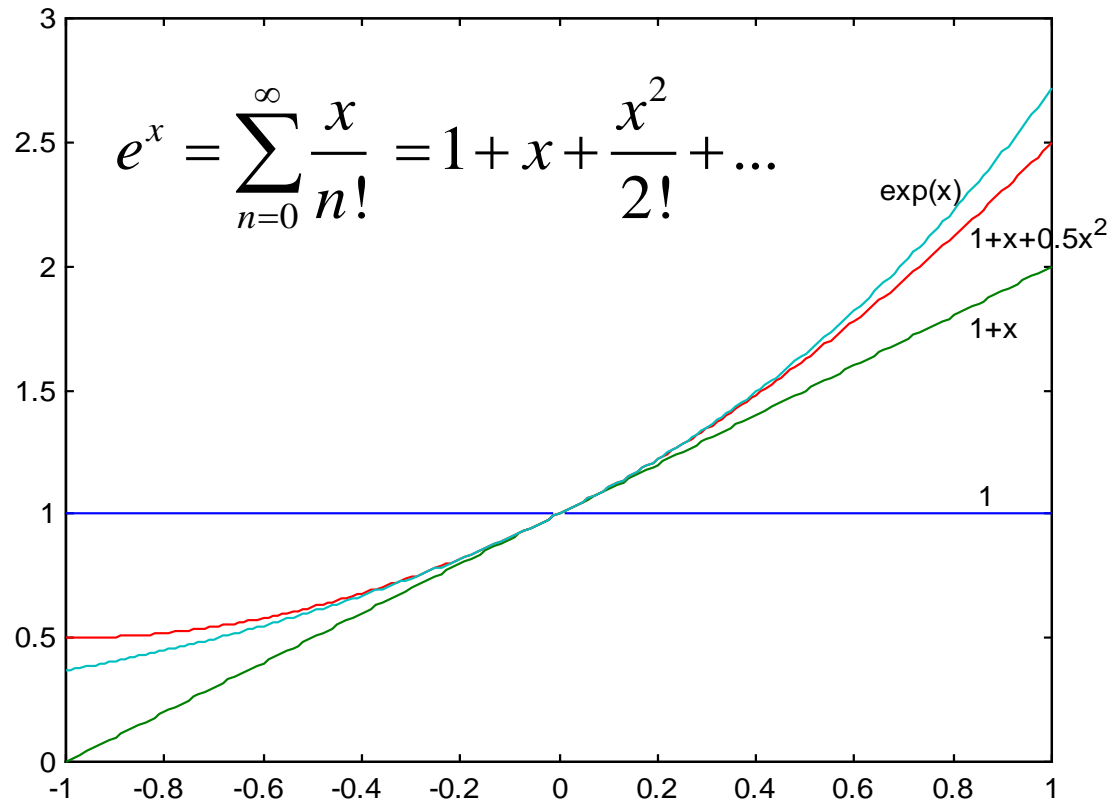
Σφάλμα αποκοπής ...

...είναι το σφάλμα που δημιουργείται από την αποκοπή όρων σε αλγοριθμικές διαδικασίες.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ΠΟΣΟΙ ΟΡΟΙ ΕΝΑΙ ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΟΙ ;

Σφάλμα αποκοπής ...



Αριθμητική Ανάλυση

Σφάλμα αποκοπής ...

ΠΟΣΟΙ ΟΡΟΙ ΕΝΑΙ ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΟΙ ;

ΠΟΣΟ ΕΝΑΙ ΤΟ Δx ;

Αριθμητική Ανάλυση

Σφάλμα στρογγυλοποίησης ...

**...είναι το σφάλμα που δημιουργείται
από την στρογγυλοποίηση **K**
δεκαδικών ψηφίων.**

$$\pi = 3.14;$$

ΠΟΣΟ ΕΝΑΙ ΤΟ π ;

$$\pi = 3.1416;$$

Γιατί στρογγυλοποίηση ; ; ;

Αριθμητικά συστήματα



Βάση - Εκθέτης



Τι σημαίνει ο αριθμός 642;

Αριθμητικά συστήματα

$$\begin{aligned} 6 \times 10^2 &= 6 \times 100 = 600 \\ + 4 \times 10^1 &= 4 \times 10 = 40 \\ + 2 \times 10^0 &= 2 \times 1 = 2 = 642 \end{aligned}$$

**Ο αριθμός είναι
στη βάση 10**

**Η δύναμη δείχνει
τη θέση του ψηφίου**

Αριθμητική Ανάλυση

Αριθμητικά συστήματα

Τα συνηθέστερα αριθμητικά συστήματα είναι το **δεκαδικό** και το **δυναδικό**

$$34_{(10)} = 100010_2$$

Αριθμητικά συστήματα

Διαιρούμε συνεχώς το δεκαδικό δια **δύο** μέχρι το πηλίκο να γίνει **0**.

- $34:2 \rightarrow$ Πηλίκο 17, Υπόλοιπο 0
- $17:2 \rightarrow$ Πηλίκο 8, Υπόλοιπο 1
- $8:2 \rightarrow$ Πηλίκο 4, Υπόλοιπο 0
- $4:2 \rightarrow$ Πηλίκο 2, Υπόλοιπο 0
- $2:2 \rightarrow$ Πηλίκο 1, Υπόλοιπο 0
- $1:2 \rightarrow$ Πηλίκο 0, Υπόλοιπο 1

Σχηματίζουμε τον αριθμό γράφοντας τα **υπόλοιπα** από το

τέλος προς την **αρχή** : $34_{(10)} = 100010_2$

Αριθμητικά συστήματα

Η αναπαράσταση αριθμών στο δυαδικό σύστημα απαιτεί μεγάλο αριθμό ψηφίων



K

Σφάλμα στρογγυλοποίησης ...

...είναι το σφάλμα που δημιουργείται από την στρογγυλοποίηση K δεκαδικών ψηφίων.

Δυο αριθμοί που η διαφορά τους είναι μικρότερη από το σφάλμα, έχουν ακρίβεια μεταξύ τους K δεκαδικά ψηφία.

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \times 10^{-K}$$

Αριθμητική Ανάλυση

Σφάλμα στρογγυλοποίησης

$$\pi = 3.14;$$

$$\pi = 3.1416;$$

~~ΠΟΣΟ ΕΝΑΙ ΤΟ π ;~~

ΠΟΣΟ ΕΝΑΙ ΤΟ K ;

Σφάλμα στρογγυλοποίησης

$$x = 0.999997$$



$$K = 5$$

$$x = 0.999993$$

Σημαντικά Ψηφία

Οι αριθμοί δεν παρουσιάζουν απόλυτη ακρίβεια (υπεισέρχονται σφάλματα).

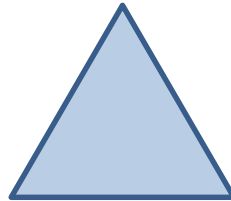
Τιμή μέτρησης



**βαθμό βεβαιότητας =
ακρίβεια**

Σημαντικά Ψηφία

Η βεβαιότητα αυτή υποδηλώνεται από το πλήθος των ψηφίων που χρησιμοποιούμε για να εκφράσουμε την αριθμητική του τιμή.



Όσο περισσότερα σημαντικά ψηφία περιέχει η αριθμητική έκφραση, τόσο μεγαλύτερη η ακρίβεια.

Διαδιδόμενο σφάλμα

Παρατηρείται στις περιπτώσεις υπολογισμού μικρών αριθμών από πράξεις μεγάλων αριθμών ή το αντίστροφο.

Ευστάθεια Αλγορίθμων

Μικρή μεταβολή παραμέτρων



Μικρή μεταβολή αποτελεσμάτων = ΕΥΣΤΑΘΗΣ

Μεγάλη μεταβολή αποτελεσμάτων = ΑΣΤΑΘΗΣ

«Το υλικό της παρουσίασης προέρχεται από τις πανεπιστημιακές παραδόσεις του καθηγητή Φρ. Κουτελιέρη».

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.