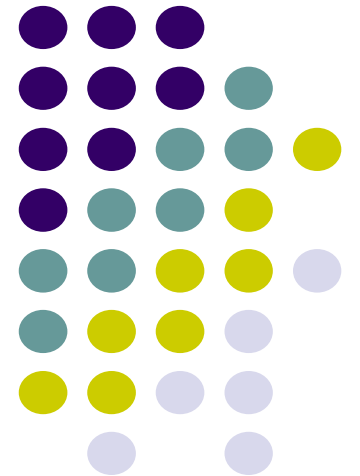


Φροντιστήριο 4

Δυναμική Απόκριση Συστημάτων 1^{ης} και 2^{ης}
τάξης



Συστήματα 2^{ης} τάξης

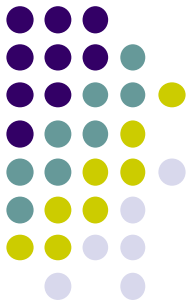
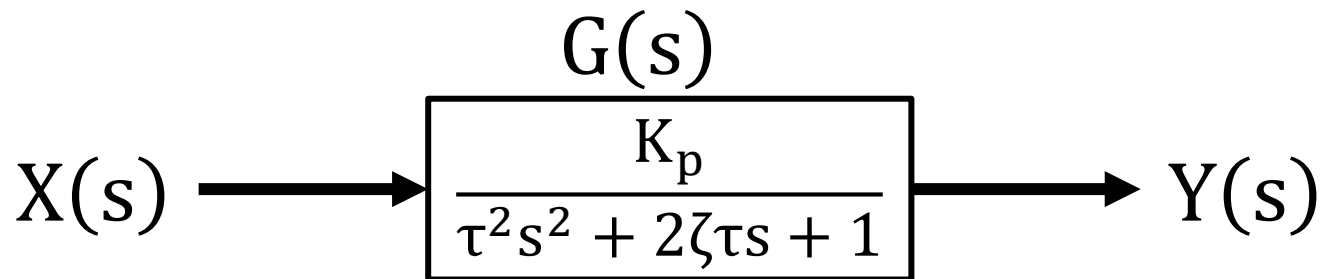
Είναι εκείνα που περιγράφονται από 2^{ης} τάξης διαφορικές εξισώσεις:

$$\tau^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dy}{dt} + y = K_p x(t)$$

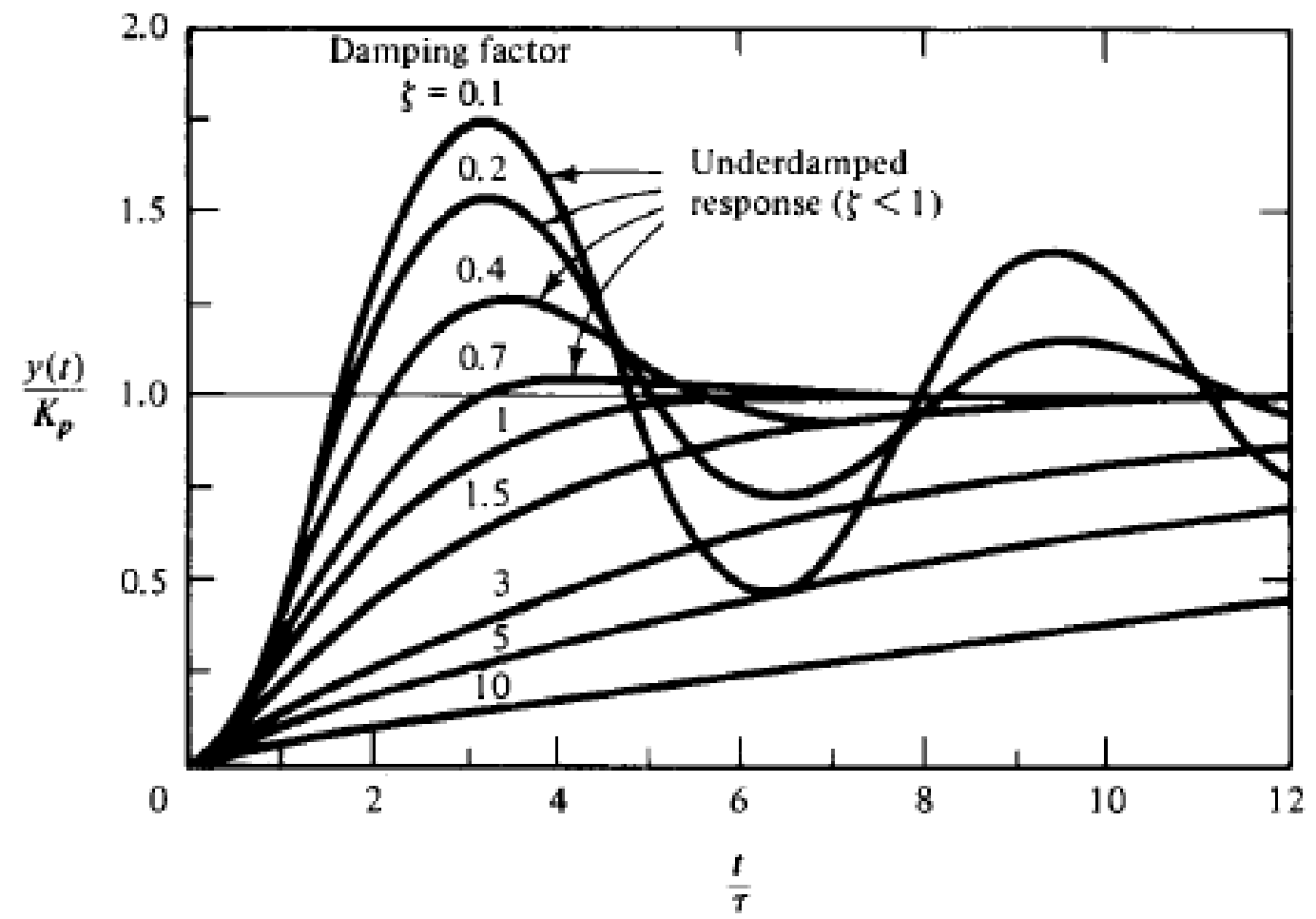
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_p}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

Ορίζοντας μεταβλητές απόκλισης (Y, X) γύρω από μία σταθερή κατάσταση (y_s, x_s):

τ : Περίοδος ταλάντωσης
συστήματος
 ζ : συντελεστής
απόσβεσης



Συστήματα 2^{ης} τάξης



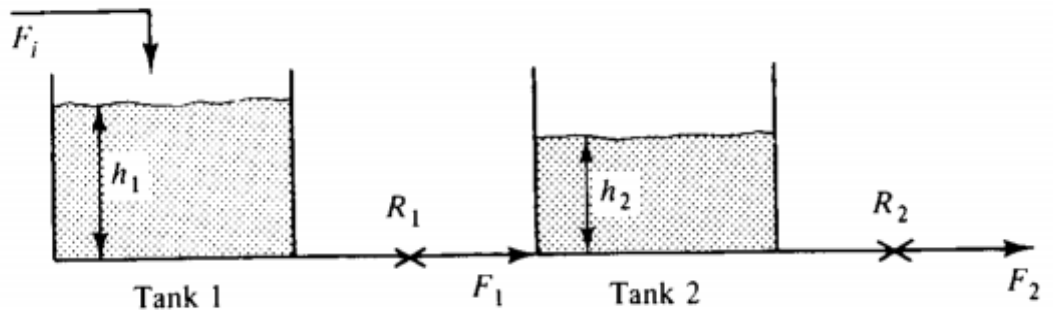
(b)



Άσκηση 1

Οι δεξαμενές του παρακάτω σχήματος αλληλεπιδρούν. Το σύστημα αρχικά βρίσκεται σε σταθερή κατάσταση με παροχή στην πρώτη δεξαμενή $F_i = 10\text{m}^3/\text{min}$.

- A)** Βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς του $H_2(s)$ σε σχέση με την F_i .
- B)** Εάν η παροχή εισόδου αλλάξει σε $F_i = 11\text{m}^3/\text{min}$ βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς του $H_2(s)$ σε σχέση με το F_i .
- Γ)** Βρείτε $h_2(1)$, $h_2(4)$, $h_2(\infty)$.
- Δ)** Βρείτε τα αρχικά επίπεδα στάθμης $h_1(0)$, $h_2(0)$.



Δεδομένα:

$$A_1 = 1\text{m}^2$$

$$A_2 = 1.25\text{m}^2$$

$$R_1 = 1\text{min/m}^2$$

$$R_2 = 0.8\text{min/m}^2$$

Table 3.1 Laplace Transforms for Various Time-Domain Functions^a

$f(t)$	$F(s)$
1. $\delta(t)$ (unit impulse)	1
2. $S(t)$ (unit step)	$\frac{1}{s}$
3. t (ramp)	$\frac{1}{s^2}$
4. t^{n-1}	$\frac{(n-1)!}{s^n}$
5. e^{-bt}	$\frac{1}{s+b}$
6. $\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$	$\frac{1}{\tau s + 1}$
7. $\frac{t^{n-1} e^{-bt}}{(n-1)!}$ ($n > 0$)	$\frac{1}{(s+b)^n}$
8. $\frac{1}{\tau^n (n-1)!} t^{n-1} e^{-t/\tau}$	$\frac{1}{(\tau s + 1)^n}$
9. $\frac{1}{b_1 - b_2} (e^{-b_2 t} - e^{-b_1 t})$	$\frac{1}{(s+b_1)(s+b_2)}$
10. $\frac{1}{\tau_1 - \tau_2} (e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2})$	$\frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$
11. $\frac{b_3 - b_1}{b_2 - b_1} e^{-b_1 t} + \frac{b_3 - b_2}{b_1 - b_2} e^{-b_2 t}$	$\frac{s + b_3}{(s+b_1)(s+b_2)}$
12. $\frac{1}{\tau_1} \frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \frac{\tau_2 - \tau_3}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t/\tau_2}$	
13. $1 - e^{-t/\tau}$	
14. $\sin \omega t$	
15. $\cos \omega t$	
16. $\sin(\omega t + \phi)$	
17. $e^{-bt} \sin \omega t$	} b, ω real
18. $e^{-bt} \cos \omega t$	
19. $\frac{1}{\tau \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta t/\tau} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} t/\tau)$ ($0 \leq \zeta < 1$)	
20. $1 + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} (\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2})$ ($\tau_1 \neq \tau_2$)	
21. $1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta t/\tau} \sin[\sqrt{1-\zeta^2} t/\tau + \psi]$ $\psi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}, (0 \leq \zeta < 1)$	

$$\frac{\tau_3 s + 1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

$$\frac{1}{s(\tau s + 1)}$$

$$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

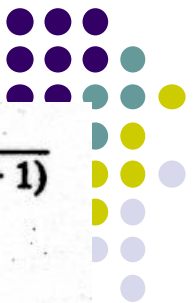
$$\frac{\omega \cos \phi + s \sin \phi}{s^2 + \omega^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega}{(s+b)^2 + \omega^2} \\ \frac{s+b}{(s+b)^2 + \omega^2} \end{array} \right.$$

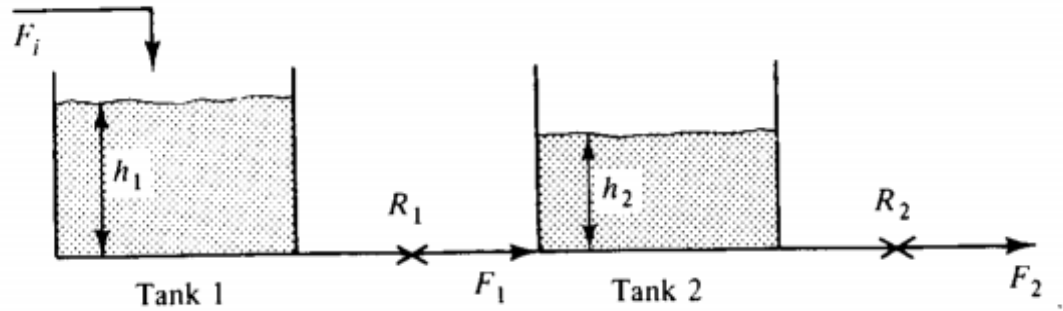
$$\frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1}$$

$$\frac{1}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

$$\frac{1}{s(\tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1)}$$



Λύση 1



Δεδομένα:

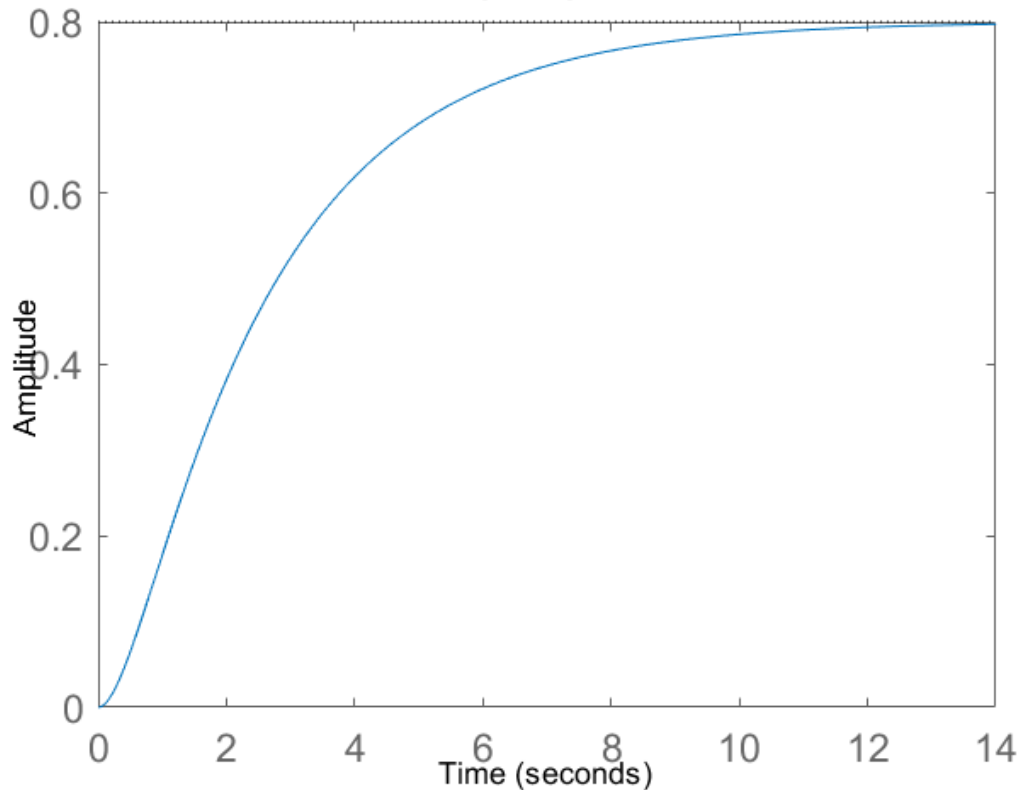
$$A_1 = 1\text{m}^2$$

$$A_2 = 1.25\text{m}^2$$

$$R_1 = 1\text{min/m}^2$$

$$R_2 = 0.8\text{min/m}^2$$

Step Response



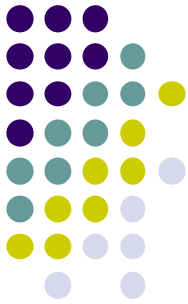
Τιμές:

$$h_2(0) = 8.00\text{m}$$

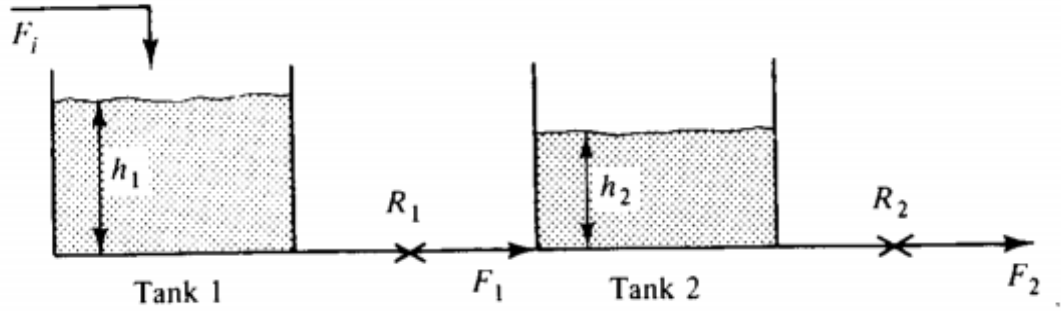
$$h_2(1) = 8.18\text{m}$$

$$h_2(4) = 8.62\text{m}$$

$$h_2(\infty) = 8.80\text{m}$$



Λύση 1



Δεδομένα:

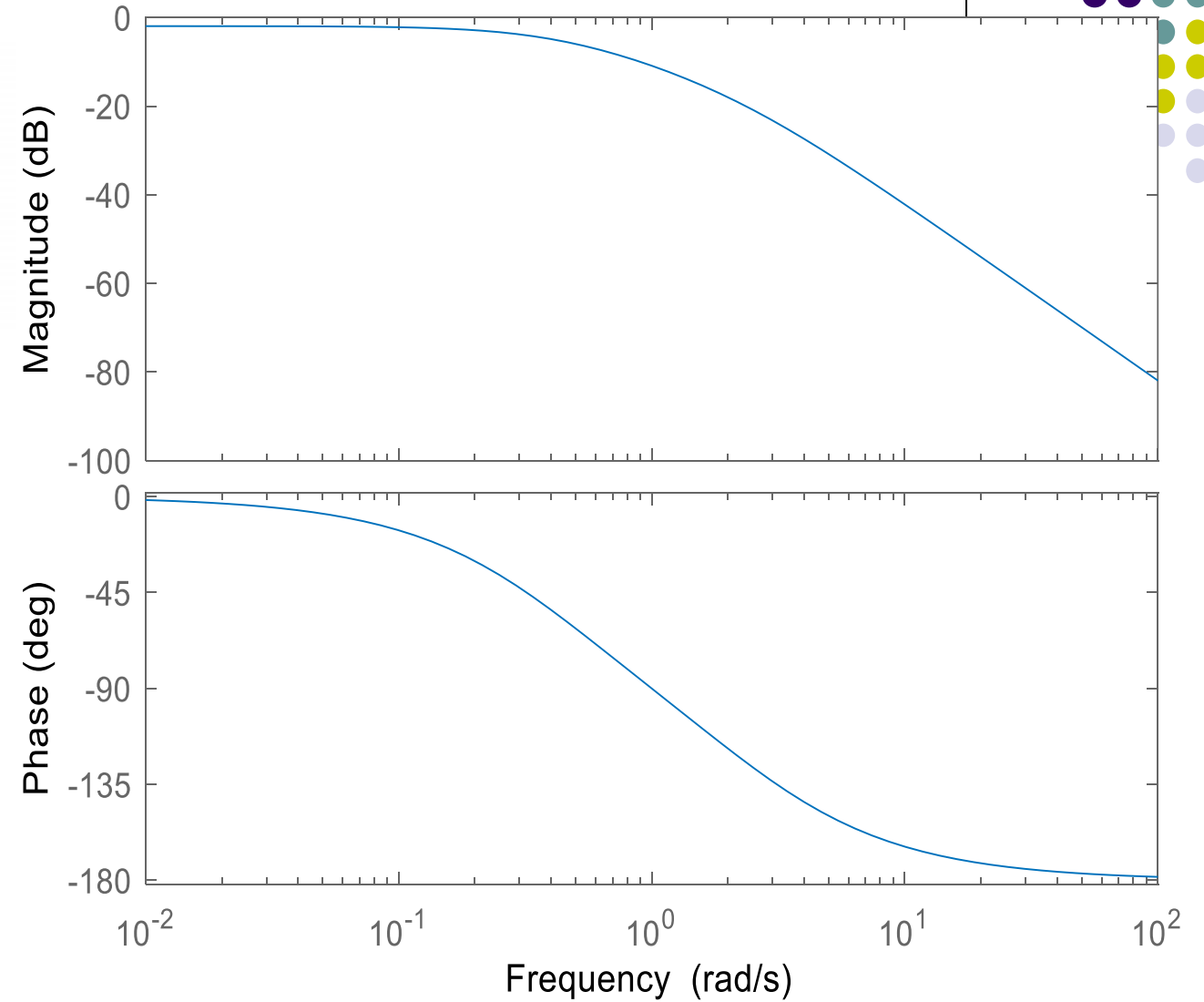
$$A_1 = 1\text{m}^2$$

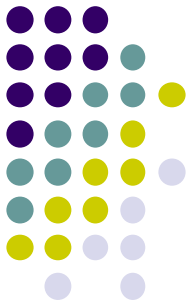
$$A_2 = 1.25\text{m}^2$$

$$R_1 = 1\text{min/m}^2$$

$$R_2 = 0.8\text{ min/m}^2$$

Bode Diagram

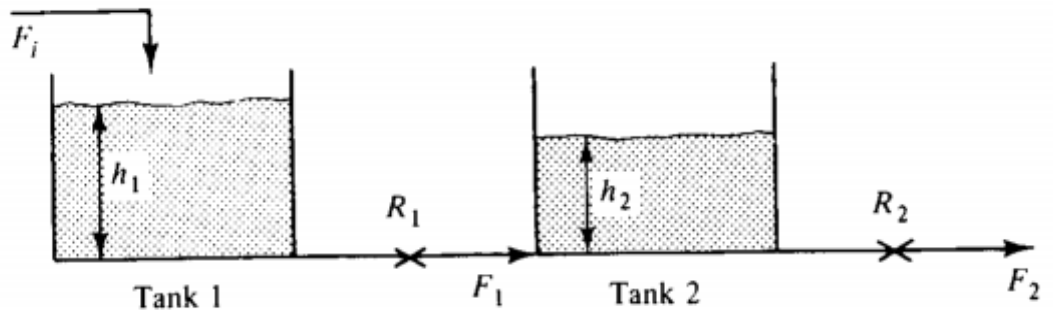




Άσκηση 2

Οι δεξαμενές του παρακάτω σχήματος αλληλεπιδρούν. Το σύστημα αρχικά βρίσκεται σε σταθερή κατάσταση με παροχή στην πρώτη δεξαμενή $F_i = 10\text{m}^3/\text{min}$.

- A)** Εάν η παροχή εισόδου αλλάξει σε $F_i = 11\text{m}^3/\text{min}$ βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς του $H_1(s)$ σε σχέση με το F_i .
- B)** Βρείτε $h_1(1)$, $h_1(4)$, $h_1(\infty)$.
- Γ)** Βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς του $H_1(s)$ σε σχέση με την F_i .



Δεδομένα:

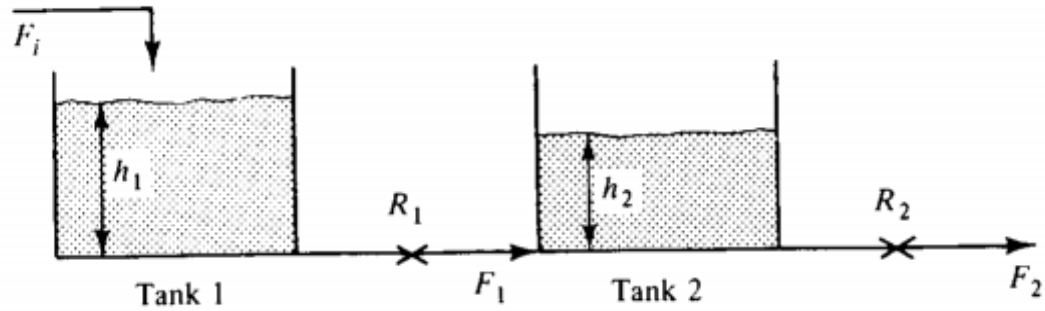
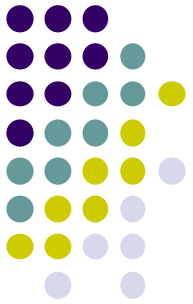
$$A_1 = 1\text{m}^2$$

$$A_2 = 1.25\text{m}^2$$

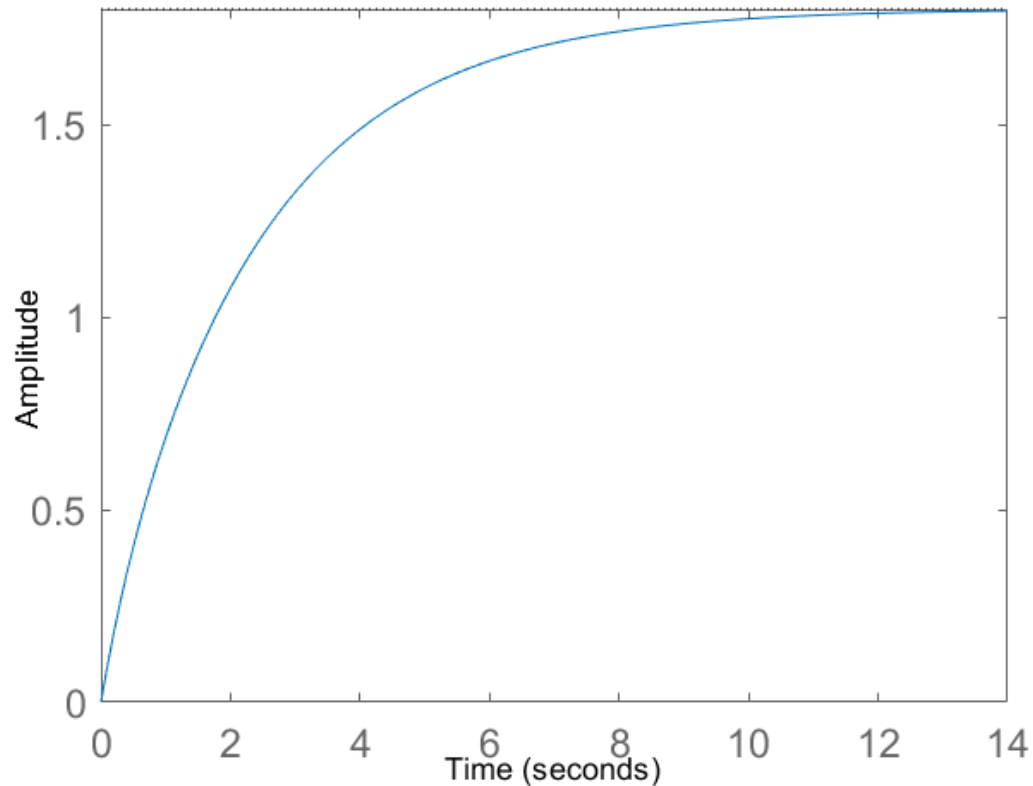
$$R_1 = 1\text{m}/(\text{m}^3\text{min})$$

$$R_2 = 0.8\text{m}/(\text{m}^3\text{min})$$

Λύση 2



Step Response



Δεδομένα:

$$A_1 = 1\text{m}^2$$

$$A_2 = 1.25\text{m}^2$$

$$R_1 = 1\text{min/m}^2$$

$$R_2 = 0.8\text{min/m}^2$$

Τιμές:

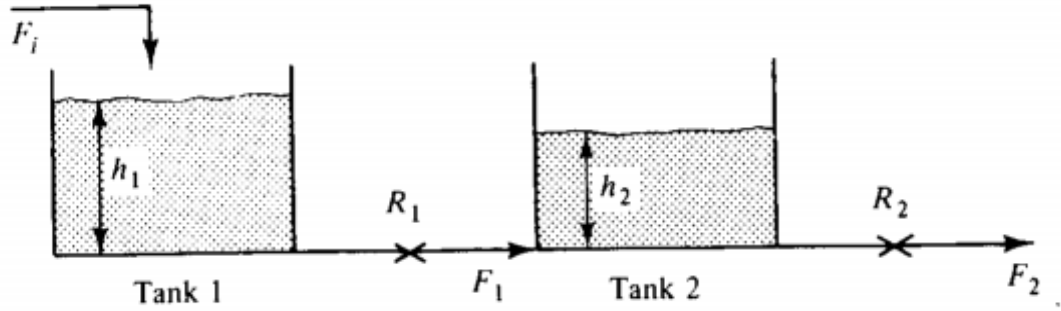
$$h_1(0) = 18.00\text{m}$$

$$h_1(1) = 18.69\text{m}$$

$$h_1(4) = 19.49\text{m}$$

$$h_1(\infty) = 19.80\text{m}$$

Λύση 2



Δεδομένα:

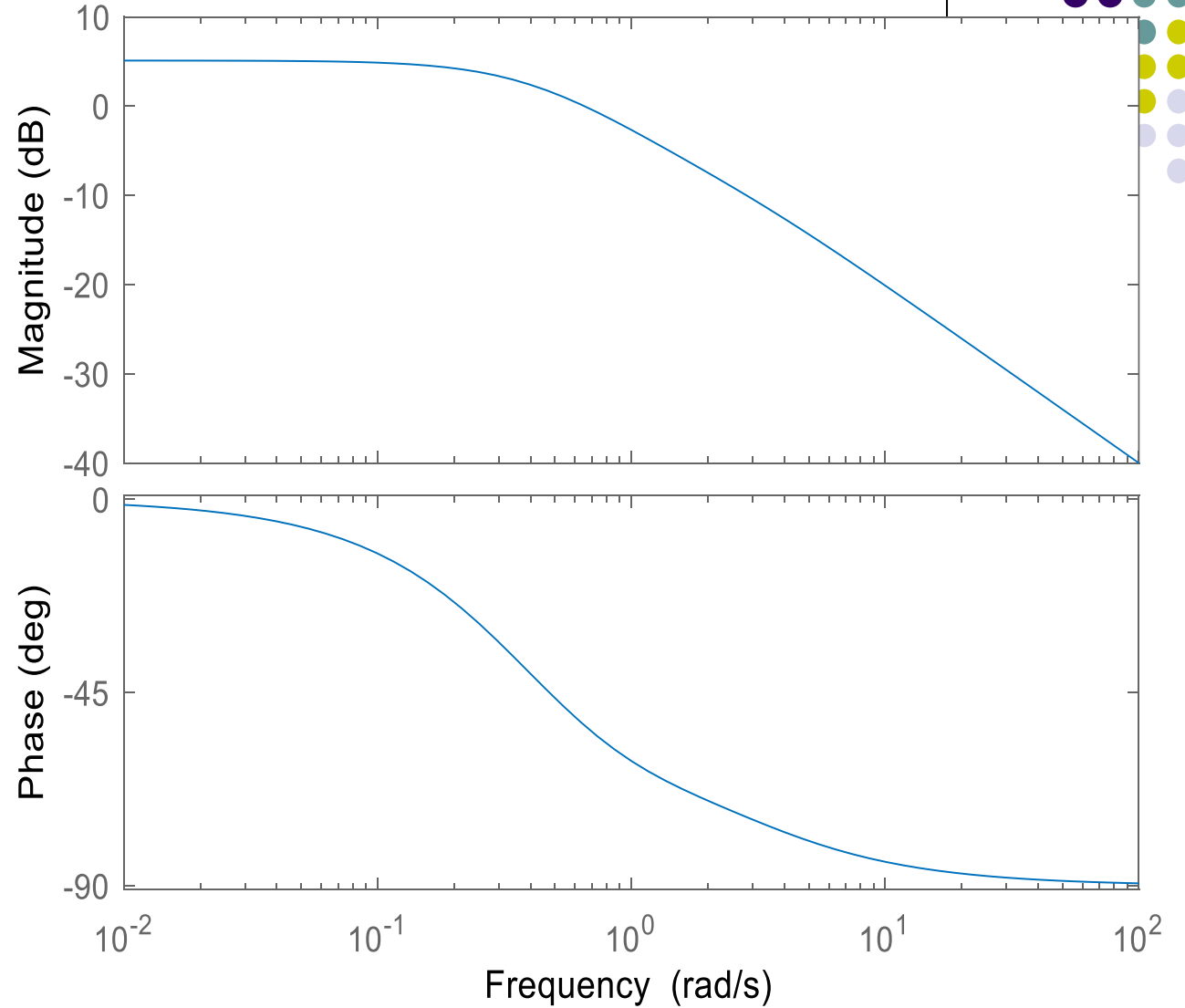
$$A_1 = 1\text{m}^2$$

$$A_2 = 1.25\text{m}^2$$

$$R_1 = 1\text{min/m}^2$$

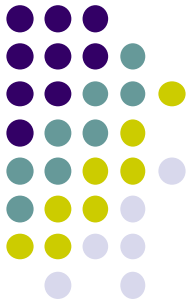
$$R_2 = 0.8\text{ min/m}^2$$

Bode Diagram



Συστήματα 2^{ης} Τάξης

Βηματική Απόκριση: (υπο-αποσβενούμενη απόκριση)



Υπέρβαση: $\frac{B}{D} = \exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$

$$Y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\frac{t}{\tau}} \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\frac{t}{\tau} + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

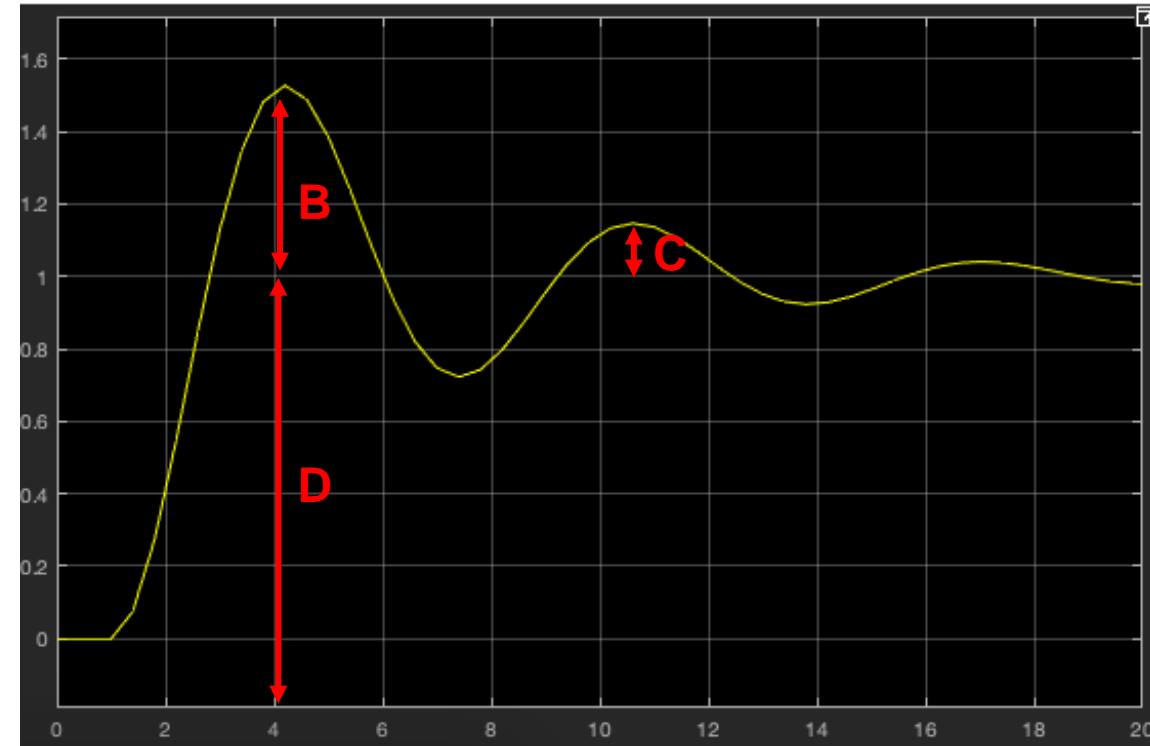
Λόγος Απόσβεσης: $\frac{C}{B} = \exp\left(\frac{-2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$

Περίοδος Ταλάντωσης: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}$

Φυσική συχνότητα: $\omega_n = \frac{1}{\tau}$

Χρόνος Ανύψωσης: $t_{rise} = \tau \frac{\pi - \varphi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ $\varphi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

Χρόνος μέγιστης απόκρισης: $t_p = \tau \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$



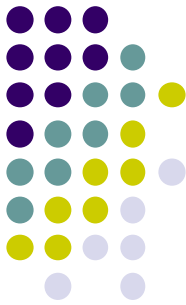
Άσκηση 3

Βηματική είσοδος με βήμα 4 εισάγεται σε σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{10}{s^2 + 1.6s + 4}$$

Να υπολογίσετε

- (α) την % υπέρβαση
- (β) τον χρόνο ανύψωσης
- (γ) τη μέγιστη τιμή της απόκρισης
- (δ) την τελική τιμή της εξόδου
- (ε) την περίοδο της ταλάντωσης



Λύση 3

Βηματική είσοδος με βήμα 4 εισάγεται στη ΣΜ

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{10}{s^2 + 1.6s + 4}$$

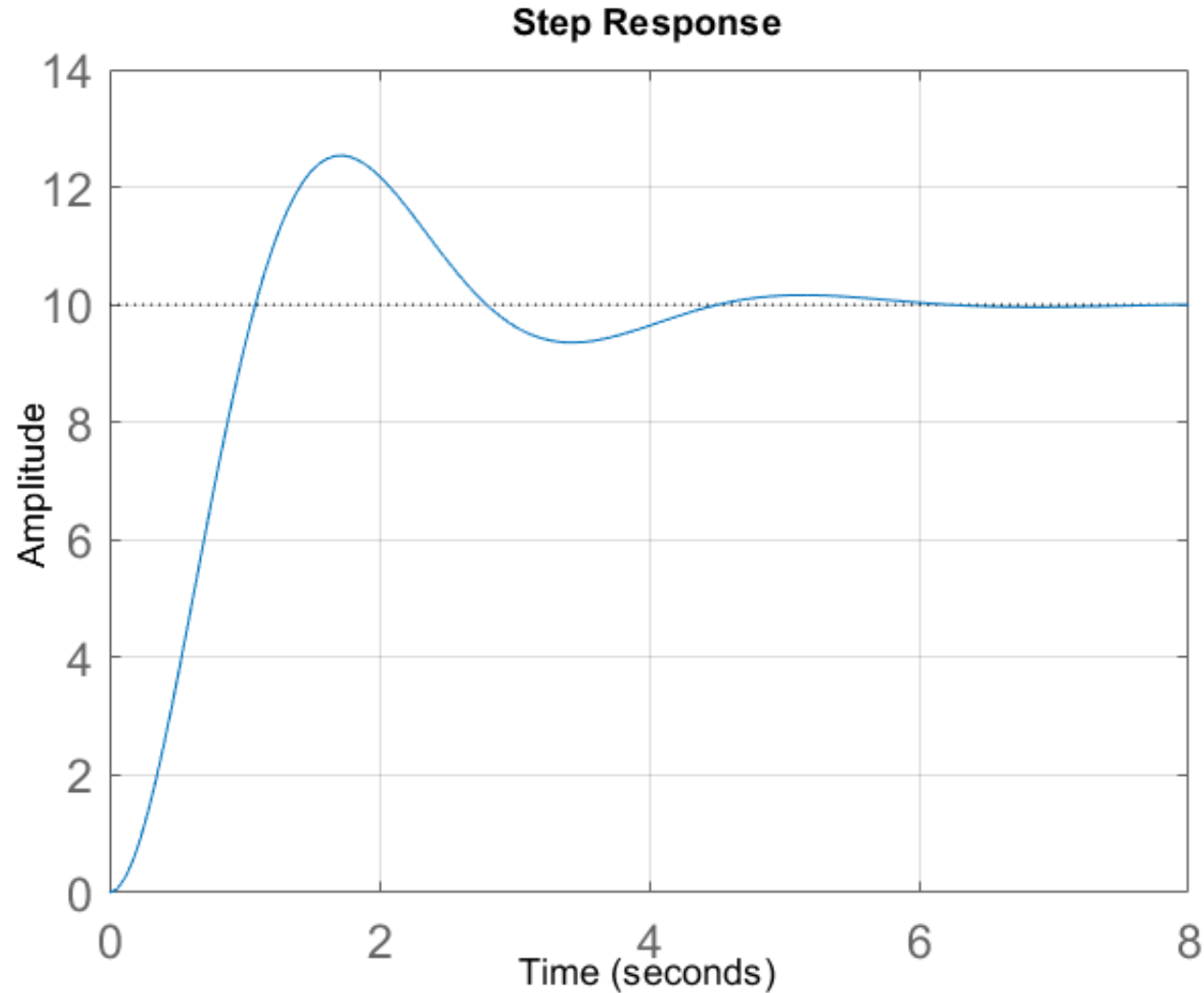
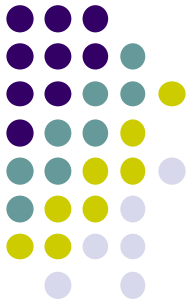


Table 13.4 Frequency-Response Characteristics of Important Process Transfer Functions

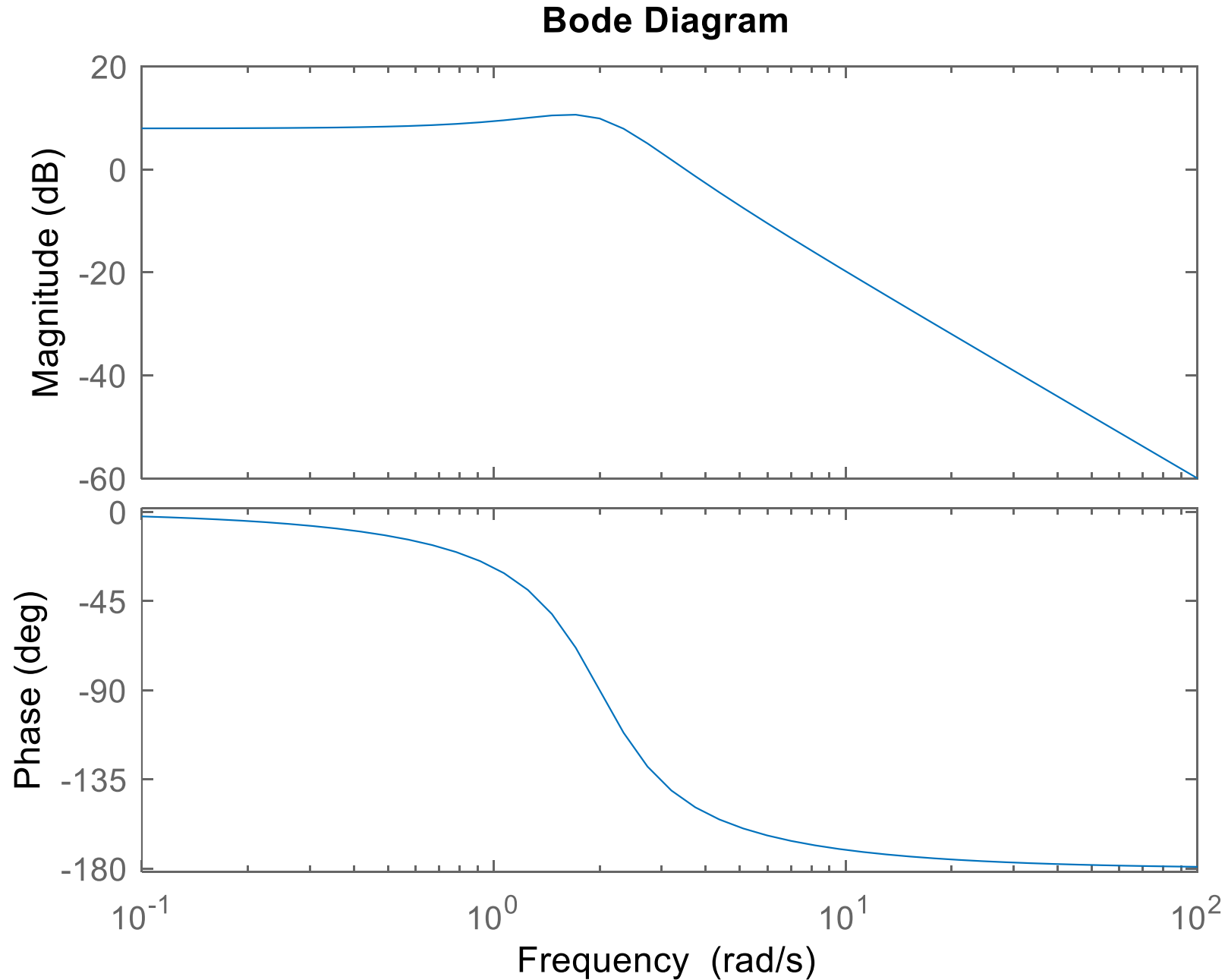
Transfer Function	$G(s)$	$AR = G(j\omega) $	Plot of $\log AR_N$ vs. $\log \omega$	$\phi = \angle G(j\omega)$	Plot of ϕ vs. $\log \omega$
1. First-order	$\frac{K}{\tau s + 1}$	$\frac{K}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}}$		$-\tan^{-1}(\omega\tau)$	
4. Overdamped second-order	$\frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$	$\frac{K}{\sqrt{(\omega\tau_1)^2 + 1} \sqrt{(\omega\tau_2)^2 + 1}}$		$-\tan^{-1}(\omega\tau_1) - \tan^{-1}(\omega\tau_2)$	
5. Critically damped second-order	$\frac{K}{(\tau s + 1)^2}$	$\frac{K}{(\omega\tau)^2 + 1}$		$-2 \tan^{-1}(\omega\tau)$	
6. Underdamped second-order	$\frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$	$\frac{K}{\sqrt{(1 - (\omega\tau)^2)^2 + (2\zeta\omega\tau)^2}}$		$-\tan^{-1}\left[\frac{2\zeta\omega\tau}{1 - (\omega\tau)^2}\right]$	



Λύση 3

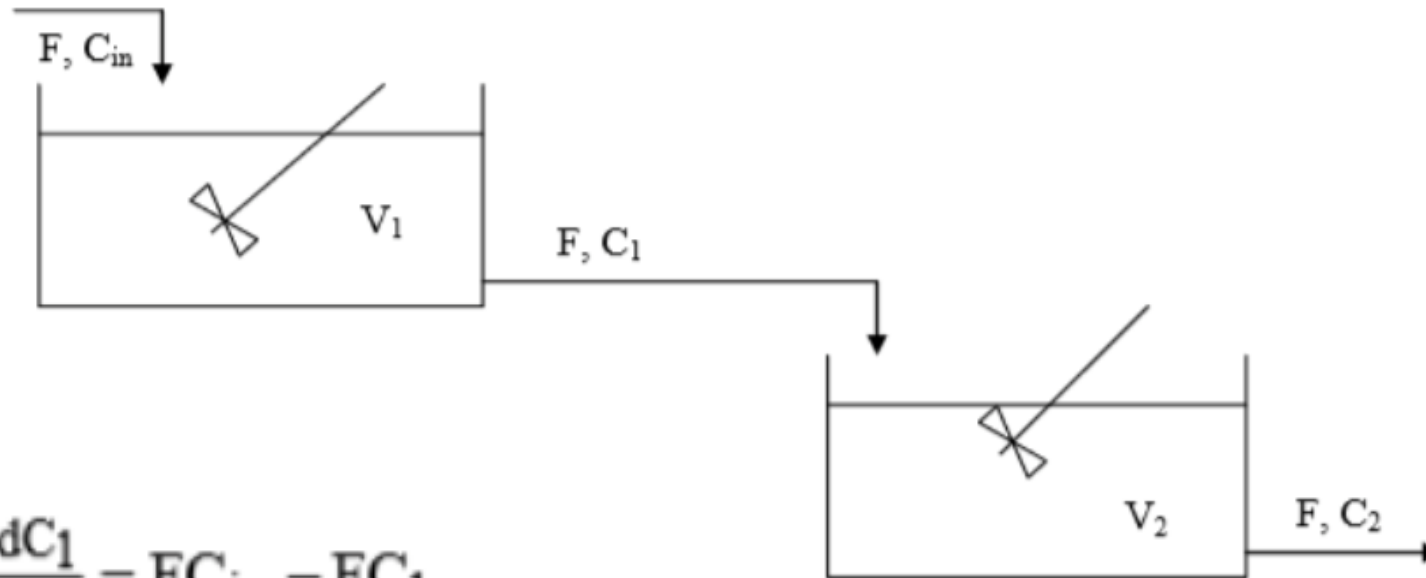
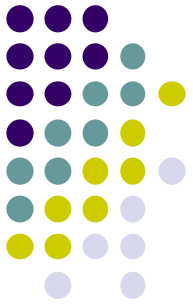
Ανάλυση ΣΜ

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{10}{s^2 + 1.6s + 4}$$



Άσκηση 4

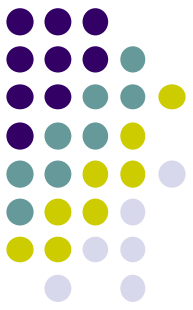
Για το παρακάτω σύστημα ανάδευσης να υπολογίσετε τις συγκεντρώσεις $C_1(t)$, $C_2(t)$ για τις ακόλουθες περιπτώσεις:



$$V_1 \frac{dC_1}{dt} = FC_{in} - FC_1$$

$$V_2 \frac{dC_2}{dt} = FC_1 - FC_2$$

$$\tau = \frac{V_1}{F} = \frac{V_2}{F} = 10 \text{ min}$$



- A₁) $C_{in}(t)=0$ (δηλ. η τροφοδοσία αποτελείται από καθαρό νερό)
 $C_1(0)=0$ (δηλ. στο δοχείο 1 υπάρχει καθαρό νερό)
 $C_2(0)=10 \text{ kg m}^{-3}$ (δηλ. υπάρχει κάποια ποσότητα χρωστικής ουσίας στο δοχείο 2).
- A₂) $C_{in}(t)=0$ (δηλ. η τροφοδοσία αποτελείται από καθαρό νερό)
 $C_1(0)=10 \text{ kg m}^{-3}$ (δηλ. στο δοχείο 1 υπάρχει ποσότητα χρωστικής ουσίας)
 $C_2(0)=0$ (δηλ. υπάρχει καθαρό νερό στο δοχείο 2).
- B) Τα δύο δοχεία αρχικά περιέχουν καθαρό νερό (δηλ. $C_1(0)=C_2(0)=0$) αλλά στην τροφοδοσία υπάρχει βηματική μεταβολή χρωστικής ουσίας μεγέθους $M=10 \text{ kg m}^{-3}$.
- Γ) Τα δύο δοχεία αρχικά περιέχουν καθαρό νερό (δηλ. $C_1(0)=C_2(0)=0$) αλλά στην τροφοδοσία υπάρχει παλμική μεταβολή χρωστικής ουσίας ύψους $H=10 \text{ kg m}^{-3}$ και διάρκειας $t_w=2.5 \text{ min}$.
- Δ) Τα δύο δοχεία αρχικά περιέχουν καθαρό νερό (δηλ. $C_1(0)=C_2(0)=0$) αλλά στην τροφοδοσία υπάρχει οριακή παλμική μεταβολή χρωστικής ουσίας μεγέθους ίσου με αυτού του ερωτήματος Γ.
- Ε) Τα δύο δοχεία αρχικά περιέχουν καθαρό νερό (δηλ. $C_1(0)=C_2(0)=0$) αλλά στην τροφοδοσία υπάρχει γραμμική μεταβολή χρωστικής ουσίας με κλίση $M=0.1 \text{ kg m}^{-3} \text{ min}^{-1}$.