Α.Σ.ΠΑΙ.Τ.Ε.

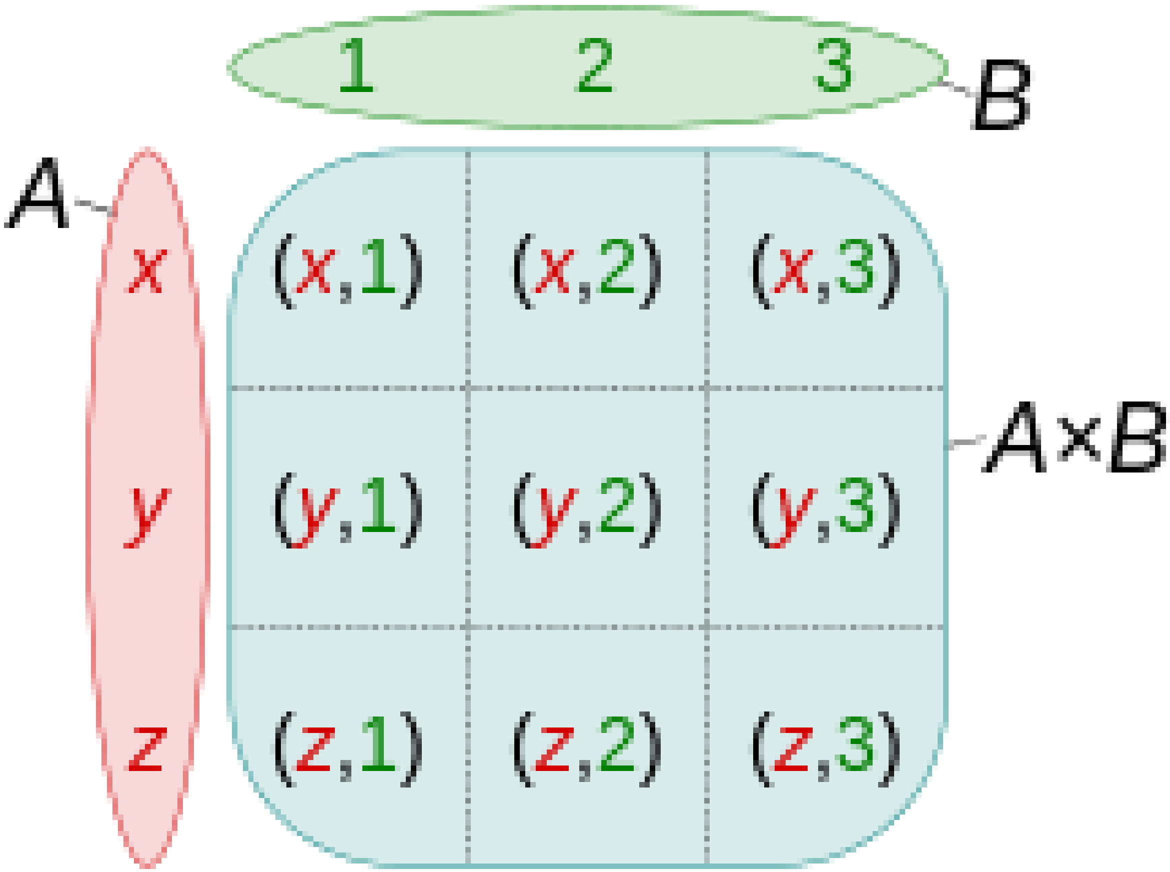
Angelos Giannoulas

Μαθηματικά Ι

Παιδαγωγικό Τμήμα

Angelos Giannoulas

Καρτεσιανό γινόμενο παράδειγμα



Angelos Giannoulas

Μονώνυμα

Έστω x μια **μεταβλητή** (μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο R).

Μονώνυμο του x είναι κάθε παράσταση της μορφής: $\alpha \cdot x^n$, όπου α ϵ R και n ένας θετικός ακέραιος.

Παράδειγμα: οι παραστάσεις: $7x^3$ $-32x^3$ $45x$

(και οι σταθεροί αριθμοί μπορούν να θεωρηθούν μονώνυμα του x εφόσον $x^0 =$, 1 π.χ. $-6 = -6 \cdot x^0$)

Angelos Giannoulas

Πολυώνυμα

Πολυώνυμο του x είναι κάθε παράσταση με την μορφή:

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

όπου $n \in Z+$ και $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R$.

Τα μονώνυμα $\alpha_n x^n$, $\alpha_{n-1} x^{n-1}$, …, $\alpha_1 x$, α_0 λέγονται **όροι** του πολυωνύμου ενώ οι αριθμοί α_n, …, α_1, α_0 **συντελεστές**.

Ο α_0 ονομάζεται και **σταθερός όρος** του πολυωνύμου.

<u>Παράδειγμα</u>: οι παραστάσεις είναι πολυώνυμα του x

$$-5x^7 - 2x^3 + x - 4$$

$$7x + 1$$

$$4x^3 - 4x^2 + 10$$

Angelos Giannoulas

Βαθμός & Ρίζα πολυωνύμου

Έστω $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$,

όπου $n \in Z+$ & $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R$

- Αν $\alpha_n \neq 0$, τότε ο βαθμός του πολυωνύμου είναι n (η μέγιστη δύναμη)

  (εξαίρεση αποτελεί ο βαθμός του μηδενικού πολυωνύμου που έχει οριστεί = **-**∞)

- **Ρίζα ρ του P(x)** είναι ένας αριθμός τέτοιος ώστε $P(\rho) = 0$

Angelos Giannoulas

Παράδειγμα πολυωνύμου

Έστω $P(x) = x^2 + 4x$

- Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου = ;
- Για x = ; είναι $P(x) = 0$

  (δηλ. ρίζα του πολυώνυμου P(x);)

Angelos Giannoulas

Απόλυτη τιμή

- **Ορισμός:** $|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \alpha < 0 \end{cases}$

- Ιδιότητες της απόλυτης τιμής
  - $|\alpha| = |-\alpha| = \sqrt{\alpha^2} \geq 0$
  - $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
  - $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$

- Αν $|x| < \beta \Leftrightarrow -\beta < x < \beta$

- $|\alpha - \beta|$ είναι η απόσταση μεταξύ α και β

- $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Angelos Giannoulas

Ορισμός γραμμικής εξίσωσης

Μία **εξίσωση** λέγεται **γραμμική** αν είναι της μορφής: $$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

όπου:

- $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ (οι συντελεστές/σταθερές)
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$ (οι μεταβλητές)

(οι μεταβλητές **είναι πάντα 1^{ου} βαθμού**
και ποτέ δεν εμφανίζονται ως ριζικά ή εκθέτες
ή ως συνθετικά άλλων συναρτήσεων)

Λύση της γραμμικής εξίσωσης είναι ένα σύνολο n $(t_1, t_2, \ldots t_n)$ διατεταγμένων στοιχείων που την επαληθεύουν

Angelos Giannoulas

Γραμμικά συστήματα n μεταβλητών

- Τα προηγούμενα παραδείγματα αφορούσαν γραμμικά συστήματα εξισώσεων με 2 αγνώστους (μεταβλητές) ή με 3 αγνώστους

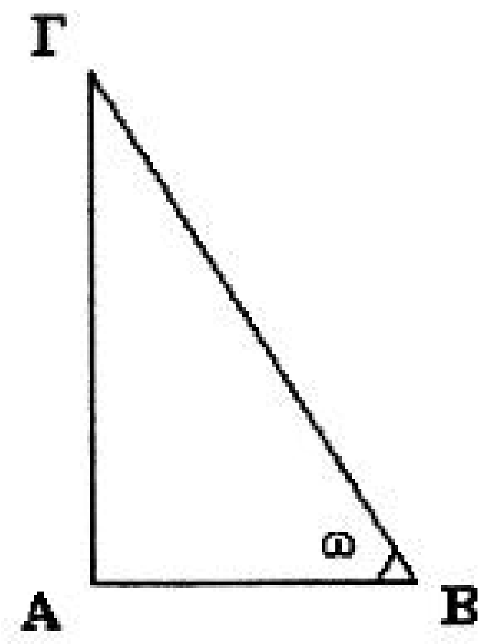
- Αποδεικνύεται ότι:

Σε κάθε σύστημα m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους (m x n) υπάρχει:

- **ή μία μοναδική λύση**
- **ή άπειρες λύσεις**
- **ή καμία λύση** (ασυμβίβαστο σύστημα)

Angelos Giannoulas

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας



$$\sin\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}$$

$$\cos\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}$$

$$\tan\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}}$$

sinθ = ημθ
cosθ = συνθ
tanθ = εφθ = απέναντι/προσκείμενη
cotθ = συφθ = προσκείμενη/απέναντι
secθ = τεμθ = υποτείνουσα/προσκείμενη
cscθ = στεμθ = υποτείνουσα / απέναντι

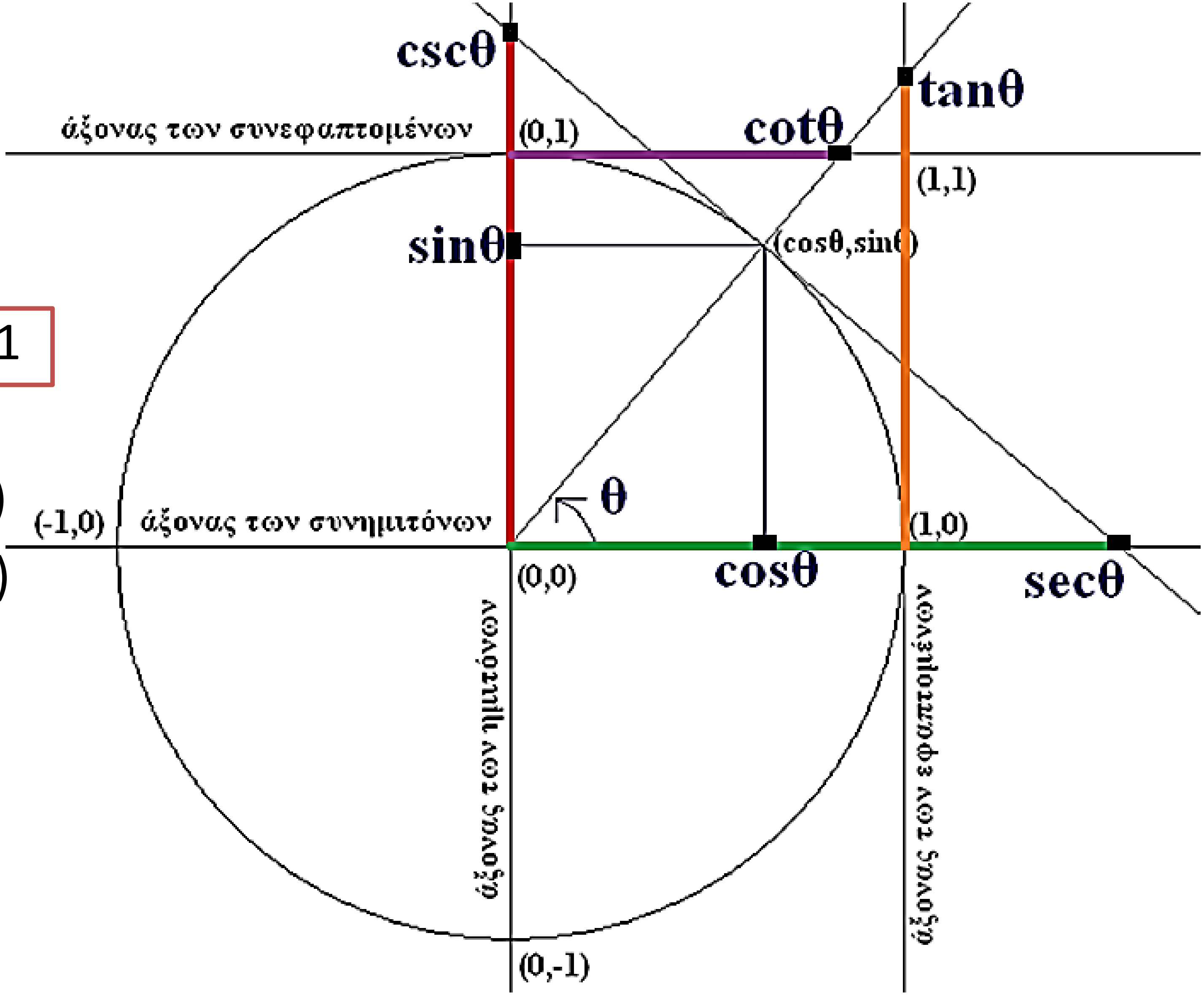
Angelos Giannoulas

Τριγωνομετρικός κύκλος

- $x = \cos(\theta)$
- $y = \sin(\theta)$
- $\tan(\theta) = y/x$

- $\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$

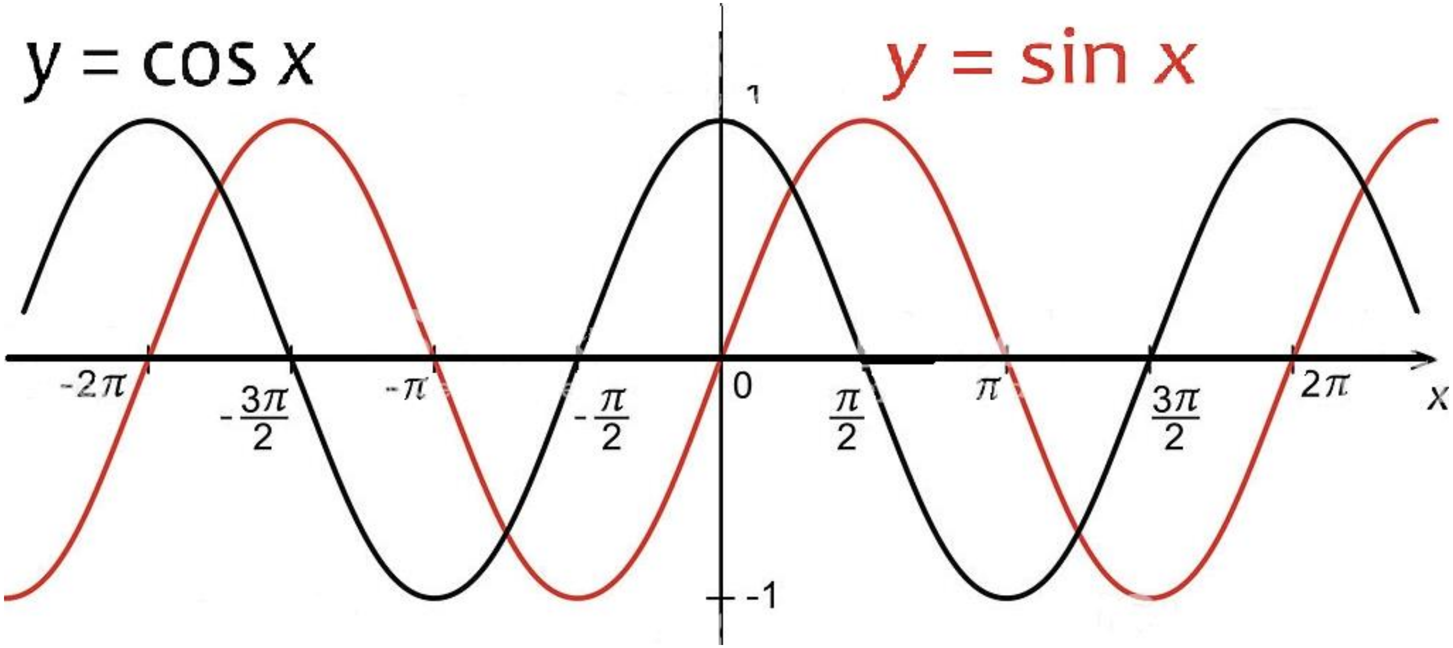
- $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
- $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$



sinθ = ημθ
cosθ = συνθ
tanθ = εφθ
cotθ =σφθ
secθ = τεμθ
cscθ = στεμθ

Angelos Giannoulas

Περιοδικότητα



- Κάθε μία από τις δύο τριγωνομετρικές συναρτήσεις επαναλαμβάνεται κάθε 2π
- Δηλ:
  - $\sin(t+2n\pi) = \sin t,\ n \in \mathbb{N}$
  - $\cos(t+2n\pi) = \cos t,\ n \in \mathbb{N}$
- Ο χρόνος της περιοδικότητας ονομάζεται «περίοδος» (π.χ. 2π στα παραπάνω)

Angelos Giannoulas

Βασικές ταυτότητες

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

Angelos Giannoulas

Μελέτη

Μαθηματικά Ι. Απειροστικός Λογισμός & Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Κεφάλαιο 0: «ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ»

σελ. 1 - 21

Angelos Giannoulas

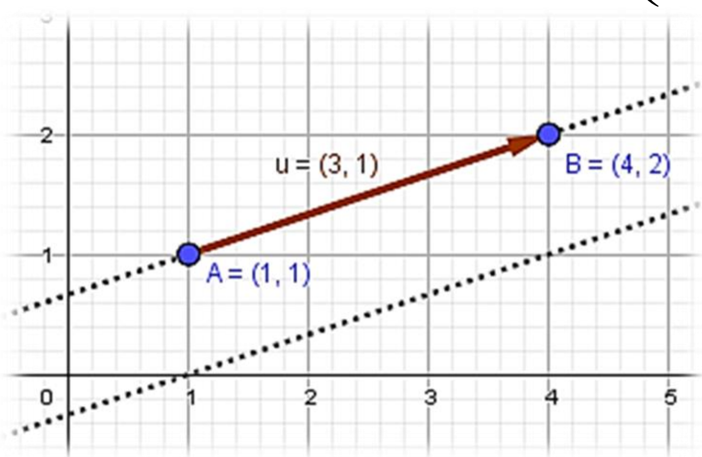
Γραμμική Άλγεβρα: Εισαγωγή

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Angelos Giannoulas

Τι μελετά η Γραμμική Άλγεβρα

- Είναι η περιοχή των Μαθηματικών που μελετά τους ‘διανυσματικούς χώρους’
- Τι είναι διάνυσμα λοιπόν;
  - Ένα ευθύγραμμο τμήμα που έχει ‘μέτρο’, ‘διεύθυνση’ & ‘φορά’ π.χ. το u=(2, 3) ή σε μορφή μήτρας $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
  - Σ’ έναν δισδιάστατο χώρο ένα διάνυσμα αποτελείται από 2 συντεταγμένες,
    - αντίστοιχα 3 σε 3διάστατο, κ.ο.κ.



Συχνά ένα διάνυσμα u συμβολίζεται και ως $\bar{u}$ ή ως $\vec{u}$

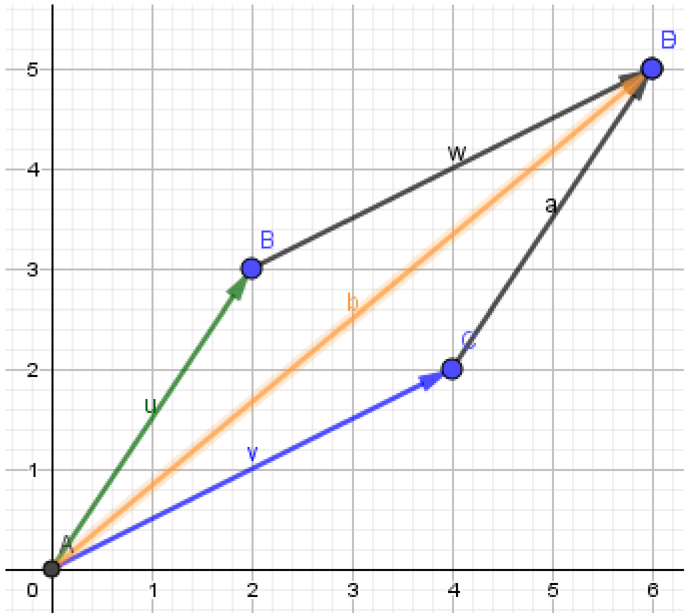
Angelos Giannoulas

Πρόσθεση διανυσμάτων

$$u+v=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$$

ή

$$u+v=(2,3)+(4,2)=(6,5)$$



Angelos Giannoulas

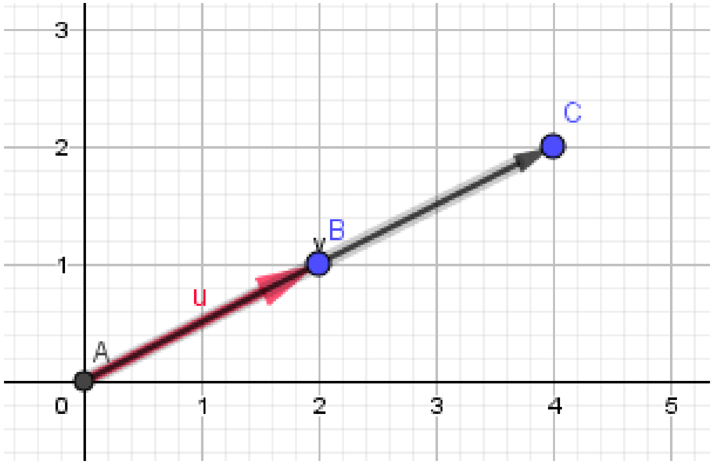
Βαθμωτό γινόμενο διανυσμάτων

Έστω $u = \mathrm{AB}$

$$2 \cdot u = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ή αλλιώς

$2 \cdot u = 2 \cdot (2, 1) = (4, 2) = \mathrm{AC}$



- Ερώτηση: Μπορεί το βαθμωτό γινόμενο να αλλάξει τα χαρακτηριστικά του διανύσματος;

Angelos Giannoulas

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Στο $\mathbb{R}^2$: αν $u=(u_1,u_2)$ και $v=(v_1,v_2)$
τότε $u \cdot v=u_1v_1+u_2v_2$

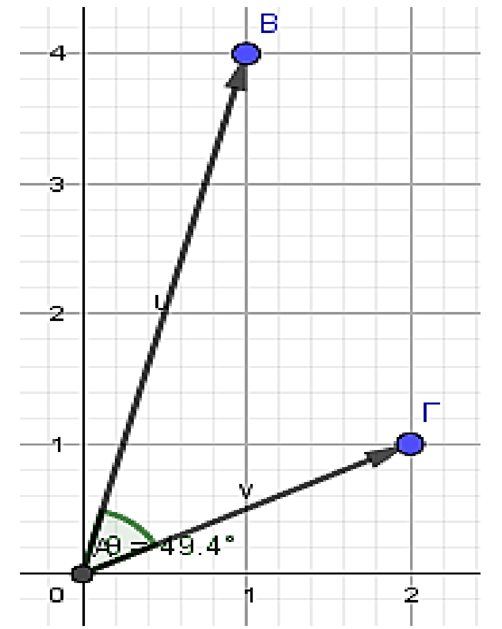
Στο $\mathbb{R}^3$: αν $u=(u_1,u_2,u_3)$ και $v=(v_1,v_2,v_3)$
τότε $u \cdot v=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$

Στο $\mathbb{R}^n$: αν $u=(u_1,u_2,\ldots u_n)$ και $v=(v_1,v_2,\ldots v_n)$
τότε $u \cdot v=u_1v_1+u_2v_2+\ldots +u_nv_n$

- $u \cdot u=u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2 = \|u\|^2$

Όπου $\|u\|$ το μέτρο του διανύσματος

- Επίσης $u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\theta)$
  όπου θ η γωνία των δύο διανυσμάτων



Αν το $u \cdot v=0$ τότε $\theta=90^o$

Angelos Giannoulas

Ο διανυσματικός χώρος …

Με το σύνολο των διανυσμάτων & με βασικές πράξεις αυτές που μόλις είδαμε, οδηγούμαστε στην μελέτη των διανυσματικών χώρων

(2-διάστατους, 3-διάστατους, … n-διάστατους)

… … …

& από την Γεωμετρία στην Γραμμική Άλγεβρα

Όταν θέλουμε να αναφερθούμε σε έναν διανυσματικό χώρο θέτουμε

1. **την διάσταση του χώρου** και
2. **Το ‘Σώμα’ από το οποίο παίρνουμε τις πράξεις και τους συντελεστές του βαθμωτού γινόμενου**

π.χ. το σώμα $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$

Angelos Giannoulas

Ο χώρος μελέτης μας

Από εδώ και στο εξής θα αναφερόμαστε στην διάσταση του χώρου και στο σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$

(εκτός και αν το προσδιορίζουμε διαφορετικά)

Angelos Giannoulas

Ασκήσεις

1. Τα επόμενα είναι διανύσματα; Σε ποια διάσταση; Γράψτε τα ως nx1 μήτρες.

   (1, -2), (3, 4, 5), (0, 0, 0), (-4, -3)

2. Αν ένα διάνυσμα u=(x-y, x+y, z-2) = (1, 7, 2) τότε x, y, z = ?

3. Βρείτε το u·v αν $\mathrm{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ $\mathrm{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

4. Έστω u=(1, k-2, 4, -k) και v=(3, 2, 2, 1). Ποια πρέπει να είναι η τιμή του k ώστε τα u, v να είναι κάθετα μεταξύ τους;

Angelos Giannoulas

Μήτρες
Ειδικές μήτρες

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Angelos Giannoulas

Το διάνυσμα ως μήτρα

- Είδαμε ότι ένα διάνυσμα $\mathrm{u} = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3)$ μπορεί να γραφεί και ως μήτρα 3x1,

  δηλ. μήτρα με <u>3 γραμμές</u> x <u>1 στήλη</u>: $\mathrm{u} = \begin{bmatrix} \mathrm{u}_1 \\ \mathrm{u}_2 \\ \mathrm{u}_3 \end{bmatrix}$

$$\mathrm{u} = \begin{array}{ll} \begin{bmatrix} \mathrm{u}_1 \\ \mathrm{u}_2 \\ \mathrm{u}_3 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 1^{\eta} \text{ γραμμή} \\ \leftarrow 2^{\eta} \text{ γραμμή} \\ \leftarrow 3^{\eta} \text{ γραμμή} \end{array} \end{array}$$

$\uparrow$ 1^{η} στήλη

Angelos Giannoulas

Μήτρα γραμμή / Μήτρα στήλη

- Μία μήτρα A_{1xn} λέγεται 'μήτρα γραμμή'

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \end{bmatrix}$$

- Όπως και σε ένα διάνυσμα, μία 'μήτρα στήλη', έχουμε όταν A_{mx1}

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \dots \\ \alpha_{m1} \end{bmatrix}$$

Angelos Giannoulas

Μήτρα

Μήτρα (ή πίνακας ή μητρώο) είναι ένα σύνολο στοιχείων/αριθμών που κατανέμονται σε μία διάταξη <u>m-γραμμών</u> x <u>n-στηλών</u>:

$$A=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 1^{\eta} \text{ γραμμή} \\ \\ \\ \leftarrow m \text{ γραμμή}\end{array} \\ \begin{array}{cc}\uparrow 1^{\eta}\text{ στήλη} & \uparrow n \text{ στήλη}\end{array} & \end{array}$$

Αν **m=n** τότε η Α λέγεται **τετραγωνική μήτρα** και συμβολίζεται A_m

Η Α συμβολίζεται συχνά A_{mxn} ή $A = [\alpha_{ij}]$ ή $A=\left[\alpha_{ij}\right]_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$

Angelos Giannoulas

Συμβολισμοί

- Ένα στοιχείο της μήτρας A_{mxn} προσδιορίζεται από την γραμμή του & την στήλη του, π.χ.
  - α_{ij} είναι το στοιχείο της $i^{ης}$ γραμμής / $j^{ης}$ στήλης

- Αν $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & \kappa & \lambda \end{pmatrix}$ τότε:
  - $\alpha_{12} = -2$
  - $\alpha_{33} = \lambda$
  - $\alpha_{32} = \kappa$

κ.ο.κ.

Angelos Giannoulas

Ισότητα μητρών

Δύο μήτρες A=$[\alpha_{ij}]$ και B=$[\beta_{ij}]$ ίδιων διαστάσεων mxn είναι ίσες αν:

$$\alpha_{ij} = \beta_{ij},$$

για κάθε $i=1,2, \dots m$ & $j=1,2, \dots n$

Άρα A = B όταν:

1. είναι ίσων διαστάσεων &
2. έχουν τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα

Angelos Giannoulas

Άσκηση

- Ποια τα κ & λ τέτοια ώστε Α = Β;

1. αν $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & \kappa & \lambda \end{pmatrix}$ $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 3 & -\kappa-\lambda & 4 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

2. αν $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 3 & \kappa+\lambda & 4 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & \kappa-\lambda \end{pmatrix}$

Angelos Giannoulas

Ειδικές μήτρες I

Μηδενική μήτρα: λέγεται η $A=[\alpha_{ij}]_{mxn}$ όταν $\alpha_{ij}=0$
για κάθε $i=1,2..m$ & $j=1,2..n$

Παραδείγματα:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

Ανάστροφη μήτρα A^T της $A=[\alpha_{ij}]_{mxn}$ λέγεται η $B=[\beta_{ji}]_{nxm}$ έτσι ώστε $\beta_{ji} = \alpha_{ij}$ για κάθε $i=1,2..m$ & $j=1,2..n$

Παράδειγμα:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}\\a_{12}&a_{22}\\a_{13}&a_{23}\end{pmatrix}$$

Angelos Giannoulas

Άσκηση

Βρείτε την ανάστροφη μήτρα των επόμενων μητρών:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -6 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Angelos Giannoulas

Ειδικές μήτρες ΙΙ

Αντίθετη μήτρα –Α της $A=[\alpha_{ij}]_{mxn}$ λέγεται η $B=[\beta_{ij}]_{mxn}$ όταν $\beta_{ij} = -\alpha_{ij}$ για κάθε $i=1,2..m$ & $j=1,2..n$

Παράδειγμα:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad -A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{pmatrix}$$

Μοναδιαία μήτρα I_n λέγεται η τετραγωνική μήτρα nxn τέτοια ώστε $\alpha_{ij} = 1$ αν $i=j$ και $\alpha_{ij} = 0$ για $i\neq j$ για κάθε $i=1,2...n$

Παραδείγματα:

$$I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Angelos Giannoulas

Ειδικές μήτρες ΙΙΙ

Έστω $A=[\alpha_{ij}]_{nxn}$ τετραγωνική μήτρα

- A άνω τριγωνική αν $\alpha_{ij} = 0$ για κάθε $i > j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

- A κάτω τριγωνική αν $\alpha_{ij} = 0$ για κάθε $i < j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- A διαγώνια αν $\alpha_{ij} = 0$ για κάθε $i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Angelos Giannoulas

Πρόσθεση μητρών

Έστω $A = [\alpha_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ ίδιων διαστάσεων mxn,

τότε $A+B = [\alpha_{ij} + \beta_{ij}]$, για κάθε $i=1,2..m$ & $j=1,2..n$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Όμοια ορίζεται και η αφαίρεση μητρών

Angelos Giannoulas

Βαθμωτό γινόμενο μητρών

Έστω A = $[\alpha_{ij}]_{mxn}$ και λ ένας αριθμός,

τότε $\lambda \cdot A = [\lambda \cdot \alpha_{ij}]$, για κάθε $i=1,2..m$ & $j=1,2..n$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = -2 \qquad \lambda \cdot A = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -14 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Angelos Giannoulas

Ασκήσεις

1) Αν $A=\begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 \\ 9 & 24 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ να υπολογίστε την $(-\frac{1}{3})\cdot A$

2) Αν $B=\begin{pmatrix} -3 & -6 & 3 \\ 12 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$ να υπολογίστε την $C = B + (-\frac{1}{3})\cdot A$

Angelos Giannoulas

Παραδείγματα γινομένου μητρών

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

Angelos Giannoulas

Παραδείγματα γινομένου μητρών

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

Angelos Giannoulas

Γινόμενο μητρών

Αν $A = [\alpha_{ij}]_{mxr}$ και $B = [\beta_{ij}]_{rxn}$ τότε

$$C = A \cdot B = [c_{ij}]_{mxn}$$

όπου c_{ij} είναι το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων της i γραμμής με τα αντίστοιχα της j στήλης

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1j} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2j} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_{r1} & \beta_{r2} & \dots & \beta_{rj} & \dots & \beta_{rn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & \dots & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & c_{ij} & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & \dots & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

ή

$$c_{ij} = \alpha_{i1} \cdot \beta_{1j} + \alpha_{i2} \cdot \beta_{2j} + \ldots.. + \alpha_{ir} \cdot \beta_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} \cdot \beta_{kj}$$

Angelos Giannoulas

Ασκήσεις

1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Angelos Giannoulas

Ασκήσεις$_2$

1. $$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = ?$$

2. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = ?$$

Τι παρατηρείτε από το αποτέλεσμα στην 2^{η} άσκηση;
Μπορείτε να εξάγετε ένα γενικό συμπέρασμα;

Angelos Giannoulas

Ερωτήσεις κατανόησης

Ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα …

1. για την πρόσθεση μητρών;

2. για το βαθμωτό γινόμενο μητρών;

3. για το γινόμενο μητρών;

Μια πράξη @ είναι αντιμεταθετική αν:
α @ β = β @ α

Angelos Giannoulas

Ιδιότητες πρόσθεσης και βαθμωτού γινόμενου μητρών

Πρόσθεση

- $A + B = B + A$
- $A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$
- $A + O = A$
- $A + (-A) = O$

όπου O η μηδενική μήτρα

Βαθμωτό γινόμενο

- $(\kappa + \lambda) \cdot A = \kappa \cdot A + \lambda \cdot A$
- $\kappa \cdot (A + B) = \kappa \cdot A + \kappa \cdot B$
- $\kappa \cdot (\lambda \cdot A) = (\kappa \lambda) \cdot A$
- $1 \cdot A = A$
- $(-1) \cdot A = -A$

Angelos Giannoulas

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού μητρών

Αν $A = [\alpha_{ij}]_{\nu x \kappa}$, $B = [\beta_{ij}]_{\kappa x \lambda}$, $\Gamma = [\gamma_{ij}]_{\lambda x \mu}$, $S = [s_{ij}]_{\kappa x \lambda}$ & $T = [\tau_{ij}]_{\kappa x \lambda}$ και α, β αριθμοί τότε ισχύουν οι ιδιότητες:

1. $I_\nu \cdot A = A \cdot I_\kappa$
2. $A \cdot (B \cdot \Gamma) = (A \cdot B) \cdot \Gamma$
3. $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B$

Προσεταιριστικές ιδιότητες

4. $A \cdot (B + S) = A \cdot B + A \cdot S$ ο πλ/σμός μητρών είναι 'αριστερά επιμεριστικός'
5. $(B + T) \cdot \Gamma = B \cdot \Gamma + T \cdot \Gamma$ ο πλ/σμός μητρών είναι 'δεξιά επιμεριστικός'
6. $O_{\lambda x \nu} \cdot A = O_{\lambda x \kappa}$
7. $A \cdot O_{\kappa x \mu} = O_{\nu x \mu}$

Όπου $O_{\lambda x \kappa}$ είναι η μηδενική μήτρα διάστασης λxκ …

Angelos Giannoulas

Άσκηση

Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

και C = O_2, τότε:

O_2: η μηδενική μήτρα 2x2

1. Να δείξετε ότι A · B = O
   Τι συμπεραίνετε; (παρότι B ≠ O_2 ≠ A)

2. Από το προηγούμενο έχουμε ότι A · B = A · C
   Τι συμπεραίνετε και πάλι για τις ιδιότητες των μητρών; (παρότι B ≠ C)

Angelos Giannoulas

Συμπέρασμα

Στους πραγματικούς αριθμούς ισχύουν τα επόμενα:

1. Αν $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma \Rightarrow \beta = \gamma$
2. Αν $\alpha \cdot \delta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{είτε } \alpha = 0 \\ \text{είτε } \delta = 0 \end{cases}$

Αυτές οι ιδιότητες ΔΕΝ ισχύουν στις μήτρες!

(η απόδειξη ονομάζεται με αντιπαράδειγμα)

Angelos Giannoulas

Αντίστροφη & Ιδιάζουσα μήτρα

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Angelos Giannoulas

Γιατί όμως μελετάμε τις μήτρες

Συνήθως τα επιστημονικά δεδομένα (παρατηρήσεις, αποτελέσματα πειραμάτων κ.λπ.) οργανώνονται σε γραμμές και σε στήλες, όπως ακριβώς στοιχίζονται τα στοιχεία σε μία μήτρα.

Ένα απλό παράδειγμα είναι και το επόμενο:

Όλες οι πληροφορίες για την επίλυση του συστήματος εξισώσεων:

$$\begin{cases} 5 \cdot x + 6 \cdot y = 3 \\ -3 \cdot x - y = 2 \end{cases}$$

μπορούν να δοθούν από την μήτρα: $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Και η επίλυση βέβαια μπορεί να γίνει πιο εύκολη με τη χρήση της μήτρας.

Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι οι μήτρες χρησιμοποιούνται αποκλειστικά για την επίλυση συστημάτων εξισώσεων, αντιθέτως ως μαθηματικές έννοιες συνοδεύονται από μια πλούσια σχετική θεωρία (την Γραμμική Άλγεβρα)

Angelos Giannoulas

Ορισμοί

- Έστω A, B τετραγωνικές μήτρες τ.ώ. $A \cdot B = B \cdot A$, τότε λέμε πως οι μήτρες A και B μετατίθενται

- Αν A_{nxn} τετραγωνική μήτρα.
  Ορίζουμε A^{ν}, $\nu \in Z^{+}$: $A^{\nu} = \begin{cases} I_n & \text{αν } \nu = 0 \\ A^{\nu-1} \cdot A & \text{αν } \nu \neq 0 \end{cases}$

- Έστω A_{nxn} τετραγωνική μήτρα. Αν υπάρχει B_{nxn} τ.ώ.
  $$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$
  τότε η B λέγεται αντίστροφη της A (συμβολίζεται A^{-1})
  (και η A λέγεται αντιστρέψιμη)

Παράδειγμα:

Να δείξετε ότι η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμη (είναι ιδιάζουσα)

Υπόδειξη: Θεωρείστε μία μήτρα B τ.ώ. $B \cdot A = I_2$

Angelos Giannoulas

Ασκήσεις

1. Είναι η τετραγωνική μήτρα B, αντίστροφη μήτρα της A;

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Να ελέγξετε το ίδιο για τις:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Angelos Giannoulas

Μοναδικότητα της A^{-1}

Θεώρημα:

Αν A αντιστρέψιμη τότε υπάρχει 1 και μόνο 1 B τ.ώ.

$$A \cdot B = B \cdot A = \mathrm{I}$$

Απόδειξη:

Έστω υπάρχει και άλλη μία $C \neq B$ τ.ώ. $A \cdot C = C \cdot A = \mathrm{I}$

Τότε $C = C \cdot \mathrm{I} = C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B = \mathrm{I} \cdot B = B$

Παράδειγμα:

Υπάρχει η A^{-1} της $A=\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$;

Υπόδειξη: Θεωρείστε μία B: $B \cdot A = I_2$
Στην συνέχεια ελέγξτε αν $A \cdot B = I_2$

'τέτοιο ώστε' = **τ.ώ.** = **:**
'1 και μόνο 1' = **1!**

Angelos Giannoulas

Ιδιότητες της αντίστροφης μήτρας

Έστω A_{mxm}, B_{mxm} αντιστρέψιμες. Τότε ισχύουν:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
3. $(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \ldots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot A_{n-1}^{-1} \cdot A_{n-2}^{-1} \ldots \cdot A_1^{-1}$
4. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

Απόδειξη:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_m \\ &\ \&\ (A^{-1})^{-1} \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} = I_m \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = (A^{-1})^{-1}$$

2) $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot I_m \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_m$

& όμοια $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = I_m$

3) αποδεικνύεται με επαγωγή για m

4) όμοια όπως η (3) συν την χρήση της προσεταιριστικής ιδιότητας

Angelos Giannoulas

Ασκήσεις

Α. Έστω η τετραγωνική μήτρα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Να βρείτε:

1. την A^2
2. την f(A) αν $f(x) = x^2 - 3x + 5$
3. την g(A) αν $g(x) = x^2 + 2x + 11$

Β. Αν τώρα $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

υπολογίστε την $(A - B)^2$

Angelos Giannoulas

Γραμμικά συστήματα σε μορφή μήτρας

Κάθε γραμμικό σύστημα μπορεί να γραφεί σε μορφή μητρών

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \Leftrightarrow$$

η μήτρα των μεταβλητών

η μήτρα των σταθερών

η μήτρα των συντελεστών

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

Angelos Giannoulas

Άσκηση

Δημιουργήστε τις μήτρες των συντελεστών, των μεταβλητών και των σταθερών όρων των επόμενων συστημάτων:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \\ x + 2y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 3y &= 7 \\ y &= \frac{1}{2}x + 3z + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

Angelos Giannoulas

Λύση της A · X = b με χρήση της $X = A^{-1} \cdot b$

Έστω το σύστημα n x n γραμμικών εξισώσεων

$A \cdot X = b$ με A_{nxn} αντιστρέψιμη

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ή σε μήτρες

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ a_{l1} & a_{l2} & \ldots & a_{lk} & \ldots & a_{lm} \\ \ldots & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_k \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_l \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Angelos Giannoulas

Λύση της $A \cdot X = b$ με χρήση της $X = A^{-1} \cdot b$ συνέχεια

Αφού A_{nxn} αντιστρέψιμη, τότε για κάθε n-διάστατο διάνυσμα b, το σύστημα $A \cdot X = b$ έχει μοναδική λύση την $X = A^{-1} \cdot b$

Απόδειξη:

Θα δ.ό. ότι η $X = A^{-1} \cdot b$ είναι λύση και είναι μοναδική!

a) $A \cdot (A^{-1} \cdot b) = (A \cdot A^{-1}) \cdot b = I_n \cdot b = b$, άρα X είναι λύση

b) Έστω υπάρχει και 2η λύση $X_1 \neq X \Rightarrow X_1 = A^{-1} \cdot b$

Από το (a) όμως $X = A^{-1} \cdot b$ επίσης, άρα $X = X_1$

Angelos Giannoulas

Ασκήσεις

A. Έστω το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{cases} 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 = 6 \\ 5 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 = 18 \end{cases}$$

1. Να δηλώσετε τις μήτρες A, X και b
2. Να βρείτε την λύση με χρήση της A^{-1}

B. Όμοια για το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 2 \\ x + 2y + 4z = 3 \end{cases}$$

Angelos Giannoulas

Ειδικές μήτρες IV

Έστω A_{nxn} τετραγωνική μήτρα

- Α Συμμετρική μήτρα αν $A^T = A$ π.χ. $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \delta & \varepsilon \\ \gamma & \varepsilon & \zeta \end{pmatrix}$

- Α Αντισυμμετρική μήτρα αν $A^T = -A$ π.χ. $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$

- Α Ορθογώνια αν $A^T \cdot A = A \cdot A^T = I_n$ π.χ. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  ή αλλιώς αν $A^T = A^{-1}$

Angelos Giannoulas

Ιδιότητες Ανάστροφης μήτρας

Έστω A_{mxn} , τότε ισχύουν τα επόμενα:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + \Delta)^T = A^T + \Delta^T$, όπου Δ_{mxn}
3. $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, όπου B_{nxs}
5. $(A^k)^T = (A^T)^k$, όπου $\kappa \in \mathbb{N}$
6. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Οι αποδείξεις αφήνονται ως άσκηση ….

Angelos Giannoulas

Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών μήτρας (ΣΜΓ)

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Angelos Giannoulas

Επαυξημένη μήτρα

Ορισμός:

Επαυξημένη (augmented matrix) ονομάζεται η μήτρα που περιέχει τα στοιχεία της μήτρας των συντελεστών συν αυτή των σταθερών όρων, π.χ. για ένα σύστημα A · X = b γραμμικών εξισώσεων m x n:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

μήτρα συντελεστών

μήτρα σταθερών

Αυτό που μας παρέχει η επαυξημένη μήτρα είναι μια ολοκληρωμένη παρουσίαση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων, για τις γραμμές & στήλες του, τις μεταβλητές και τους σταθερούς όρους του

Angelos Giannoulas

Παράδειγμα

Ποια είναι η επαυξημένη μήτρα του παρακάτω συστήματος γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Είναι η μήτρα: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

Angelos Giannoulas

Τι είναι οι ΣΜΓ μήτρας

Έστω A_{mxn}, ονομάζουμε ΣΜΓ (ή γραμμοπράξεις) οποιαδήποτε από τις επόμενες πράξεις στις γραμμές R_i της μήτρας:

Γραμμοπράξη	**Συμβολισμός**
1. Πολλαπλασιάζω την R_i με μία σταθερά κ	$R_i \longrightarrow \kappa \cdot R_i$
2. Εναλλάσσω την R_i με την R_j	$R_i \leftrightarrow R_j$
3. Προσθέτω στην R_j λ φορές την R_i	$R_j \longrightarrow R_j + \lambda \cdot R_i$

Γραμμοϊσοδύναμη μήτρα της A_{mxn} λέγεται η μήτρα B_{mxn} που έχει δημιουργηθεί μέσα από μία πεπερασμένη σειρά γραμμοπράξεων (συμβολ. $A \sim B$)

Στοιχειώδης μήτρα λέγεται μία γραμμοϊσοδύναμη της I_n

Angelos Giannoulas

Παραδείγματα

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to 3 \cdot R_1} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ η οποία είναι και <u>στοιχειώδης μήτρα</u> (από την I_2)

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Παρατήρηση: Κάθε γραμμοϊσοδύναμη μήτρα μπορεί να αποδοθεί επίσης αν πολλαπλασιάσουμε από τα αριστερά, την αρχική μήτρα με την αντίστοιχη στοιχειώδη

(δηλ. κάνουμε τις ίδιες γραμμοπράξεις στην μοναδιαία μήτρα και την στοιχειώδη που βρίσκουμε την πολλαπλασιάζουμε από αριστερά με την μήτρα)

Angelos Giannoulas

Γιατί να χρησιμοποιώ ΣΜΓ;

Γιατί με τις ΣΜΓ σε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων καταλήγουμε σε ένα άλλο ισοδύναμο, δηλ. οι λύσεις του είναι οι ίδιες με το αρχικό

Angelos Giannoulas

Ασκήσεις

Λύστε τα επόμενα γραμμικά συστήματα με ΣΜΓ

$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ -2x + 6y = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ -2x + 6y = 5 \end{cases}$$

Πώς λύνω;

Προσπαθώ μέσα από ΣΜΓ να φτάσω από την αρχική επαυξημένη μήτρα σε μία ίδιας τάξης όπου:

1. είτε την μετασχηματίζω σε άνω τριγωνική (δηλ. $\alpha_{ij} = 0$ για κάθε $i > j$)
   "μέθοδος απαλοιφή του Gauss"
   (Gaussian Elimination)
2. στην θέση της μήτρας των συντελεστών έχω ανοιγμένη κλιμακωτή* μήτρα
   "μέθοδος απαλοιφής Gauss – Jordan"

* βλ. επόμενο ορισμό

Angelos Giannoulas

Άσκηση

Λύστε το γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$
\begin{aligned}
x - 3y - 2z &= 6 \\
2x - 4y - 3z &= 8 \\
-3x + 6y + 8z &= -5
\end{aligned}
$$

Angelos Giannoulas

Λύση

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 6 \\ 2x - 4y - 3z &= 8 \\ -3x + 6y + 8z &= -5 \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 6 \\ 2y + z &= -4 \\ -3y + 2z &= 13 \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 6 \\ 2y + z &= -4 \\ 7z &= 14 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad x = 1, \quad y = -3, \quad z = 2$$

Βρείτε ποιοι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών έχουν γίνει:

Angelos Giannoulas

Άσκηση

Σας δίνεται η επόμενη μήτρα (επαυξημένη)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Ποιο είναι το γραμμικό σύστημα εξισώσεων που αφορά;
2. Ποια είναι η λύση του;

Υπόδειξη: Προσπαθήστε να έχετε την μοναδιαία μήτρα στην θέση της μήτρας των συντελεστών

(λύση: x=1, y=2, z=3)

Angelos Giannoulas

Λύση

Το σύστημα γραμμικών εξισώσεων είναι;

$$x + y + 2z = 9$$
$$2x + 4y - 3z = 1$$
$$3x + 6y - 5z = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -2 φορές την πρώτη γραμμή στη δεύτερη και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -3 φορές την πρώτη γραμμή στην τρίτη και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη γραμμή με 1/2 και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -3 φορές τη δεύτερη εξίσωση στην τρίτη και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή με -2 και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -1 φορά τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε $-\frac{11}{2}$ φορές την τρίτη γραμμή στην πρώτη και $\frac{7}{2}$ φορές την τρίτη γραμμή στην δεύτερη και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Δ. Δριβαλιάρης: Συστήματα γραμμικών εξισώσεων και πίνακες, Σημειώσεις Γραμμικής Άλγεβρας

Angelos Giannoulas

Άσκηση

Με την μέθοδο απαλοιφής του Gauss να δείξετε ότι το σύστημα γραμμικών εξισώσεων δεν έχει λύση

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 + 9x_4 &= 9 \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 + 17x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Angelos Giannoulas

Λύση

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - \ \ 2x_3 + \ \ 5x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 8x_2 - \ \ \ \ x_3 + \ \ 9x_4 &= 9 \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 + 17x_4 &= 7 \end{aligned}$$

$R_2 \rightarrow -2R_1+R_2$
$R_3 \rightarrow -3R_1+R_3$

$\longrightarrow$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= \ \ 4 \\ 2x_2 + 3x_3 - \ \ x_4 &= \ \ 1 \\ -4x_2 - 6x_3 + 2x_4 &= -5 \end{aligned}$$

$R_3 \rightarrow 2R_1+R_3$

$\longrightarrow$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -3$$

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο

Angelos Giannoulas

Κλιμακωτή μήτρα

Κλιμακωτή μήτρα M_{mxn} (echelon form matrix) λέγεται αν:

1. οι μηδενικές γραμμές βρίσκονται κάτω από τις μη - μηδενικές
2. το 1ο στοιχείο κάθε μη – μηδενικής γραμμής βρίσκεται σε στήλη δεξιότερα του 1ου μη -μηδενικού στοιχείου της προηγούμενης γραμμής

$$\pi.\chi. \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Το πρώτο στοιχείο κάθε μη – μηδενικής γραμμής λέγεται 'Ηγετικό στοιχείο'

- Αν τα ηγετικά στοιχεία μίας κλιμακωτής μήτρας είναι ίσα με την μονάδα, στην οποία στήλη τα υπόλοιπα στοιχεία είναι μηδενικά, τότε η μήτρα λέγεται 'Ανοιγμένη κλιμακωτή'

Angelos Giannoulas

Παραδείγματα

- Κλιμακωτές μήτρες: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Ανοιγμένες κλιμακωτές μήτρες $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Angelos Giannoulas

Άσκηση

1. Γιατί οι επόμενες μήτρες δεν είναι κλιμακωτές;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Γιατί οι επόμενες μήτρες δεν είναι ανοικτές κλιμακωτές;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Angelos Giannoulas

Θεώρημα μετατροπής μήτρας σε ανοιγμένη κλιμακωτή

Κάθε μήτρα μπορεί να μετατραπεί σε «ανοιγμένη κλιμακωτή» (άρα και κλιμακωτή) μετά από πεπερασμένο πλήθος στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών (γραμμοπράξεων)

Angelos Giannoulas

Κλιμακωτή & Ανοικτή μέσω ΣΜΓ

(Μέθοδος)

1. Βρίσκετε την 1η από αριστερά μη-μηδενική στήλη

2. Αν χρειάζεται, εναλλάξτε την 1η σειρά με κάποια άλλη ώστε το 1ο στοιχείο της στήλης στο (1) να είναι ≠ 0 (αν υπάρχει 1 προτιμήστε το)

3. Αν το 1ο στοιχείο αυτής της στήλης στο (1) είναι X, πολλαπλασιάστε την 1η γραμμή με 1/X (ώστε το 1ο στοιχείο να είναι 1)

4. Επιλέξτε προσθαφαιρέσεις στις επόμενες γραμμές, με πολλαπλάσιο της 1ης γραμμής, έ.ώ. να μηδενιστούν όλα τα στοιχεία κάτω από το 1

5. Μετά ξεχάστε την ύπαρξη της 1ης γραμμής και επαναλάβετε ανάλογα τα βήματα για τον πίνακα που μένει

6. Συνεχίστε έτσι ώστε να φέρετε τον αρχικό πίνακα σε κλιμακωτή μορφή.

7. Για **Ανοιγμένη Κλιμακωτή** προσθαφαιρώ τα πολλαπλάσια των γραμμών με ηγετικά στοιχεία το 1 ώστε να εξαλείψω αν υπάρχουν τα μη μηδενικά στοιχεία των στηλών τους (Gauss – Jordan απαλοιφή)

Angelos Giannoulas

Παράδειγμα μετατροπής σε κλιμακωτή

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Για ανοικτή κλιμακωτή θα προσθέσω στην 1η γραμμή (5*2η) & ανάλογα για τα στοιχεία της προτελευταίας στήλης

Άσκηση:
Σύμφωνα με την μέθοδο βρείτε τα βήματα των ΣΜΓ που έγιναν

σελ. 30-32: Anton, H. & Ropres, C. (2010), Elementary Linear Algebra, John Wiley & Sons

Angelos Giannoulas

Άσκηση

Να λύσετε το επόμενο σύστημα γραμμικών εξισώσεων με ΣΜΓ (μέθοδος απαλοιφής Gauss) φέροντας τον επαυξημένο πίνακα σε μορφή κλιμακωτής μήτρας

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 10 \\ 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 3x_4 + 10x_5 &= 7 \\ 3x_1 - 6x_2 + 10x_3 + 6x_4 + 5x_5 &= 27 \end{aligned}$$

Angelos Giannoulas

Λύση

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -4 & 8 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & -6 & 10 & 6 & 5 & 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 & -13 \\ 3 & -6 & 10 & 6 & 5 & 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 5 + 2s - 3t$$
$$x_2 = s$$
$$x_3 = -3 - 2t$$
$$x_4 = 7 + 4t$$
$$x_5 = t$$

βλ. βιβλίο σελ. 632

Angelos Giannoulas

Άσκηση

Να λύσετε το επόμενο σύστημα γραμμικών εξισώσεων με ΣΜΓ φέροντας τον επαυξημένο πίνακα σε μορφή ανοικτής κλιμακωτής μήτρας

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 12 \\
x_1 + 2x_2 \qquad\quad + 5x_4 &= 17 \\
3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= 31
\end{aligned}
$$

Angelos Giannoulas

Λύση

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 17 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 31 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 31 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-3)R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1)R_2 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad + 2x_3 - 3x_4 &= 7 \\ x_2 - \quad x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

$$x_3 = s \quad \text{και} \quad x_4 = t$$

$$x_1 = 7 - 2s + 3t$$

$$x_2 = 5 + \quad s - 4t$$

βλ. βιβλίο σελ. 637

Angelos Giannoulas

Θεώρημα αντιστρεψιμότητας

Μία τετραγωνική μήτρα A_m είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν A_m γραμμοϊσοδύναμη με την I_m

αν και μόνο αν : $\Leftrightarrow$

Εύρεση της A^{-1} μέσω ΣΜΓ

1. Δημιουργώ μία μήτρα που περιέχει και την A_m και την I_m
2. Κάνω γραμμοπράξεις έως ότου στην θέση της A_m έχω την I_m
3. Η μήτρα που υπάρχει στην θέση της I_m είναι η A^{-1}

ΠΡΟΣΟΧΗ

Αν στην αριστερή πλευρά εμφανιστεί γραμμή με μηδενικά στοιχεία, τότε η A_m δεν είναι αντιστρέψιμη

Angelos Giannoulas

Παράδειγμα

Έστω η μήτρα $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ Δημιουργώ την $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & \vdots & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 6 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & \vdots & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & \vdots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & \vdots & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_1}$$

Angelos Giannoulas

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & 2 & -3 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 5R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 & -9 \end{array}\right)$$

Το δεξί μέρος είναι η A^{-1}

Άσκηση:
Πώς μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι είναι πράγματι αυτή;

βλ. βιβλίο σελ. 659

Angelos Giannoulas

Ορίζουσες

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Angelos Giannoulas

Επισήμανση

Όλες οι μήτρες στις οποίες αναφερόμαστε στην συνέχεια είναι **τετραγωνικές**

εκτός και αν αναφερθεί διαφορετικά

Angelos Giannoulas

Ορισμός Ορίζουσας

Σε κάθε τετραγωνική μήτρα A_n αντιστοιχεί ένας αριθμός, η ορίζουσα της A και συμβολίζεται D(A) ή |A| ή detA

Ορίζουσα μίας A_1: Αν $A=[\alpha_{11}]$ μήτρα 1x1 , τότε $|A| = |\alpha_{11}| = \alpha_{11}$

Ορίζουσα μίας A_2 = $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ τότε $\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$

Πόρισμα: Αν A_n τετραγωνική μήτρα, τότε

$|A| \neq 0 \Leftrightarrow$ A αντιστρέψιμη

Angelos Giannoulas

Ασκήσεις

Βρείτε την ορίζουσα των επόμενων μητρών:

[-3] = ;

[5   -2   1] = ;

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} =;$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} =;$$

Angelos Giannoulas

Κανόνας του Cramer

(για συστήματα εξισώσεων 2x2)

Έστω το σύστημα $\begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1 \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2 \end{cases}$

ή αλλιώς σε μήτρες: $A \cdot X = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

1. **Αν A αντιστρέψιμη, τότε το $A \cdot X = b$ έχει μία λύση: $X = A^{-1} \cdot b$**
2. Από το προηγούμενο πόρισμα: **αν A αντιστρέψιμη, τότε |A| ≠ 0**

Ο **κανόνας του Cramer** για συστήματα εξισώσεων 2x2 μας λέει ότι:

$$x = \frac{\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{|A|} \qquad y = \frac{\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}{|A|}$$

Angelos Giannoulas

Κανόνας του Cramer

(για συστήματα εξισώσεων nxn)

Έστω το σύστημα γραμμικών εξισώσεων & A η μήτρα των συντελεστών α_{ij}

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1\nu}x_\nu = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2\nu}x_\nu = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\nu1}x_1 + \alpha_{\nu2}x_2 + \ldots + \alpha_{\nu\nu}x_\nu = \beta_\nu \end{cases}$$

Τότε ο κανόνας του Cramer μας λέει ότι:

1. **Αν |A| ≠ 0**

$$x_1 = \frac{\begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_\nu & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix}}{|\mathrm{A}|},\ x_2 = \frac{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu1} & \beta_\nu & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix}}{|\mathrm{A}|}, \ldots, x_\nu = \frac{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \beta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu1} & \cdots & \beta_\nu \end{pmatrix}}{|\mathrm{A}|}$$

2. **Αν |A|= 0 και $|A_{\beta i}|$ = 0 για όλα τα i=1,..,ν**

   τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (Αόριστο)

3. **Αν |A|= 0 και $|A_{\beta\kappa}|$ ≠ 0 για ένα τουλάχιστον 1 ≤ κ ≤ ν**

   τότε το σύστημα είναι αδύνατο και A μη αντιστρέψιμη μήτρα

Angelos Giannoulas

Ασκήσεις

1. Έστω το σύστημα $\begin{cases} 7 \cdot x + 8 \cdot y = 5 \\ 6 \cdot x + 9 \cdot y = 4 \end{cases}$

Να βρείτε τα x, y με τον κανόνα του Cramer

(Λύση: x = 13/15 & y = - 2/15)

2. Όμοια για το σύστημα $\begin{cases} 4 \cdot x - 3 \cdot y = 15 \\ 2 \cdot x + 5 \cdot y = 1 \end{cases}$

(Λύση: x = 3 & y = - 1)

Angelos Giannoulas

Ορίζουσα 3^{ης} τάξης

μέθοδος Sarrus

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

- - - + + +

Έστω A3 (τετραγωνική μήτρα 3x3), τότε:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Παράδειγμα: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det(A) =$$
$$2(5)(4)+1(-2)(1)+1(-3)(0)-1(5)(1)-(-3)(-2)(2)-4(1)(0)$$
$$= 40 - 2 + 0 - 5 - 12 - 0 = 21$$

Angelos Giannoulas

Ασκήσεις

- Βρείτε την ορίζουσα της μήτρας B_3

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

(Λύση: 81)

- Όμοια για την επόμενη

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

(Λύση: 55)

Angelos Giannoulas

Αλγεβρικό συμπλήρωμα στοιχείου μήτρας 3ης τάξης

Ορισμοί: Έστω ένα στοιχείο $α_{ij}$ μίας μήτρας A_3

- Ελάσσονα ορίζουσα (minor) A_{ij} του $α_{ij}$ είναι η ορίζουσα που προκύπτει αν παραλείψουμε την i-γραμμή & την j-στήλη
- Αλγεβρικό συμπλήρωμα (ή Συμπαράγουσα) (cofactor) ενός στοιχείου αij της A_3, είναι ο αριθμός $(-1)^{i+j} \cdot A_{ij}$

Παράδειγμα: $\text{Αν } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

- Ελάσσονα ορίζουσα του $α_{12}$: $A_{12} = \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$

- Αλγεβρικό συμπλήρωμα του $α_{12}$: $(-1)^{1+2} \cdot A_{12} = - A_{12}$

Angelos Giannoulas

Ορίζουσα μήτρας 3ης τάξης
(μέθοδος Laplace)

Ορίζουσα 3ης τάξης μήτρας είναι ο αριθμός που προκύπτει από το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων μίας γραμμής (ή μίας στήλης) με τα αντίστοιχα αλγεβρικά τους συμπληρώματα

Η μέθοδος γενικεύεται και για μήτρες nxn

Παράδειγμα: Στην Α του προηγούμενου παραδείγματος,

$$|\mathrm{A}| = a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\cdot \mathrm{A}_{11} + a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\cdot \mathrm{A}_{12} + a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\cdot \mathrm{A}_{13}$$

$$\mathrm{A}_{11} = \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \mathrm{A}_{12} = \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \mathrm{A}_{13} = \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Angelos Giannoulas

Παράδειγμα

Να βρεθεί η ορίζουσα της τελευταίας άσκησης

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2 - 15) - 2(-4 + 0) + 3(20 + 0) = -13 + 8 + 60 = 55$$

Angelos Giannoulas

Ασκήσεις

Να βρείτε την ορίζουσα με την μέθοδο Laplace των μητρών

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(Λύση: 38)

Angelos Giannoulas

Ιδιότητες ορίζουσας

1. Αν Β μήτρα που προκύπτει από την **εναλλαγή 2 γραμμών (ή στηλών)** της Α, τότε: **|Β| = -|Α|**
2. Αν Β προκύπτει από το γινόμενο μιας γραμμής (ή στήλης) της Α με έναν αριθμό λ, τότε: $|B| = \lambda \cdot |A|$
3. Αν λ αριθμός, τότε: $|\lambda \cdot A| = \lambda^n \cdot |A|$ (αν $A_{n\times n}$)
4. Αν η Α έχει 2 γραμμές (ή στήλες) ίσες, τότε: $|A|=0$
5. Αν η Α έχει μηδενική γραμμή ή στήλη, τότε $|A| = 0$
6. Αν η Β προκύπτει από την **αντικατάσταση μιας γραμμής (ή στήλης) με την προστιθέμενη σε αυτή πολλαπλάσιο άλλης**, τότε: **|Β| = |Α|**
7. Αν Α, Β ίδιας τάξης, τότε: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
8. $|A| = |A^T|$
9. Αν Α αντιστρέψιμη, τότε: $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A^{-1}| = 1/|A|$
10. Η ορίζουσα μιας τριγωνικής μήτρας ισούται με το γινόμενο της διαγωνίου

βλ. αποδείξεις στο βιβλίο σελ. 669

Angelos Giannoulas

Παράδειγμα

(χρήσης των ιδιοτήτων)

Έστω η μήτρα $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{bmatrix}$

Δεν υπάρχουν μηδενικά στοιχεία ώστε να απλοποιείται ο υπολογισμός της ορίζουσας, άρα οι πράξεις μας θα είναι πολλές. Αν όμως την $6^{η}$ ιδιότητα ώστε να «εξαφανίσουμε» τα 2 πρώτα στοιχεία της $3^{ης}$ στήλης (προσθέτουμε $2*(1^{η})$ στήλη στην $3^{η}$), άρα:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 10 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= (+7) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 35.$$

βλ. βιβλίο σελ. 670

Angelos Giannoulas

Παράδειγμα

(χρήσης των ιδιοτήτων)

Έστω η ορίζουσα $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 10 \end{vmatrix}$

Από την $6^η$ ιδιότητα μπορούμε να προσθέσουμε την $1^η$ γραμμή στην $2^η$ και να αφαιρέσουμε την 2* ($1^η$) γραμμή από την τρίτη, άρα θα έχουμε μια τριγωνική μήτρα με ένα 0 στην κύρια διαγώνιο (βλ. ιδιότητα 10):

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Μήπως θα μπορούσαμε να κάνουμε ένα άλλο βήμα και να έχουμε την απάντηση χωρίς να κάνουμε πράξεις;

βλ. βιβλίο σελ. 670

Angelos Giannoulas

Προσαρτημένη μήτρα (adjoint)

Προσαρτημένη μήτρα της Α (adjA) είναι η ανάστροφη της μήτρας που έχει ως στοιχεία τα αλγεβρικά συμπληρώματα της Α,

δηλ. $\text{adj}A = [A_{ij}]^T = [A_{ji}]$

Παράδειγμα / Άσκηση (ως επαλήθευση):

$$\text{Αν } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{τότε } \left[A_{ij}\right] = \begin{pmatrix} -17 & -11 & 18 \\ 19 & 14 & -15 \\ 10 & 15 & -14 \end{pmatrix} \text{ και } \left[A_{ij}\right]^T = \begin{pmatrix} -17 & 19 & 10 \\ -11 & 14 & 15 \\ 18 & -15 & -14 \end{pmatrix}$$

Angelos Giannoulas

Άσκηση

Βρείτε την προσαρτημένη μήτρα της Α, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Angelos Giannoulas

Λύση

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -11$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

Angelos Giannoulas

Θεώρημα εύρεσης A^{-1} με την adjA

Αν Α αντιστρέψιμη μήτρα, τότε:

$$A^{-1} = \frac{\left[A_{ij}\right]^T}{|A|} = \frac{\mathrm{adj}A}{|A|}$$

Άσκηση

Από προηγούμενη άσκηση βρήκαμε ότι για $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

|A|=29

Να βρείτε την $A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}A}{29}$

Angelos Giannoulas

Άσκηση

Σε προηγούμενο παράδειγμα $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

βρήκαμε την προσαρτημένη μήτρα $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$

Βρείτε την A^{-1}

Angelos Giannoulas

Λύση

Η Α έχει αντίστροφη μήτρα εφόσον η ορίζουσά της είναι ≠ 0

$$\det(A) = -40 + 6 + 0 - 16 + 4 + 0 = -46$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\operatorname{adj} A) =$$

$$-\frac{1}{46}\begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{23} & \frac{11}{46} & \frac{5}{23} \\ -\frac{1}{23} & -\frac{7}{23} & \frac{2}{23} \\ -\frac{2}{23} & -\frac{5}{46} & \frac{4}{23} \end{bmatrix}$$

Angelos Giannoulas

Θεώρημα γινομένου οριζουσών

Θεώρημα: Αν A και B είναι τετραγωνικές n x n μήτρες, τότε:

$$|A| \cdot |B| = |A \cdot B|$$

Πόρισμα: Ισχύει ότι αν A αντιστρέψιμη τότε $A \cdot A^{-1} = I_n$

Τότε από το θεώρημα έχουμε ότι:

$$|A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Leftrightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Angelos Giannoulas

Ορίζουσες & Γραμμικά συστήματα εξισώσεων

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Angelos Giannoulas

Άσκηση

- Βρείτε με χρήση των οριζουσών τον όγκο του τετράεδρου που ορίζεται από τα διανύσματα:

  $A_1(2,2,-1)$, $A_2(1,3,0)$ και $A_3(-1,1,4)$

- Πόσο θα γίνει ο όγκος αν το A_3 μετακινηθεί στο (-201, -199, 104);

Λύση: α) 2
β) 2

Angelos Giannoulas

Βαθμός μήτρας

Βαθμός μιας μήτρας A (rank(A)) είναι ο μέγιστος αριθμός γραμμικών ανεξάρτητων διανυσμάτων (στηλών)

Υπενθύμιση: Σε έναν διανυσματικό χώρο m διάστασης, τα διανύσματα $\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3+ \ldots +\upsilon_\kappa$ είναι γραμμικώς **εξαρτημένα** αν υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\lambda_\kappa$, όχι όλοι μηδέν:

$$\lambda_1 \cdot \upsilon_1 + \lambda_2 \cdot \upsilon_2 + \ldots + \lambda_\kappa \cdot \upsilon_\kappa = 0 \quad (1)$$

(ή ότι ένα από αυτά μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων)

Θα λέμε ότι είναι γραμμικώς **ανεξάρτητα** αν στην (1) $\lambda_i = 0$ για κάθε i

δηλ. η ορίζουσα των διανυσμάτων ≠ 0

Angelos Giannoulas

Εύρεση βαθμού μήτρας

- **1^{ος} τρόπος**: Με ΣΜΓ έως ότου βρούμε τον μέγιστο αριθμό γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων (των γραμμών ≠ 0 σε κλιμακωτή μορφή ή ανοιγμένη κλιμακωτή)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{άρα rank(A)} = 3$$

- **2^{ος} τρόπος**:

Με την μέγιστη σε τάξη ορίζουσα ≠ 0 (ελέγχουμε τις ελάσσονες ορίζουσες)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad |\mathrm{A}|=0 \ \text{ ενώ } \ \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 1 \neq 0, \ \text{άρα} \ \ \mathrm{rank(A)}=3$$

Άσκηση: Επαληθεύστε τα παραπάνω

Angelos Giannoulas

Ασκήσεις

1. rank(I_3) = ;
2. rank(O) = ;
3. rank(I_n) = ;
4. Ποιο το rank(A) ; $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
   Αν η τελευταία γραμμή ήταν 1 1 0 1, ποιο το rank(A);
5. Ποιο το rank(A) ; $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Υπόδειξη: Προσπαθήστε να την φέρετε με ΣΜΓ σε 'Ανοιγμένη κλιμακωτή μορφή'

Angelos Giannoulas

Γραμμικά συστήματα εξισώσεων

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Angelos Giannoulas

Υπενθύμιση

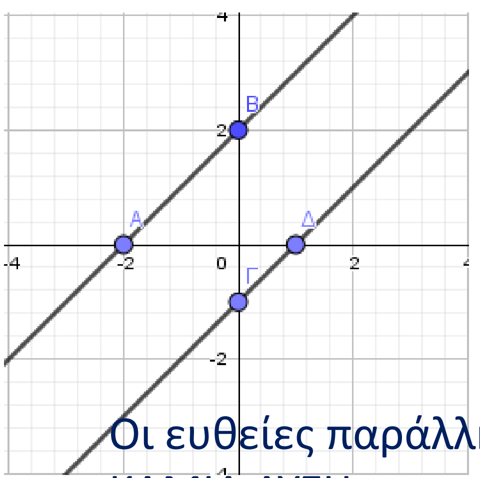
Στο Λύκειο εργαστήκαμε στην επίλυση γραμμικών συστημάτων δύο & τριών μεταβλητών (αγνώστων)

- Η γραμμική εξίσωση 2 μεταβλητών, x, y είναι της μορφής:

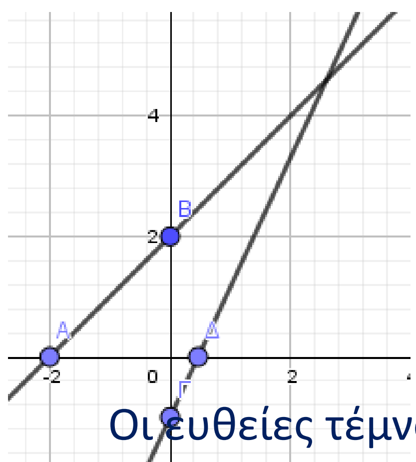
  $a \cdot x + b \cdot y = c$ (a, b σταθερές, όχι και οι 2 μηδέν)

- Είναι η εξίσωση ευθείας στο επίπεδο (2-διάστατος χώρος)

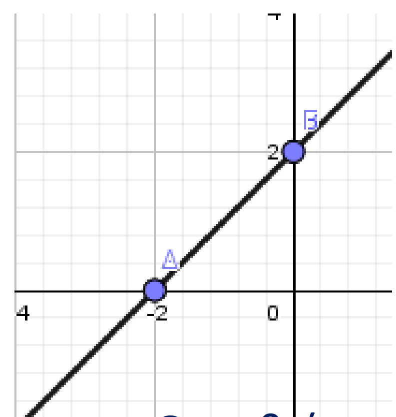
- Άρα για το σύστημα $\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \end{cases}$ υπάρχουν 3 πιθανές λύσεις



Οι ευθείες παράλληλες:
ΚΑΜΙΑ ΛΥΣΗ



Οι ευθείες τέμνονται:
ΜΙΑ ΛΥΣΗ ΜΟΝΑΔΙΚΗ



Οι ευθείες συμπίπτουν:
ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Angelos Giannoulas

Υπενθύμιση (συνέχεια)

Το σύστημα $\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \quad (\mathrm{I}) \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \quad (\mathrm{II}) \end{cases}$

έχει λύσεις ΟΛΑ τα ζευγάρια (x, y) τ.ώ. επαληθεύουν και την (I) και την (II)

- Αν ένα σύστημα έχει έστω 1 λύση λέγεται **Συμβιβαστό σύστημα**
- Αν δεν έχει καθόλου λύσεις, λέγεται **Ασυμβίβαστο σύστημα**

Angelos Giannoulas

Υπενθύμιση (συνέχεια)

- Όμοια η γραμμική εξίσωση 3 μεταβλητών x, y, z είναι της μορφής:

  $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot y = d$ (a, b, c σταθερές, όχι και οι 3 μηδέν)

- Είναι η εξίσωση επιπέδου στο χώρο (3-διάστατος χώρος)

Οι γραμμικές εξισώσεις είναι $1^{ου}$ βαθμού

Ερωτήσεις υπενθύμισης:
Η $x + x \cdot y = 5$ είναι γραμμική;
Η $x^2 - 4 \cdot y = 0$;

Angelos Giannoulas

Γραμμικά συστήματα mxn

- Γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους είναι :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots \quad & \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

ή αλλιώς: $A \cdot X = b$

- Μία λύση του συστήματος είναι της μορφής $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
- Το σύνολο των λύσεων λέγεται 'γενική λύση'
- Αν δεν υπάρχει τέτοιο X, το σύστημα είναι αδύνατο

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Μήτρα συντελεστών A   Μήτρα αγνώστων X   Μήτρα σταθερών b

Αν τα $b_i = 0$ για κάθε i, Τότε το σύστημα λέγεται 'Ομογενές'

Angelos Giannoulas

Θεώρημα
εύρεσης πλήθους λύσεων με τον βαθμό

Υπενθύμιση: Επαυξημένη μήτρα A_E ονομάζεται η μήτρα των συντελεστών της A με την προσθήκη στο τέλος την στήλη των σταθερών b

Μία και μόνο : **1!**

Ένα σύστημα A · X = b , m εξισώσεων & **n αγνώστων** έχει:

1. Μία και μόνο λύση αν $\text{rank}(A) = \text{rank}(A_E) = n$
2. Άπειρες λύσεις αν $\text{rank}(A) = \text{rank}(A_E) < n$
3. Χωρίς λύση αν $\text{rank}(A) \neq \text{rank}(A_E)$

Άσκηση: Βρείτε αν είναι συμβιβαστό το:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ 2x + 11y - 7z = -2 \end{cases}$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε ΣΜΓ για να μετατρέψετε τις μήτρες σε κλιμακωτές

Ασκήσεις

Angelos Giannoulas

Ελέγξτε με τον βαθμό των μητρών των συστημάτων αν τα επόμενα έχουν λύσεις:

(α)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 9 \\ 5x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 7x_3 - x_4 &= 3 \\ 2x_4 &= 8 \end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - x_3 + 4x_4 - 2x_5 &= 15 \\ x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 5 \\ 3x_4 - 9x_5 &= 6 \end{aligned}$$

(γ)

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 6 \\ 2x - 4y - 3z &= 8 \\ -3x + 6y + 8z &= -5 \end{aligned}$$

(δ)

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 1 \\ 2x + 5y - 8z &= 4 \\ 3x + 8y - 13z &= 7 \end{aligned}$$

(ε)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 + 9x_4 &= 9 \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 + 17x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Απ. : (α) 1 λύση
(β) άπειρες λύσεις
(γ) 1 λύση
(δ) Άπειρες λύσεις
(ε) Ασυμβίβαστο

Angelos Giannoulas

Υπενθύμιση: Μέθοδος Gauss

(επίλυσης γραμμικών συστημάτων)

Βήματα μεθόδου:

1. Μετασχηματίζουμε την A_E σε κλιμακωτή μορφή
2. Βρίσκουμε τους αγνώστους αρχίζοντας από τον τελευταίο

Παράδειγμα: Λύστε με την μέθοδο Gauss το:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 + 10x_2 = -2 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 10 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3+R_1]{R_2 \to R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 8 & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3-R_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 5 & 26 \end{pmatrix}$$

από το οποίο έχουμε ότι $x_3 = 26/5$ κ.ο.κ. για τις x_2 και x_1

Angelos Giannoulas

Τα ομογενή συστήματα

- **Υπενθύμιση**:

  ομογενές σύστημα γραμμικών εξισώσεων m x n λέγεται αυτό που έχει όλους τους σταθερούς όρους μηδέν, δηλ. $A \cdot X = 0$

- Ένα ομογενές σύστημα γραμμικών εξισώσεων m x n είναι πάντα συμβιβαστό (έχει δηλ. σίγουρα μία λύση, την μηδενική)

- Αν $\text{rank}(A) = \text{rank}(A_E) < n$ (του πλήθους των αγνώστων), τότε υπάρχουν άπειρες λύσεις, άρα και λύσεις $\neq 0$

Angelos Giannoulas

Πρόταση:

Έστω τετραγωνική μήτρα $A_{n\times n}$, τότε:

$$\text{rank}(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

Η Πρόταση ισχύει και για μη–ομογενή συστήματα

δηλ. **άν η ορίζουσα της μήτρας $A_{n\times n}$**, των συντελεστών των αγνώστων **είναι διάφορη του μηδενός**, τότε το ομογενές σύστημα έχει **μία και μοναδική λύση, την μηδενική**

δηλ. οι εξισώσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες

Angelos Giannoulas

Πόρισμα για τα ομογενή

Πόρισμα:

Έστω τετραγωνική μήτρα $A_{n \times n}$, τότε:

$A \cdot X = 0$ έχει μη-μηδενικές λύσεις ⇔ $|A| = 0$

δηλ. αν $|A| = 0$ τότε το σύστημα είναι αόριστο, ήτοι οι εξισώσεις δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες και κάποια /ες είναι συνδυασμός άλλων

Παράδειγμα:

Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$

Εφόσον $|A| = 0$, συνεπάγεται από το πόρισμα ότι υπάρχουν και λύσεις μη-μηδενικές

Ερώτηση: Ποιες είναι αυτές;

Angelos Giannoulas

Υπενθύμιση: Κανόνας του Cramer

Έστω τετραγωνική μήτρα $A_{n\times n}$ τ.ώ. $|A| \neq 0$. Τότε η μοναδική λύση υπολογίζεται από τον τύπο:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

όπου:

- $i = 1,\ldots,n$ &
- $|A_i|$ η ορίζουσα από την αντικατάσταση της i στήλης με την στήλη των σταθερών

Άσκηση: Λύστε με Cramer το

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 - 6x_2 = -2 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

Βοήθεια: $|A|=-16$, $|A_1|=-16$, $|A_2|= -16$, $|A_3|= -32$
και $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

Angelos Giannoulas

Άσκηση

Να λύσετε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων για όλες τις πιθανές τιμές του k ($k \in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}$$

(**Υπόδειξη**:

Προσέξτε ποια μέθοδο συμφέρει να κάνετε χρήση)

Angelos Giannoulas

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο απαλοιφής του Gauss στην A_E

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & k-1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - (k-1)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & -k^2-k+6 & 2-k \end{pmatrix}$$

1. <u>Αν **$-κ^2$-κ+6 = 0** ⇒ κ = 2 ή κ = 3</u>
   a. **για κ=2**: rank(A) = rank(A_E) = 2< 3 (=n), άρα υπάρχουν άπειρες λύσεις και αν κάνουμε τις πράξεις: x=5z, y=1-4z, z ϵ $\mathbb{R}$
   b. **για κ=3**: rank(A) = 2 < rank(A_E) = 3, άρα το σύστημα δεν έχει λύσεις (αδύνατο)

2. <u>Αν **$-κ^2$-κ+6 ≠ 0** ⇒ κ ≠ 2 και κ ≠ 3</u>

   rank(A) = rank(A_E) = 3, άρα το σύστημα έχει 1! λύση: $z = \dfrac{2-k}{-k^2-k+6}$

   κ.ο.κ. για y = … & x = …

Angelos Giannoulas

Ιδιοτιμές & Ιδιοδιανύσματα

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Angelos Giannoulas

Ιδιοτιμή & Ιδιοδιάνυσμα

Eigenvalues & Eigenvectors

Ορισμός: Έστω τετραγωνική μήτρα A_n. Ένας αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$ λέγεται ιδιοτιμή (ή χαρακτηριστική τιμή) της A αν υπάρχει μήτρα X_{nx1} τ.ώ.:

$$A \cdot X = \lambda \cdot X \Leftrightarrow \boxed{(A - \lambda \cdot I_n) \cdot X = O}$$

δηλ. έχουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\, x_1 + a_{12}x_2 \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)\, x_2 \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \dots\dots \qquad \dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \dots + (a_{nn} - \lambda)\, x_n = 0 \end{cases}$$

Ορισμός: Η μήτρα $X=[x_j]_{1 \leq j \leq n}$ λέγεται ιδιοδιάνυσμα (ή χαρακτηριστικό διάνυσμα) της A για την τιμή λ.

Angelos Giannoulas

Χαρακτηριστική εξίσωση

Το προηγούμενο σύστημα είναι ομογενές, άρα από το πόρισμα για τα ομογενή συστήματα ισχύει ότι:

$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot x = O$ έχει μη-μηδενικές λύσεις $\Leftrightarrow$ $|A - \lambda \cdot I_n| = 0 \Leftrightarrow$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Κάνοντας τις πράξεις προκύπτει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(\lambda)$
& η χαρακτηριστική εξίσωση $P_A(\lambda) = 0$

δηλ. $\boxed{|A - \lambda \cdot I_n| = 0 \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0}$

Ορισμός: Το σύνολο λi της ιδιοτιμών της A λέγεται φάσμα της A = σ(A)

Η μεγαλύτερη ιδιοτιμή (max|λi|} λέγεται φασματική ακτίνα της A = ρ(A)

Angelos Giannoulas

Ασκήσεις

Βρείτε τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των μητρών:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -5 & -9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{bmatrix} \qquad A2 = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

Λύση: και για τις 2 μήτρες είναι $-\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1$

Angelos Giannoulas

Ασκήσεις

1. Έστω η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$
   - Δώστε το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο
   - Βρείτε τις ιδιοτιμές της

2. Να δείξετε ότι το $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της μήτρας $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ για την ιδιοτιμή λ=3

3. Όμοια για το $v = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$ για την ιδιοτιμή λ=2 της μήτρας

   $$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Angelos Giannoulas

Λύσεις

1. χαρακτηριστικό πολυώνυμο: λ^2-5λ+4
   ιδιοτιμές: 1 και 4

2. Για να είναι πρέπει να ισχύει ότι A · x = λ · x
   Πράγματι:

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathrm{x}$$

3. Όμοια με την (2)

Angelos Giannoulas

Άσκηση

Έστω η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Να δείξετε ότι της A:

1. για την ιδιοτιμή λ=0 το διάνυσμα $[1\ 0\ 0]^T$ είναι ιδιοδιάνυσμα
2. για την ιδιοτιμή λ=3 το διάνυσμα $[0\ 0\ 1]^T$ είναι ιδιοδιάνυσμα
3. για την ιδιοτιμή λ=2 το διάνυσμα $[1\ 2\ 0]^T$ είναι ιδιοδιάνυσμα

Angelos Giannoulas

Λύση

$$A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\0\end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$$

https://el.wikipedia.org/wiki/Ιδιοτιμές_και_ιδιοδιανύσματα

Angelos Giannoulas

Υπενθύμιση

Θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας (ΘΘΑ)

(R. Descartes, 1637)

'Κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο μίας μεταβλητής και βαθμού *n με μιγαδικούς συντελεστές* έχει ακριβώς *n μιγαδικές ρίζες*'

(∊ ℝ ή ∊ ℂ)

Άρα, στο χαρακτηριστικό μας πολυώνυμο:

εφόσον το λ εμφανίζεται n φορές, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(\lambda)$ είναι 'n' βαθμού

& από το ΘΘΑ: άρα η χαρακτηριστική εξίσωση $P_A(\lambda) = 0$ έχει n λύσεις (δηλ. η A θα έχει πάντα ιδιοτιμές)

ΠΡΟΣΟΧΗ: Κάποιες από τις τιμές μπορεί να είναι πολλαπλής μορφής ή/και μιγαδικές.

Angelos Giannoulas

Ορισμοί

Έστω λi οι ιδιοτιμές μιας An:

- A θετικά ορισμένη αν $\lambda_i > 0$ για κάθε i=1..n &
  θετικά ημι-ορισμένη αν $\lambda_i \geq 0$ για κάθε i=1..n

- A αρνητικά ορισμένη αν $\lambda_i < 0$ για κάθε i=1..n &
  αρνητικά ημι-ορισμένη αν $\lambda_i \leq 0$ για κάθε i=1..n

- A απροσδιόριστη αν υπάρχει $\lambda_\kappa > 0$ & $\lambda_\mu < 0$

  $\kappa \neq \mu, \quad 1 \leq \kappa, \mu \leq n$

Angelos Giannoulas

Πρόταση

(Ιδιοτήτων των ιδιοτιμών)

Έστω $A = [\alpha_{ij}]_{nxn}$ με $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ οι ιδιοτιμές της, τότε:

- $trA = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ το ίχνος της A (Υπενθ.: $trA = \Sigma\alpha_{ii}$)
- $|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$
- $\sigma(A) = \sigma(A^T)$
- Αν A τριγωνική (άνω, κάτω ή διαγώνια), τότε οι ιδιοτιμές είναι τα στοιχεία της διαγωνίου της
- Αν A ομαλή (δηλ. $|A| \neq 0$), τότε όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_i \neq 0$

$1 \leq i \leq n$

δηλ. αν $|A|=0$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\lambda=0$

Angelos Giannoulas

Ιδιοχώρος

Τα ιδιοδιανύσματα μιας μήτρας A για την ιδιοτιμή λ, είναι διανύσματα ≠ 0, που ικανοποιούν την εξίσωση

$$A \cdot X = \lambda \cdot X$$

… δηλ. είναι μη-μηδενικά διανύσματα, 'λύσεις' του ομογενούς συστήματος $(A - \lambda \cdot I_n) \cdot X = O$

Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

Ορισμός: Ονομάζουμε ιδιοχώρο της A για την ιδιοτιμή λ τον χώρο που δημιουργείται από τις παραπάνω 'λύσεις'

Angelos Giannoulas

Παράδειγμα

Βρείτε τις ιδιοτιμές /ιδιοδιανύσματα της $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (4-\lambda)\cdot(-3-\lambda)+10=0$$

Άρα $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ με ρίζες τις $\lambda_1 = 2$ & $\lambda_2 = -1$ ($\sigma(A)=\{-1,2\}$)

<u>**1η περίπτωση με $\lambda_1 = 2$**</u>, το ιδιοδιάνυσμα X είναι τ.ώ.:

$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot X = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 5y/2$

Άρα η λύση είναι τα $(x, y) = \{(5s/2, s), s \in \mathbb{R}\} = \{s\cdot(5/2, 1), s \in \mathbb{R}\}$

Angelos Giannoulas

Παράδειγμα συνέχεια

- Άρα τα **ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ=2** είναι τα μη-μηδενικά διανύσματα της μορφής (5s/2, s), s ϵ $\mathbb{R}$

- **Ο ιδιοχώρος για την ιδιοτιμή λ=2** είναι ο χώρος που περιέχει όλα τα διανύσματα αυτής της μορφής (5s/2, s), s ϵ $\mathbb{R}$

- **Το διάνυσμα που παράγει τον ιδιοχώρο** για την ιδιοτιμή λ=2 είναι το (5/2, 1)

- Ως μη-μηδενικό **αποτελεί μία βάση του ιδιοχώρου για την ιδιοτιμή λ=2**

- <u>**2η περίπτωση με λ_2 = -1**</u>, …. ….. (x, y) = {t·(1, 1), t ϵ $\mathbb{R}$} κ.λπ.

Τα διανύσματα (5/2, 1) & (1, 1) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^2$

Angelos Giannoulas

Άσκηση

Όμοια, να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα για την:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Υπόδειξη:

1. Λύστε την χαρακτηριστική εξίσωση (ως προς λ) $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow |A - \lambda \cdot I_n| = 0$
2. Για κάθε λ βρείτε τις λύσεις (x, y, z) που επαληθεύουν την $P_A(\lambda) = 0$

Παρατήρηση: Εφόσον πάντα ψάχνουμε για τις μη-μηδενικές ιδιοτιμές λ, σημαίνει ότι η απάντησή μας θα πρέπει να αφορά ΑΠΕΙΡΕΣ λύσεις.
Αν όχι σημαίνει ότι έχουμε στην επίλυση κάποιο βήμα λάθος.

Angelos Giannoulas

Λύση

Προσοχή: χρησιμοποιείστε την μέθοδο του Horner για την εύρεση μιας πιθανής ρίζας ρ και στη συνέχεια με διαίρεση του πολυωνύμου με (x-ρ) για τις υπόλοιπες ρίζες του

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow |A - \lambda \cdot I_n| = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3+6\lambda^2+3\lambda+8 = 0 \Leftrightarrow$

$(-\lambda^2-2\lambda-13) \cdot (\lambda-8) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda+1)^2 \cdot (\lambda-8) = 0$

απ' όπου έχουμε $\lambda_1 = -1$ (διπλή) και $\lambda_2 = 8$

1η περίπτωση με $\lambda_1 = -1$, το ιδιοδιάνυσμα X είναι τ.ώ.:

$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot X = O \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 2x + y + 2z = 0 \Leftrightarrow y = -2x - 2z$

Άρα $X = (x, y, z) = (x, -2x-2z, z) = x \cdot (1,-2,0)+z \cdot (0,-2,1), \quad x, z \in \mathbb{R}$

Τα διανύσματα (1,-2,0) & (0,-2,1) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα αποτελούν μία βάση του ιδιοχώρου E={(1,-2,0) , (0,-2,1) }

Angelos Giannoulas

Λύση

Προσοχή: χρησιμοποιείστε την μέθοδο του Horner για την εύρεση μιας πιθανής ρίζας ρ και στη συνέχεια με διαίρεση του πολυωνύμου με (x-ρ) για τις υπόλοιπες ρίζες του

2η περίπτωση με $\lambda_2 = 8$,
το ιδιοδιάνυσμα X του συστήματος (A - λ·I)·X = O είναι τ.ώ.: ….
χρησιμοποιώντας την μέθοδο απαλοιφής του Gauss στην μήτρα των συντελεστών του φθάνουμε στο σύστημα:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -8 & 2 \\ -5 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & -18 & 9 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix}$$

και τελικά στο (x, y, z) = y·(2, 1, 2)

Δηλ. στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 8$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα (2,1,2) που αποτελεί βάση του ιδιοχώρου E={(2,1,2)}

Τα διανύσματα (1,-2,0) , (0,-2,1) & (2,1,2)είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^3$

Angelos Giannoulas

ΠΡΟΣΟΧΗ

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

Το αντίστροφο <u>δεν</u> ισχύει

Αν βρούμε μία διπλή ή τριπλή … ιδιοτιμή δεν σημαίνει ότι τα ιδιοδιανύσματα όλα είναι μεταξύ τους γραμμικώς ανεξάρτητα

(πρέπει να ελέγξουμε τον μέγιστο αριθμό)

Angelos Giannoulas

Παράδειγμα

Όμοια, να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα για την: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$

$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \lambda^2+1 = 0$

1. Αν A ϵ στον διανυσμ. χώρο $M_2(\mathbb{R})$, τότε δεν υπάρχουν ιδιοτιμές (αφού $\lambda^2= -1$)
2. Αν A ϵ στον διανυσμ. χώρο $M_2(\mathbb{C})$, τότε έχει τις $\lambda_1=i$ & $\lambda_2= -i$, δηλ. $\sigma(\alpha)=(-i, i)$

1η περίπτωση με $\lambda_1 = i$, το ιδιοδιάνυσμα Χ είναι τ.ώ.:

$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot X = O \Leftrightarrow \ldots.\ \ldots. \Leftrightarrow (x, y) = x\cdot(1, i-2)$

2η περίπτωση με $\lambda_2 = -i$, το ιδιοδιάνυσμα Χ είναι τ.ώ.:

$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot X = O \Leftrightarrow \ldots.\ \ldots. \Leftrightarrow (x, y) = x\cdot(-1, i+2)$

$\boxed{i^2 = -1 \Leftrightarrow i= \sqrt{-1}}$

Angelos Giannoulas

Άσκηση

Όμοια, να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα για την:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Υπόδειξη:
Δείτε το προηγούμενο παράδειγμα
Λύση:
Για $\lambda_1 = -i \rightarrow (x, y) = x(1, i)$
Για $\lambda_2 = i \rightarrow (x, y) = x(-1, i)$

Angelos Giannoulas

Θεώρημα: Ιδιοτιμές δυνάμεων μήτρας

Έστω X ένα ιδιοδιάνυσμα για την λ ιδιοτιμή της μήτρας A: το X είναι ιδιοδιάνυσμα της για την λ^{κ} ιδιοτιμή της A^{κ}

($\kappa \in \mathbb{Z}^{+}$)

Παράδειγμα:

Σε προηγούμενο παράδειγμα βρήκαμε ότι η $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

έχει τις ιδιοτιμές λ_1=-1 (διπλή) και λ_2=8

με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $[1\ -2\ 0]^T$, $[0\ -2\ 1]^T$ & $[2\ 1\ 2]^T$

Από το θεώρημα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

- τα $[1\ -2\ 0]^T$, $[0\ -2\ 1]^T$ είναι ιδιοδιανύσματα της A^5 για την $\lambda'_1=1^5=1$
- το $[2\ 1\ 2]^T$ είναι ιδιοδιάνυσμα της A^3 για την $\lambda'_2=8^3=512$

κ.ο.κ.

Angelos Giannoulas

Διαγωνοποίηση μητρών

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Angelos Giannoulas

Όμοιες μήτρες

Ορισμός:

Οι τετραγωνικές μήτρες $A=[\alpha_{ij}]_{nxn}$ & $B=[b_{ij}]_{nxn}$ όμοιες ($A \sim B$):

αν υπάρχει ομαλή μήτρα P τ.ώ. $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$

P ομαλή μήτρα αν $|P| \neq 0$, δηλ. P αντιστρέψιμη

$A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$

Πόρισμα: Αν $A \sim B$ τότε

A & B έχουν **ίδιες χαρακτηριστικές εξισώσεις**

και τα **ίδια ιδιοδιανύσματα**

Angelos Giannoulas

Όμοιες μήτρες

Πρόταση:

- Αν $A \sim B$ & $B \sim C \Rightarrow A \sim C$
- Αν $A \sim B \Rightarrow |A| = |B|$
- Αν $A \sim B \Rightarrow B^{\kappa} = P^{-1} \cdot A^{\kappa} \cdot P,\ \kappa \in \mathbb{N}$
- Αν $A \sim B \Rightarrow tr(A) = tr(B)$
- Αν $A \sim B \Rightarrow rank(A) = rank\ (B)$
- Αν $A \sim B \Rightarrow \sigma(A) = \sigma(B)$

Angelos Giannoulas

Παράδειγμα

Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ και B= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ δύο μήτρες 2x2.

Να δείξετε ότι η $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ είναι μια ομαλή μήτρα: $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$

δηλ. A~B

Λύση: $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Το ερώτημα όμως είναι: **ΠΩΣ ΒΡΙΣΚΩ ΤΗΝ ΟΜΑΛΗ ΜΗΤΡΑ P**: **$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$**

ΔΙΑΓΩΝΙΟΠΟΙΗΣΗ ΜΗΤΡΩΝ

Angelos Giannoulas

Διαγωνοποίηση μητρών

Ορισμός: Μία μήτρα $A = [\alpha_{ij}]_{nxn}$ διαγωνοποιείται

αν υπάρχει Δ διαγώνια τ.ώ. Α~Δ

(δηλ. υπάρχει P αντιστρέψιμη: $\Delta = P^{-1} \cdot A \cdot P$
ή $A = P \cdot \Delta \cdot P^{-1}$)

Κριτήριο Διαγωνοποίησης: Έστω η μήτρα $A = [\alpha_{ij}]_{\mathbf{nxn}}$

Α διαγωνοποιείται ⇔ { η Α έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα

Αν Α ~ Δ διαγώνια τότε η διαγώνιος της Δ αποτελείται από τις ιδιοτιμές της Α και ισχύει $\Delta = P^{-1} \cdot A \cdot P$ με P να έχει ως στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

(και φυσικά $P_A(\lambda) = (\alpha_1 - \lambda)(\alpha_2 - \lambda) \ldots (\alpha_n - \lambda)$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ & $i \neq j$)

Angelos Giannoulas

Δυνάμεις μητρών

Πρόταση:

Αν $A = [\alpha_{ij}]_{nxn} \sim \Delta$ διαγώνια $\Rightarrow$ $A^n = P \cdot \Delta^n \cdot P^{-1}$

Angelos Giannoulas

Πώς εργαζόμαστε

1. Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές της μήτρας A_{nxn} (όλες οι διαφορετικές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι οι ιδιοτιμές της A)

2. Επίσης τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε αυτές τις ιδιοτιμές (την βάση για κάθε ιδιοχώρο)

3. Ελέγχουμε αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (υπενθύμιση: διαφορετικά ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα αν έχω n ιδιοδιανύσματα τότε A διαγωνοποιήσιμη, **αλλιώς A δεν είναι διαγωνοποιήσιμη**)

4. Σχηματίζουμε την μήτρα P με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του 3ου βήματος

5. Άρα η μήτρα $P^{-1} \cdot A \cdot P$ είναι διαγώνιος, οι στήλες της οποίας αποτελούνται από τις ιδιοτιμές της A

Angelos Giannoulas

Παράδειγμα

Σε συνέχεια προηγούμενου π.χ. για την μήτρα $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

είχαμε βρει τις ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1$ (διπλή) και $\lambda_2 = 8$ με τα ιδιοδιανύσματα {(1,-2,0), (0,-2,1)} & {(2,1,2)} αντίστοιχα.

Άρα μία διαγωνοποίηση της A είναι η: $A = P \cdot \Delta \cdot P^{-1}$ όπου: $\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

με $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ & $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$

Επίσης $A^5 = P \cdot \Delta^5 \cdot P^{-1} = [P] \cdot \begin{pmatrix} (-1)^5 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^5 & 0 \\ 0 & 0 & 8^5 \end{pmatrix} \cdot [P^{-1}]$

Angelos Giannoulas

Άσκηση

Βρείτε την μήτρα P που διαγωνοποιεί την $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}$

Λύση:

Υπολογίζουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\det(\lambda I - A)=\det\begin{pmatrix}\lambda & -2\\ 3 & \lambda-5\end{pmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6$$

1. Από την χαρακτηριστική της εξίσωση βρίσκουμε τις ιδιοτιμές της A: $\lambda_1=2$ και $\lambda_2=3$

2. Για $\lambda_1=2$: $\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix}-2x_1+2x_2=0\\ -3x_1+3x_2=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}x_2=x_1\\ x_1\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{x}=x_1\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\ x_1\in\mathbb{R}$

Για $\lambda_2=3$: $\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix}-3x_1+2x_2=0\\ -3x_1+2x_2=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}x_2=\frac{3}{2}x_1\\ x_1\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{x}=x_1\begin{pmatrix}1\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix},\ x_1\in\mathbb{R}$

Angelos Giannoulas

Άσκηση συνέχεια

Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα είναι ιδιοδιάνυσμα της Α:

άρα επιλέγουμε το $[1,1]^T$ για $\lambda_1=2$ και το $[2,3]^T$ για $\lambda_2=3$ $(x_1=2)$

3. Άρα $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

4. Επειδή $|P|=1 \neq 0$, τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα Α διαγωνοποιήσιμη

5. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

και κάνοντας τις πράξεις αποδεικνύεται ότι $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Angelos Giannoulas

Άσκηση

Να δείξετε ότι η διπλανή μήτρα διαγωνοποιείται

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Angelos Giannoulas

Λύση

- Οι ιδιοτιμές της Α είναι 2 (πολλαπλότητας 2) και 8
- Διανύσματα βάσης έχουμε τα $[1\ 0\ -1]^T$, $[0\ 1\ -1]^T$ και $[1\ 1\ 1]^T$
- Άρα έχουμε την μήτρα $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
- Αφού $|P| \neq 0$ τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα
- $P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Angelos Giannoulas

Δυνάμεις μητρών

Αν A διαγωνοποιήσιμη τότε υπάρχει P αντιστρέψιμη: $Δ=P^{-1}\cdot A\cdot P$

Από το προηγούμενο έχουμε ότι $A=P\cdot Δ\cdot P^{-1}$ και ισχύει ότι

$$A^{κ} = P\cdot Δ^{κ}\cdot P^{-1}$$

δηλ. η δύναμη μιας μήτρας εκφράζεται από την δύναμη της διαγωνίου

(υψώνουμε στην δύναμή μόνο τα στοιχεία της διαγωνίου)

Angelos Giannoulas

Παράδειγμα

Έστω η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ που διαγωνοποιείται

από την $P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ έτσι ώστε $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} A^{13} &= P\,\Delta^{13} P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8190 & 0 & -16382 \\ 8191 & 8192 & 8191 \\ 8191 & 0 & 16383 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Angelos Giannoulas

Θεώρημα Cayley-Hamilton

Κάθε μήτρα $A=[\alpha_{ij}]_{nxn}$ είναι ρίζα του χαρακτηριστικού της πολυωνύμου, δηλ. $P_A(A) = 0$

Παράδειγμα:

Αν $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ τότε $P_A(\lambda) = |A-\lambda\cdot\mathrm{I}| = \lambda^2 - 3\cdot\lambda - 4$

Κάνοντας πράξεις $P_A(A) = 0$, άρα A ρίζα του $P_A(\lambda)$

Angelos Giannoulas

Παρατήρηση

Από το προηγούμενο θεώρημα μπορούμε να υπολογίσουμε την A^{-1} πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση $P_A(A) = 0$ με A^{-1} και στα 2 μέλη της

Παράδειγμα: Βρείτε την A^{-1} αν $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$P_A(\lambda) = |A-\lambda \cdot \mathrm{I}| = \lambda^3-10\lambda^2+3\lambda+40$

Άρα $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow$

$A^3-10A^2+3A+40 = 0 \Leftrightarrow$

$A^{-1}\cdot (A^3-10A^2+3A+40) = A^{-1} \cdot 0 \Leftrightarrow$

$A^2-10A+3\cdot \mathrm{I}+40A^{-1} = 0 \Leftrightarrow$

$A^{-1} = (1/40) \cdot (-A^2+10A-30\cdot \mathrm{I})$

Angelos Giannoulas

Μιγαδικοί αριθμοί

Στοιχεία Μιγαδικών

Angelos Giannoulas

Το πρόβλημα

Η εξίσωση $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ με $\Delta < 0$ δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{R}$, π.χ. η $x^2 = -1$

Για να ξεπεραστεί η αδυναμία ο Ιταλός Τζερόλαμο Καρντάνο δημιούργησε τους μιγαδικούς με μία διεύρυνση αριθμών του $\mathbb{R}$, το $\mathbb{C}$, τους οποίους ονόμασε «φανταστικούς αριθμούς» έτσι ώστε η $x^2 = -1$ να έχει τουλάχιστον μία ρίζα, την φανταστική μονάδα i: $i^2 = -1$

Ορισμοί:

- Ορίζουμε ως φανταστικό αριθμό ένα αριθμό της μορφής $\beta \cdot i$, $\beta \in \mathbb{R}$
  - Το σύνολο των φανταστικών αριθμών το συμβολίζουμε με $\mathbb{I}$
  - Παράδειγμα: 4i, -2i, ⅔i, κ.λπ.
- Ορίζουμε ως μιγαδικό αριθμό, κάθε αριθμό της μορφής $\alpha + \beta \cdot i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
  - Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών το συμβολίζουμε με $\mathbb{C}$
  - Παράδειγμα: -2+4i, ⅔ -2i, 4-⅔i, κ.λπ.

Angelos Giannoulas

Ορισμός

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών είναι ένα υπερ-σύνολο του $\mathbb{R}$:

1. επεκτείνει τις πράξεις + & · με τις ίδιες ιδιότητες
2. έχει την φανταστική μονάδα i: $i^2 = -1$ (άρα $i = \pm\sqrt{-1}$)
3. κάθε $z \in \mathbb{C}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο:

$$\boxed{z = \alpha + \beta \cdot i}$$

a=Re(z), το πραγματικό μέρος

β=Im(z), το φανταστικό μέρος

$$\text{δηλ.} \quad \mathbb{C} = \{z: z=\alpha + \beta\cdot i \quad \text{με} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \ \& \ i^2 = -1\}$$

Παράδειγμα: ο μιγαδικός αριθμός -2+4i έχει τον Re(-2+4i) = -2 ως το πραγματικό του μέρος και τον Im(2+4) = 4 ως το φανταστικό του μέρος

Angelos Giannoulas

Ισότητα μιγαδικών

Εστω a, b, c, d ϵ $\mathbb{R}$, τότε δύο μιγαδικοί αριθμοί z_1=a + b·i και z_2= c + d·i είναι ίσοι όταν a = c και b = d

Παράδειγμα:

Ποια η τιμή των x και y ώστε οι επόμενοι μιγαδικοί αριθμοί να είναι μεταξύ τους ίσοι (x, y ϵ $\mathbb{R}$);

z_1= -2x + 4y·i και z_2= x-2 + (y-1)·i

Απάντηση:

Πρέπει τα πραγματικά μέρη να είναι ίσα και τα φανταστικά αντίστοιχα, δηλ.

-2x = x-2 και 4y = y-1, ήτοι x = 2/3 και y = -1/3

Angelos Giannoulas

Πρόσθεση μιγαδικών

Εστω a, b, c, d ϵ $\mathbb{R}$, τότε το άθροισμα δύο μιγαδικών z_1=a + b·i και z_2= c + d·i αριθμών δίνεται από την σχέση:

$$z_1 + z_2 = (a + b\cdot i) + (c + d\cdot i) = (a + b) + (c + d)\cdot i$$

$$z_1 - z_2 = (a + b\cdot i) - (c + d\cdot i) = (a - c) + (b - d)\cdot i$$

Ιδιότητες πρόσθεσης

1. Αντιμεταθετική: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
2. Προσεταιριστική: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
3. Υπάρχει ένας και μόνο ένας μιγαδικός z’: z + z’ = z, για κάθε z ϵ $\mathbb{C}$

   Αυτός ο αριθμός είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης των μιγαδικών, ήτοι: z’ = 0 + 0 ·i (συμβολίζεται με το 0)

4. Υπάρχει ένας και μόνο ένας μιγαδικός z*: z + z* = 0, για κάθε z ϵ $\mathbb{C}$

   Αυτός ο αριθμός είναι ο αντίθετος του μιγαδικού z

   (Αν z = a + b·i τότε **z*** = -a + (-b)·i = - a - b·i = **- z**)

Angelos Giannoulas

Πολλαπλασιασμός μιγαδικών

Εστω a, b, c, d ϵ ℝ, τότε το γινόμενο δύο μιγαδικών αριθμών $z_1=a + b\cdot i$ και $z_2= c + d\cdot i$ δίνεται από την σχέση:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + b\cdot i) \cdot (c + d\cdot i) = (ac - bd) + (ad + bc)\cdot i$$

Ιδιότητες γινόμενου

1. Αντιμεταθετική: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
2. Προσεταιριστική: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
3. Υπάρχει ένας και μόνο ένας μιγαδικός z’: $z \cdot z' = z$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$

   Αυτός ο αριθμός είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού των μιγαδικών, ήτοι: $z' = 1 + 0 \cdot i$ (συμβολίζεται με το 1)
4. Υπάρχει ένας και μόνο ένας μιγαδικός z*: $z \cdot z^* = 1$, για κάθε $z \in \mathbb{C}^*$

   Αυτός ο αριθμός είναι ο αντίστροφος του μιγαδικού z

   (Αν $z = a + b\cdot i$ τότε **z*** $= 1/(a + b\cdot i) =$ **1/ z**)

Angelos Giannoulas

Πηλίκο μιγαδικών

Έστω a, b, c, d ϵ ℝ, τότε το πηλίκο δύο μιγαδικών αριθμών z_1=a + b·i και z_2= c + d·i δίνεται από την σχέση: z_1 / z_2 , το οποίο σε μορφή μιγαδικού παρουσιάζεται:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\mathrm{a+bi}}{\mathrm{c+di}}=\frac{\mathrm{(a+bi)\cdot(c\text{-}di)}}{\mathrm{(c+di)\cdot(c\text{-}di)}}=\frac{\mathrm{(ac+bd)+(bc\text{-}ad)i}}{\mathrm{c^2+d^2}}=\frac{\mathrm{ac+bd}}{\mathrm{c^2+d^2}}+\frac{\mathrm{bc\text{-}ad}}{\mathrm{c^2+d^2}}\mathrm{i}$$

<u>Σημείωση</u>: Το πηλίκο z_1 / z_2 συμβολίζεται και ως $z_1 \cdot z_2^{-1}$

Άσκηση:

Αν z_1=a + b·i και z_2= c + d·i :

να μετατρέψετε το πηλίκο z_1 / z_2 σε μορφή Re(z_1/z_2) + Im(z_1/z_2)

Angelos Giannoulas

Δυνάμεις μιγαδικών

Έστω a, b ∊ ℝ, τότε ορίζουμε τη δύναμη σε ακέραιο αριθμό κ του μιγαδικού αριθμού z = a + b·i :

$$z^{\kappa} = z^{\kappa-1} \cdot z$$

Σημείωση: Για z ∊ ℂ*:

- $z^0 = 1$
- Αν κ > 0, τότε $z^{-\kappa} = 1/ z^{\kappa}$

Ιδιότητες δυνάμεων

$$i^0 = 1$$

$i^1 = i$ $\quad i^2 = -1$ $\quad i^3 = i^2 \cdot i = -i$ $\quad i^4 = 1$ 4 βήματα

$i^5 = i$ $\quad i^6 = -1$ $\quad i^7 = -i$ $\quad i^8 = 1$ κ.ο.κ. 4 βήματα

Angelos Giannoulas

Ασκήσεις

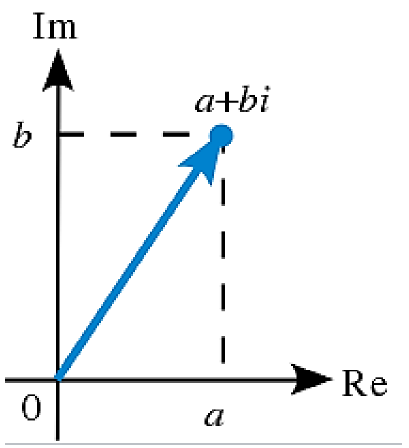
1. Αν $z = (2-3\cdot i)$, να βρείτε το z^2 και το z^3

2. Να υπολογίσετε την τιμή των φανταστικών αριθμών:
    - $-3\cdot i^{14}$
    - $-1\cdot i^{29}$

Angelos Giannoulas

Οι μιγαδικοί γεωμετρικά

Κάθε $\mathbf{z = a + b \cdot i}$ $x, y \in \mathbb{R}$ & $i^2 = -1$ παριστάνεται με ένα σημείο, π.χ. M(a, b), όπως επίσης και με την διανυσματική ακτίνα OM του σημείου M



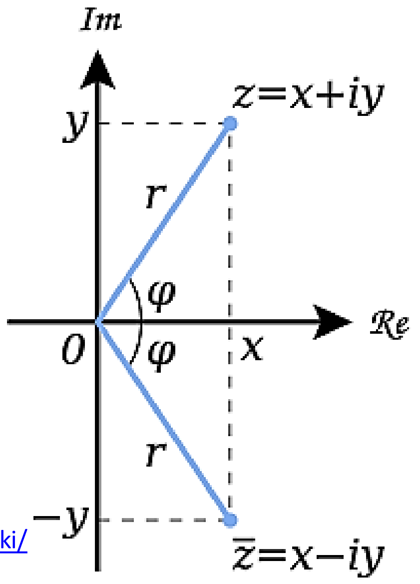
εικόνα:https://el.wikipedia.org/wiki/Μιγαδικός_αριθμός

Ορισμός: Αν z=x+y·i μιγαδικός, τότε ο $\hat{z}=x - y\cdot i$ λέγεται συζυγής του z

Πόρισμα:

$z \cdot \hat{z} = (x+yi) \cdot (x-yi)=x^2+y^2$

$z + \hat{z} = 2x$



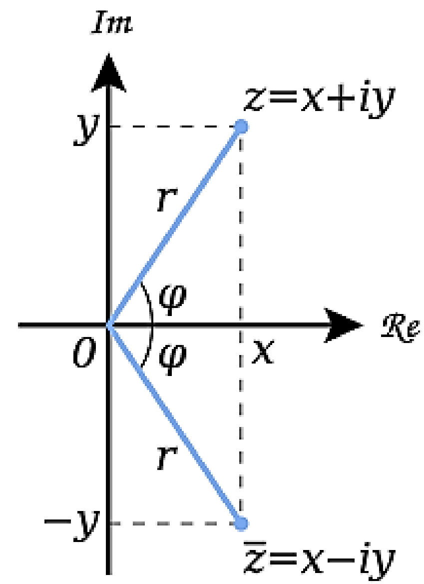
εικόνα: https://el.wikipedia.org/wiki/Συζυγής_μιγαδικός_αριθμός

Angelos Giannoulas

Ιδιότητες συζυγών

- $|z|^2 = z\bar{z}$
- $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |\overline{-z}|$
- $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$
- $\bar{z} = z$ αν και μόνο αν $Im(z) = 0$
- $\bar{z} = -z$ αν και μόνο αν $Re(z) = 0$
- $\overline{(\bar{z})} = z$
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \ z \neq 0$

$\overline{(z^{\nu})} = (\bar{z})^{\nu}$



εικόνα: https://el.wikipedia.org/wiki/Συζυγής_μιγαδικός_αριθμός

Για να εκφράσουμε ένα κλάσμα μιγαδικών σε μορφή α+βi, πολλαπλασιάζουμε και τους 2 όρους με τον συζυγή του παρονομαστή

Angelos Giannoulas

Συζυγείς συντεταγμένες

Αν z=a + b·i μιγαδικός αριθμός (a, b ϵ $\mathbb{R}$), τότε μπορούμε να εκφράσουμε το Re(z) και το Im(z) συναρτήσει των z και ẑ = a - b·i (τον συζυγή):

$$a = \frac{z+\hat{z}}{2} \ \ \& \ \ b = \frac{z-\hat{z}}{2i}$$

Angelos Giannoulas

Άσκηση

Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z στις περιπτώσεις κατά τις οποίες ο αριθμός $\frac{z-1}{z-2i}$ είναι α) φανταστικός β) πραγματικός.

Απάντηση

α) τα σημεία του κύκλου με κέντρο $K\left(\frac{1}{2},1\right)$ και ακτίνα $\frac{\sqrt{5}}{2}$, με εξαίρεση το σημείο $A(0,2)$

β) τα σημεία της ευθείας με εξίσωση 2x+y-2=0, με εξαίρεση το σημείο A(0,2).

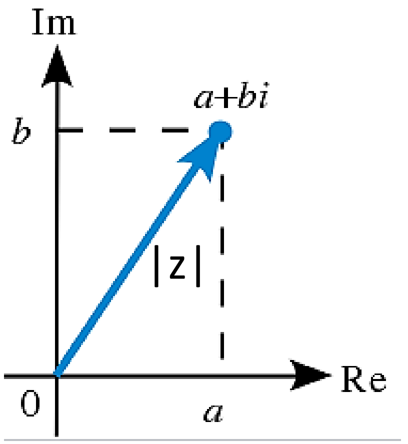
Angelos Giannoulas

Μέτρο μιγαδικού

Ορισμός: Αν z = a + b·i, ορίζουμε μέτρο του z, την απόσταση του σημείου από το O, δηλ.:

$$|z| = |OM| = |a + b\cdot i| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Παράδειγμα: $|3-4i|=5$



εικόνα:https://el.wikipedia.org/wiki/Μιγαδικός_αριθμός

Ιδιότητες του μέτρου

1. $|z| = |\hat{z}| = |-z|$
2. $|z|^2 = z \cdot \hat{z}$
3. $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
4. $|z / z'| = |z| / |z'|$
5. $||z|-|z'|| \le |z + z'| \le |z| + |z'|$

Γενικά, αποδεικνύεται ότι

$$|z_1 z_2 \dots z_\nu| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_\nu|$$

και ειδικότερα

$$|z^\nu| = |z|^\nu$$

Angelos Giannoulas

Ασκήσεις

1. Βρείτε το μέτρο των παρακάτω μιγαδικών αριθμών:

- $4\text{-}3i$
- $\dfrac{1+2i}{2+3i}$
- $(4\text{-}3i)^2$

2. Ποιος πρέπει να είναι ο μιγαδικός αριθμός z ώστε να ισχύει ότι: $|z-1| = |z-2| = |z-i|$

3. Στο $\mathbb{R}$ ισχύει ότι αν $\alpha^2+\beta^2=0$, τότε $\alpha=\beta=0$. Αποδείξτε ότι **δεν** ισχύει στους μιγαδικούς.

Υπόδειξη: Αν z, z': $z^2+z'^2=0$ ή $z^2-(i\cdot z')^2=0$ κ.λπ.

Angelos Giannoulas

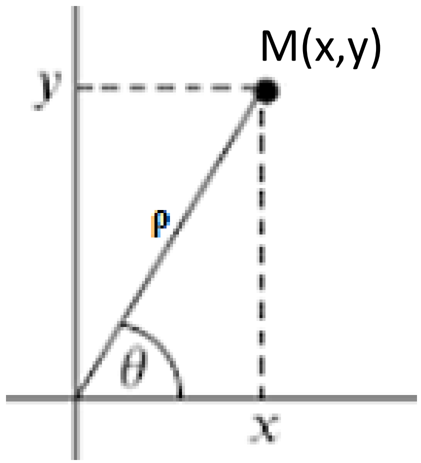
Μορφές μιγαδικών αριθμών

Στοιχεία Μιγαδικών

Angelos Giannoulas

Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού

Ορισμός: Έστω z=x+y·i μιγαδικός ≠ 0 με OM την αντίστοιχη διανυσματική ακτίνα



Όρισμα του z είναι οι γωνίες του OM με τον Re(z)

$$\theta + 2\kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}$$

Για z=0 δεν ορίζεται όρισμα

Από όλα τα ορίσματα η γωνία ∈ [0, 2π) = θ λέγεται πρωτεύον όρισμα του z (= Arg(z))

(Δύο ορίσματα του z διαφέρουν κατά 2κπ, κ ∈ $\mathbb{Z}$)

Το μέτρο του $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \rho$

cosθ = προσκείμενη / υποτείνουσα
sinθ = απέναντι / υποτείνουσα

και αν θ ένα όρισμα τότε $\cos\theta = \dfrac{x}{\rho}$ και $\sin\theta = \dfrac{y}{\rho}$ **(I)**

η τριγωνομετρική ή πολική μορφή του z (polar form)

Από την (I): z=x+y·i ⇔ z=ρ·cosθ+ρ·sinθ·i ⇔ $\boxed{z=\rho\cdot(\cos\theta+\cdot i\cdot \sin\theta)}$

Angelos Giannoulas

Παράδειγμα

Έστω $z = -\sqrt{3} + i$

Αφού ρ=2 και αν θ ένα όρισμα, τότε ισχύουν:

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ και } \sin\theta = \frac{1}{2}$$

Άρα μία τιμή του θ είναι θ=5π/6 και η τριγωνομετρική μορφή του z είναι:

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

& γενικά:

$$z = -\sqrt{3} + i = = 2 \cdot \left[\cos\left(2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$\kappa \in \mathbb{Z}$

Angelos Giannoulas

Ιδιότητες τριγωνομετρικής μορφής

1. $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \rho' \\ \theta - \theta' = 2\kappa\pi, \ \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}$

"Δύο μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι, αν και μόνο αν έχουν ίσα μέτρα και η διαφορά των ορισμάτων τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π".

2. $z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 \cdot [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\cdot\sin(\theta_1+\theta_2)]$

3. $z_1 / z_2 = (\rho_1 / \rho_2) \cdot [\cos(\theta_1-\theta_2) + i\cdot\sin(\theta_1-\theta_2)]$

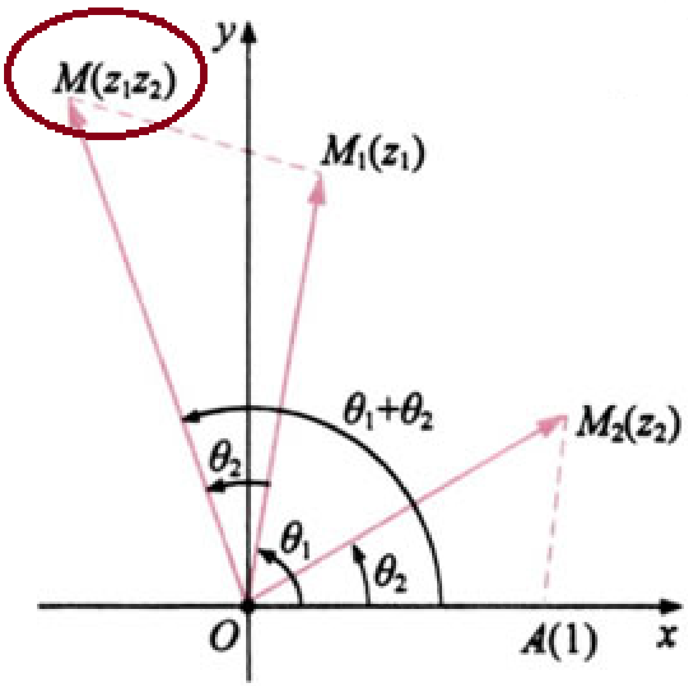
Υπενθύμιση:
cos(a+b)=cosa·cosb–sina·sin b
cos(a–b)=cosa·cosb+sina·sin b
sin(a±b)=sina·cosb±cosa·sin b

Άσκηση: Να αποδείξετε την 2η και την 3η ιδιότητα

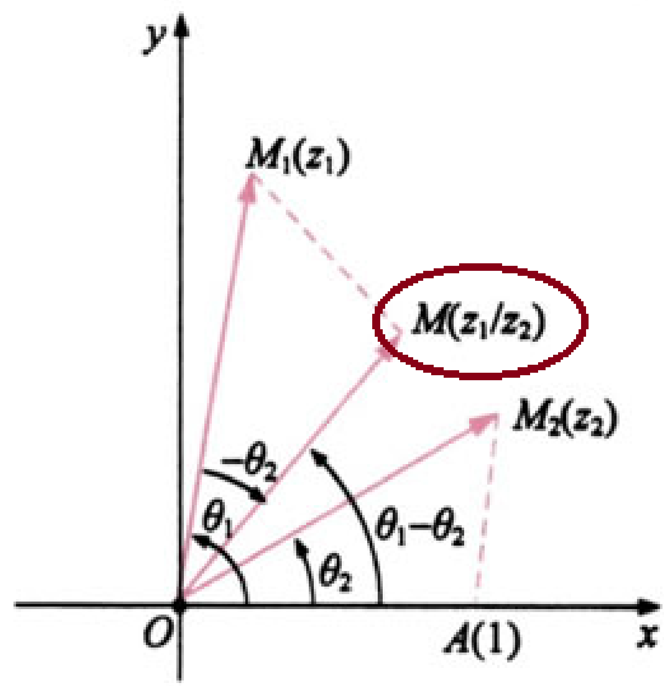
Angelos Giannoulas

Γεωμετρική ερμηνεία

Η **γεωμετρική ερμηνεία του <u>γινομένου</u> και του <u>πηλίκου</u> δύο μιγαδικών αριθμών** δίνεται από τα αντίστοιχα επόμενα σχήματα:



Τα τρίγωνα OAM_2 και OM_1M είναι όμοια



Τα τρίγωνα OAM_2 και OMM_1 είναι όμοια

βλ. http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C105/492/3196,12967/

Angelos Giannoulas

Παράδειγμα

Αν $z_1 = 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} + i\eta\mu\frac{2\pi}{3}\right)$ και $z_2 = 3\left(\sigma\upsilon\nu\frac{11\pi}{6} + i\eta\mu\frac{11\pi}{6}\right)$

Τότε:

$$z_1 \cdot z_2 = 2\cdot 3\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{11\pi}{6}\right) + i\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{11\pi}{6}\right)\right] = 6\left(\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{2} + i\eta\mu\frac{5\pi}{2}\right) = 6i$$

και

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{11\pi}{6}\right) + i\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{11\pi}{6}\right)\right] = \frac{2}{3}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{-7\pi}{6}\right) + i\eta\mu\left(\frac{-7\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{3} + i\frac{1}{3}.$$

Angelos Giannoulas

Θεώρημα του Moivre

Έστω $z = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$ και $\nu \in \mathbb{Z}^+$, τότε:

$$\mathbf{z^\nu = \rho^\nu \cdot [\cos(\nu\cdot\theta)+i\cdot\sin(\nu\cdot\theta)]}$$

Απόδειξη: (με την μέθοδο της επαγωγής)

- Για ν=1, τότε $z=\rho\cdot(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)$, που ισχύει
- Έστω ισχύει για ν, δηλ. $z^\nu = \rho^\nu\cdot[\cos(\nu\cdot\theta)+i\cdot\sin(\nu\cdot\theta)]$, θα δείξουμε ότι ισχύει για ν+1
- $z^{\nu+1} = z^\nu\cdot z^1 = \rho^\nu\cdot[\cos(\nu\cdot\theta)+i\cdot\sin(\nu\cdot\theta)]\cdot \rho\cdot(\cos\theta+i\cdot\sin\theta) =$

$$= \rho^{\nu+1}\cdot\{\cos[(\nu+1)\cdot\theta]+i\cdot\sin[(\nu+1)\cdot\theta]\}$$, που ισχύει

Υπενθύμιση:
cos(a+b)=cosa·cosb–sina·sin b
cos(a–b)=cosa·cosb+sina·sin b
sin(a±b)=sina·cosb±cosa·sin b

Παράδειγμα: $\text{Αν } z=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6})$

$$\textit{τότε}:\quad z^4 = 2^4(\cos\frac{4\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{4\pi}{6})=16(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3})$$

Angelos Giannoulas

Παρατήρηση

Το θεώρημα του Moivre ισχύει και για εκθέτη αρνητικό, δηλ.:

$$\mathbf{z^{-\nu} = \rho^{-\nu} \cdot [\cos(-\nu\cdot\theta)+i\cdot\sin(-\nu\cdot\theta)]}$$

Απόδειξη:

$$[p\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)]^{-\nu} = \frac{1}{[p\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\nu}} =$$

Προσοχή: μηδέν και όχι θ

$$= \frac{1}{p^{\nu}\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)^{\nu}} = \frac{1\cdot(\cos 0 + i\sin 0)}{p^{\nu}\cdot[\cos(\nu\theta) + i\sin(\nu\theta)]} =$$

$$= p^{-\nu}\cdot[\cos(0-\nu\theta) + i\sin(0-\nu\theta)] =$$

$$= p^{-\nu}\cdot[\cos(-\nu\theta) + i\sin(-\nu\theta)]$$

Angelos Giannoulas

Άσκηση

Αν $z = -\sqrt{3} + i$, να βρείτε το z^{1998}

Υπόδειξη:

1. Μετατρέψτε πρώτα τον μιγαδικό στην τριγωνομετρική του μορφή με το πρωτεύον μέρισμα
2. Στη συνέχεια κάντε χρήση του θεωρήματος του Moivre για να υπολογίσετε τη δύναμη

Angelos Giannoulas

Λύση

$$z=2[\cos(\frac{5\pi}{6})+i\cdot\sin(\frac{5\pi}{6})]$$

$$\text{Άρα } z^{1998}=2^{1998}\cdot[\cos(1998\frac{5\pi}{6})+i\cdot\sin(1998\frac{5\pi}{6})]=$$

$$=2^{1998}\cdot[\cos(333\cdot5\pi)+i\cdot\sin(333\cdot5\pi)]=2^{1998}\cdot(\cos\pi+i\cdot\sin\pi)=$$

$$=-2^{1998}$$

Διότι:

cos(333·5π) = cos1665π = cosπ = -1

sin(333·5π) = sin1665π = sinπ = 0

εφόσον 1665=1664+1=(2*832)+1

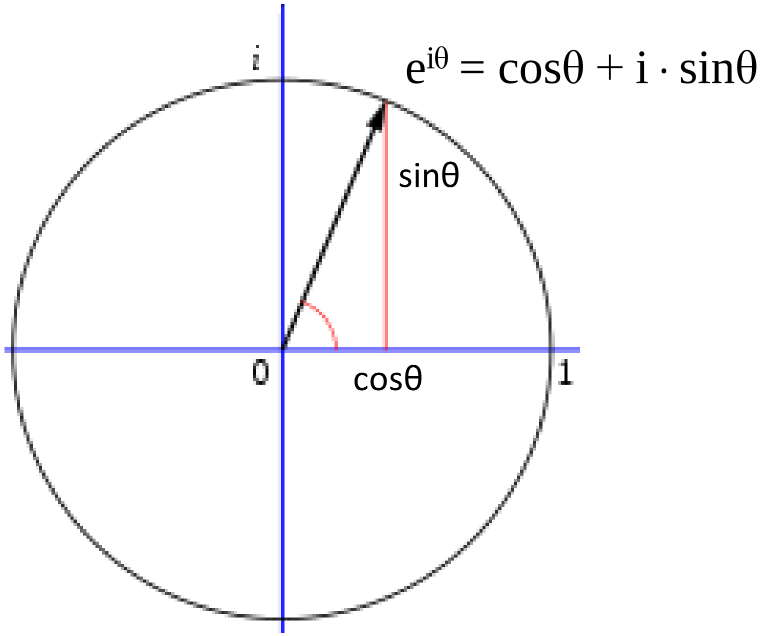
Angelos Giannoulas

Μορφή Euler (Εκθετική μορφή)

Ο Euler μας λέει ότι για **κάθε πραγματικό αριθμό θ** (σε ακτίνια) ισχύει η επόμενη εκθετική μορφή:

$$\mathbf{e^{i\theta} = \cos\theta + i \cdot \sin\theta}$$

Γεωμετρική ερμηνεία:



Άρα κάθε μιγαδικός μπορεί να γραφτεί στην εκθετική μορφή:

$$\boxed{\mathbf{z} = |z|\cdot(\cos\theta + i\cdot\sin\theta) = \mathbf{|z|\cdot e^{i\theta}}}$$

με θ = Arg(z)

Angelos Giannoulas

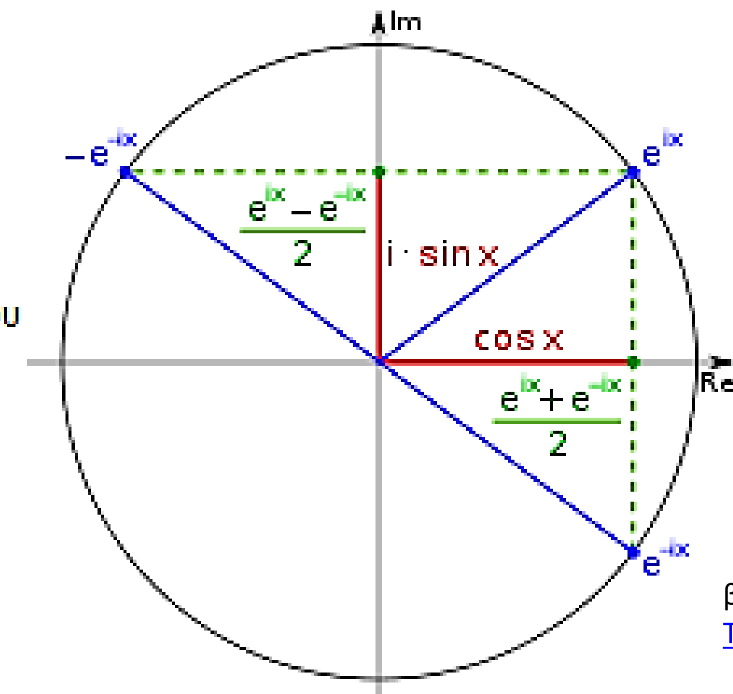
cos & sin από την μορφή Euler

(1) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\cdot\sin\theta$

(2) $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\cdot\sin\theta$

εφόσον
$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\cdot\sin(-\theta) = \cos(\theta) - i\cdot\sin(\theta)$

(1) & (2)
$$\begin{cases} e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \\ e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2\, i\cdot\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \& \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$



Σχέση μεταξύ ημιτόνου, συνημιτόνου και εκθετικής συνάρτησης

βλ. https://el.wikipedia.org/wiki/Τύπος_του_Όιλερ

Angelos Giannoulas

Πράξεις με την εκθετική μορφή

1. Αν $n \in \mathbb{Z}$, τότε $z^n = \rho^n \cdot e^{in\theta}$

2. $\hat{z} = \rho \cdot e^{-i\theta}$

3. $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \rho' \ \ \& \\ \theta - \theta' = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}$

4. $z \cdot z' = \rho \cdot \rho' \cdot e^{i(\theta+\theta')}$

5. $z / z' = (\rho / \rho') \cdot e^{i(\theta-\theta')}$

6. $z^{-1} = (1/\rho) \cdot e^{-i\theta}$

Angelos Giannoulas

Παράδειγμα

$$\text{Αν } z_1 = -\sqrt{3}+i,\ z_2 = 1+\sqrt{3}\cdot i$$

$$\text{Βρείτε τα: } z_1 \cdot z_2 \ \ \&\ \ z_1 / z_2$$

Απάντηση:

$$z_1 = -\sqrt{3}+i = 2\ (\cos\frac{5\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{5\pi}{6})$$

$$z_2 = 1+\sqrt{3}\cdot i=2\ (\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3})$$

Άρα:

$$z_1 \cdot z_2 =4(\cos(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3})+i\cdot\sin(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3})) = 4(\cos\frac{7\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{7\pi}{6})$$

$$z_1 / z_2 = \cos(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3})+i\cdot\sin(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2}$$

Angelos Giannoulas

Ορισμός ν-τάξης ρίζας μιγαδικού

Νιοστή ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού $z=a+b\cdot i$, ορίζεται κάθε μιγαδικός $\zeta=x+y\cdot i$ τ.ώ. $\zeta^{\nu} = z$, δηλ.

$$(x+y\cdot i)^{\nu} = a+b\cdot i$$

ν n $\in \mathbb{Z}^{+}$

Υπενθύμιση: **Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας**
'Κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο μίας μεταβλητής και βαθμού *n* *με μιγαδικούς συντελεστές* έχει ακριβώς *n μιγαδικές ρίζες*'

Αν $z=\rho\cdot(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)$, $z\neq 0$, τότε :

υπάρχουν ακριβώς ν διαφορετικές ρίζες

$$\boxed{z_{\kappa} = \sqrt[\nu]{\rho}\cdot\left(\cos\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}+i\cdot\sin\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}\right),\ \kappa=0..\nu\text{-}1}$$

δηλ. επαληθεύουν την εξίσωση: $\boldsymbol{\zeta^{\nu} = z}$, όπου $\zeta\in \mathbb{C}^{*}$

Angelos Giannoulas

Άσκηση

Να βρεθούν οι κυβικές ρίζες του $z=\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{2}$

Λύση:

Η πολική μορφή του $z=2(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4})$, άρα οι κυβικές του ρίζες:

$$z_0=\sqrt[3]{2}\cdot(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\cdot 0\cdot\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\cdot 0\cdot\pi}{3})=\sqrt[3]{2}\cdot(\cos\frac{\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{\pi}{12})$$

- Οι z_1 & z_2 να λυθούν ως άσκηση

Οι 3 ρίζες z_0, z_1, z_2 διαιρούν τον κύκλο $K(0,\sqrt[3]{2})$ σε 3 ίσα τόξα (γωνίας 2π/3)

Angelos Giannoulas

Διωνυμική εξίσωση

Διωνυμική λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής:

$$\boxed{z^{\nu} = \zeta}$$ ζ∈ $\mathbb{C}^*$ & ν n ∈ $\mathbb{Z}^+$

Παράδειγμα: Να λύσετε την $z^5 = -32 \cdot i$

Λύση:

$$\text{Εφόσον το } -i = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i \cdot \sin(-\frac{\pi}{2})$$

$$\text{Άρα } z^5 = -32 \cdot i = 32[\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \cdot \sin(-\frac{\pi}{2})]$$

Άρα από τον ορισμό της ρίζας ν-οστής τάξης:

$$z_k = \sqrt[5]{32}[\cos(\frac{2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}}{5}) + i \cdot \sin(\frac{2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}}{5})] \text{ για k=0...4}$$

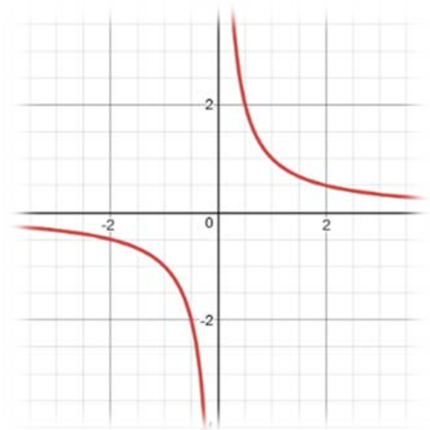
Angelos Giannoulas

Ασύμπτωτες

Διαφορικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

Angelos Giannoulas

Άπειρα όρια: **Οριζόντιες και κατακόρυφες ασύμπτωτες**



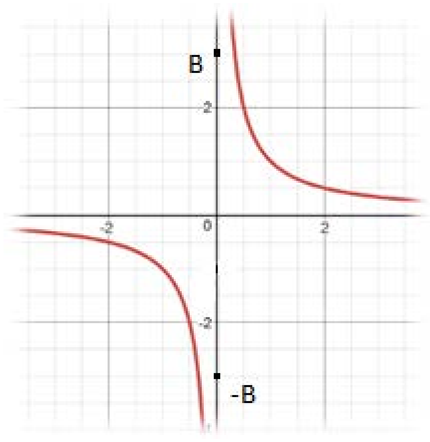
Έστω η f(x)=1/x, τότε παρατηρούμε ότι:

- καθώς x→+∞, (1/x)→0 & $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x})=0$
- καθώς x→-∞, (1/x)→0 & $\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{x})=0$

Λέμε ότι η γραφική παράσταση «τείνει ασυμπτωτικά» σε μια ευθεία όταν η απόσταση του γραφήματος της συνάρτησης και της ευθείας τείνει στο μηδέν. Η ευθεία λέγεται «ασύμπτωτη» της γραφικής παράστασης

Επίσης στο π.χ. της f(x)=1/x, όποιο Β>0 και να διαλέξω πάνω στην (ασύμπτωτη) yy', υπάρχουν άπειρα x τ.ώ. f(x)>B,

δηλ. $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}(\frac{1}{x})=+\infty$



(Όμοια για f(x)<-B, δηλ. $\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}(\frac{1}{x})=-\infty$)

Angelos Giannoulas

Ορισμός

Μία ευθεία y=b είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης y=f(x) αν ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad ή \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

Μία ευθεία x=α είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης y=f(x) αν ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad ή \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Angelos Giannoulas

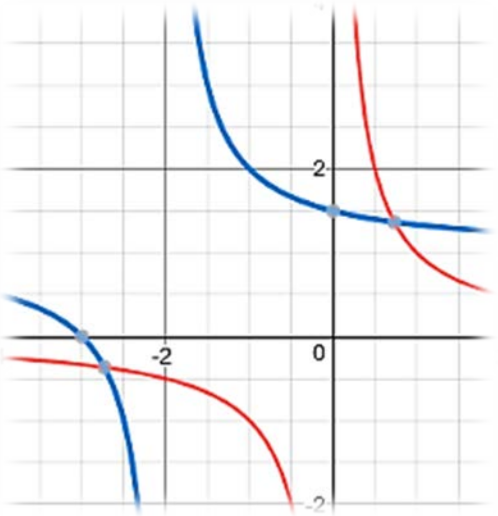
Παράδειγμα

Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της $y = \dfrac{x+3}{x+2}$

δηλ. να βρούμε την συμπεριφορά της y καθώς
1. x→ ±∞
2. x→ - 2 (όπου μηδενίζεται ο παρονομαστής)

Επειδή: $y = \dfrac{x+3}{x+2} = 1 + \dfrac{1}{x+2}$

Έχω το γράφημα της 1/x μετατοπισμένο 1 μονάδα πάνω και 2 μονάδες αριστερά. Άρα οι ασύμπτωτες είναι οι y=1 και x=-2



Angelos Giannoulas

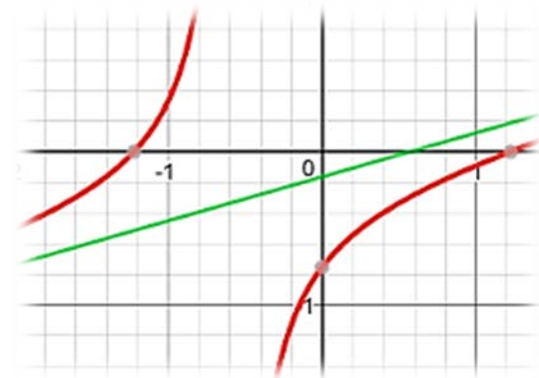
Πλάγια ασύμπτωτη ρητών συναρτήσεων με
βαθμός αριθμητής = βαθμός παρονομαστής +1

Βρίσκουμε την πλάγια ασύμπτωτη διαιρώντας κατά μέλη ώστε να εκφράσουμε την συνάρτηση με κάποιο <u>υπόλοιπο</u> τ.ώ. τείνει στο 0 όταν x→ ±∞

(δηλ. της μορφής: (αx+β)+υ(x))

Παράδειγμα: Ποια η πλάγια ασύμπτωτη της

$$y=\frac{2x^2-3}{7x+4}=\underbrace{(\frac{2}{7}x-\frac{8}{49})}_{\text{γραμμική συνάρτηση } g(x)}-\underbrace{\frac{115}{49(7x-4)}}_{\text{υπόλοιπο}}$$



Καθώς x→ ±∞ το <u>υπόλοιπο</u> →0, δηλ. η g(x) είναι η πλάγια ασύμπτωτη της f(x) = y

$$\frac{2x^2-3}{7x+4}=(\frac{2}{7}x-\frac{8}{49})\cdot(7x+4)-\frac{115}{49}$$

$$\text{Άρα y}=\frac{2x^2-3}{7x+4}=\frac{(\frac{2}{7}x-\frac{8}{49})\cdot(7x+4)-\frac{115}{49}}{7x+4}=(\frac{2}{7}x-\frac{8}{49})-\frac{115}{49(7x+4)}$$

Angelos Giannoulas

Άσκηση

Ποια η πλάγια ασύμπτωτη της $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x - 9}{x - 1}$

Υπόδειξη: όπως η προηγούμενη άσκηση (ασύμπτωτη: y=2x-2)

Angelos Giannoulas

Κανόνες de l’ Hospital

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου οδηγούμαστε να βρούμε το όριο σε μορφές όπως:
0/0 ή ±∞ / ±∞ (π.χ. $f(x)=(e^x-1)x^3$)

1ο Θεώρημα de l’ Hospital (για 0/0):

όπου x_0 πεπερασμένο ή ±∞

Αν $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \ \& \ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0 \\ \& \ \exists \ \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \text{ πεπερασμένο ή } \pm\infty \end{cases}$ $\Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

2ο Θεώρημα de l’ Hospital (για ±∞/±∞):

όπου x_0 πεπερασμένο ή ±∞

Αν $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \ \& \ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty \\ \& \ \exists \ \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \text{ πεπερασμένο ή } \pm\infty \end{cases}$ $\Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια

Angelos Giannoulas

Παράδειγμα

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}$

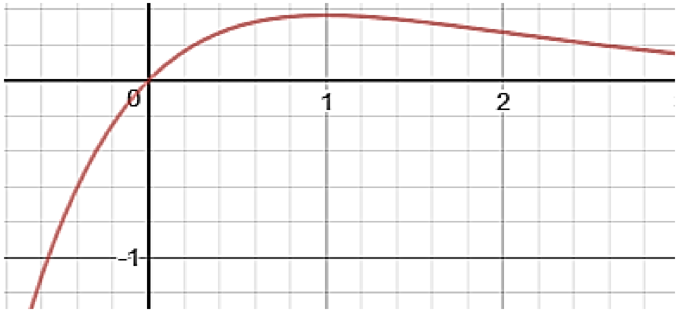
Λύση:

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ θα χρησιμοποιήσω το 2ο Θεώρημα:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$$

Angelos Giannoulas

Άσκηση



Ποιες είναι οι ασύμπτωτες ευθείες της συνάρτησης $f(x) = x/e^x$?

Λύση:

- f συνεχής στο $\mathbb{R}$
- Από την C_f βλέπω ∄ κατακόρυφη ασύμπτωτη
- Άρα θα ψάξω το όριο στο ± ∞

(i) $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} 1}{\lim\limits_{x\to-\infty} e^x}$$

$$\text{που είναι της μορφής } \frac{1}{0}, \text{ το οποίο δεν ορίζεται}$$

δηλ. η **f δεν έχει ασύμπτωτη στο -∞**

(ii) $$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{e^x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e^x}} = 0$$

δηλ. **η f έχει ασύμπτωτη στο +∞** την ευθεία y=0

Angelos Giannoulas

Μελέτη & Χάραξη της C_f

Βήμα 1ο: Βρίσκω το Π.Ο.(f)

Βήμα 2ο: Εξετάζω την συνέχεια της f στο Π.Ο.(f)

Βήμα 3ο: (3i) Βρίσκω τις f’ και f’’

(3ii) Κατασκευάζω τους πίνακες των πρόσημων

(3iii) Από την f’ προσδιορίζω τα ακρότατα της f

(3iv) Από την f’’ προσδιορίζω τα διαστήματα κοιλότητας

Βήμα 4ο: Μελετάω την συμπεριφορά της C_f με τις ασύμπτωτες

Βήμα 5ο: Συνοψίζω και δημιουργώ την C_f

Μην ξεχνάτε:

- αν **f άρτια** → η C_f συμμετρική γγ’
- αν **f περιττή** → η C_f συμμετρική xx’
- αν **f περιοδική με περίοδο T**→ ψάχνω την C_f μόνο σε διάστημα πλάτους T

Angelos Giannoulas

Ολοκλήρωση

Ολοκληρωτικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

Angelos Giannoulas

Το ζητούμενο

- Είδαμε μεθόδους υπολογισμού για το πώς μεταβάλλονται οι συναρτήσεις ‘στιγμιαία’.
- Αν ‘αθροίσουμε’ αυτές τις στιγμιαίες μεταβολές θα έχουμε ένα συνολικό αποτέλεσμα για ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα;
- **Μέλημά μας δηλ. είναι**:
  1. Αν ξέρω την τιμή f(c)
  2. Αν ξέρω & την f’(x)

  $\Rightarrow$ Πώς θα βρω την f(x)?

- **Βήμα 1°** : Βρίσκω όλες τις συναρτήσεις (F): F’(x) = f(x)
- **Βήμα 2°** : Δημιουργώ τον γενικό τύπο που περιέχει όλες τις συναρτήσεις αυτές (*αόριστο ολοκλήρωμα*)
- **Βήμα 3°** : Από την γνωστή τιμή f(c) στο c, βρίσκω την σωστή συνάρτηση f(x)

Αντιπαράγωγος της f

‘παράγουσα’
ή ‘αρχική συνάρτηση’

Angelos Giannoulas

Ορισμός: Έστω f(x) με ΠΟ(f)

F(x) αντιπαράγωγος της f αν:

1. υπάρχει F’(x)
2. F’(x) = f(x), για κάθε x ϵ ΠΟ(f)

Το σύνολο των αντιπαραγώγων της f = ‘Αόριστο ολοκλήρωμα της f’

Το αόριστο ολοκλήρωμα της f συμβολίζεται ως: ∫f(x)dx

<u>**Υπενθυμίσεις**</u>:

(1) Θ.Μ.Τ.: Αν f(x) στο [α,β] & ∃ f’ στο (α,β) ⇒ ∃ τουλάχιστον 1 c ϵ(α,β):

f’(c) = (f(β) - f(α)) / (β - α)

(2) Πόρισμα 2^{ο} του ΘΜΤ: Αν f’(x)=g’(x), για κάθε x ϵ (α,β) ⇒ ∃ c σταθερά:

f(x) = g(x) + c , για κάθε x ϵ (α,β)

Από το (2) αν βρω μία αντιπαράγωγο F ⇒ οι υπόλοιπες διαφέρουν από την F κατά μία σταθερά, δηλ.

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c}$$

Διαβάζεται: «**Το αόριστο ολοκλήρωμα της f ως προς x**»

(c η αυθαίρετη σταθερά)

π.χ.: ∫2x · dx = x^2 + c

Η f μπορεί δηλ. να είναι x^2+1, x^2+2, $x^2-π$ (όλες αντιπαράγουσες της 2x)

Angelos Giannoulas

Βασικά ολοκληρώματα

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \in Z\backslash\{-1\}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$ (αν x>0 το ∫ = lnx + c)

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \alpha^x dx = \frac{1}{\ln\alpha}\alpha^x + c,\ \alpha>0,\ \alpha \neq 1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \quad \& \quad \int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c \quad \& \quad \int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int 0 \cdot dx = c$$

$$\int 1 \cdot dx = x + c$$

$$\int k \cdot dx = kx + c$$

τους τύπους των ∫tan & ∫cot επειδή είναι πιο σύνθετοι θα τους δούμε αργότερα σε άσκηση

Παραδείγματα

Angelos Giannoulas

Παράδειγμα 1ο: $\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+c$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}}+c=2\sqrt{x}+c$$

$$\int \sin 2x dx=-\frac{\cos 2x}{2}+c$$

$$\int \cos\frac{x}{2}dx=\int \cos(\frac{1}{2}x)dx=\frac{\sin(\frac{1}{2}x)}{\frac{1}{2}}+c = 2\sin(\frac{1}{2}x)+c$$

Παρατήρηση: Συχνά η ολοκλήρωση είναι πιο περίπλοκη. Όμως έχουμε <u>πάντα</u> την δυνατότητα <u>επαλήθευσης</u>, αφού μπορούμε να παραγωγίσουμε το 2ο μέλος αν μας δίνει την ολοκληρωτέα συνάρτηση

π.χ.: Ισχύει ότι : $\int x\cdot \cos x dx=x\sin x+\cos x+c$?

Πράγματι $(x\sin x+\cos x+c)'=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$

Angelos Giannoulas

Προβλήματα αρχικής συνθήκης

Είναι προβλήματα για τα οποία γνωρίζουμε μία τιμή f(c) για το σημείο c (αρχική τιμή: (c, f(c)) και την f'(x)

Παράδειγμα:

Ποια η καμπύλη με κλίση $3x^2$ στο σημείο (x,y) που περνά από το σημείο (1, -1);

δηλ. ξέρω την κλίση (=f'(x)) & ένα σημείο αρχικό (1, -1)

Λύση:

(α) $f'(x)=3x^2 \Leftrightarrow \int f'(x)dx = \int 3x^2\,dx \Leftrightarrow$

$f(x) + c_1 = x^3 + c_2 \Leftrightarrow f(x) = x^3 + c$ (*) (με $c= c_2 - c_1$)

(β) Η f περνά από το (1, f(1)) = (1, -1)

άρα από την (*) έχω: $-1 = 1 + c \Rightarrow c = -2$

Άρα η καμπύλη μου είναι η $y = f(x) = x^3 - 2$

Angelos Giannoulas

Αλγεβρικοί κανόνες

$$(i)\quad \int kf(x)dx = k\int f(x)dx,\ \ k \in R$$

$$(ii)\quad \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Πριν ψάξω το ολοκλήρωμα απλοποιώ την παράσταση

Παράδειγμα 1ο :

$$\int (x^2-2x+5)dx = \int x^2dx - 2\int xdx + 5\int dx = \frac{x^3}{3} + c_1 - 2\frac{x2}{2} + c_2 + 5x + c_3 = \frac{x^3}{3} - x2 + 5x + c$$

όπου $c=c_1+c_2+c_3$

Παράδειγμα 2ο :

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{3x}{\sqrt{x}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 3\int x^{\frac{1}{2}}dx - \int x^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + c$$

Άσκηση

Angelos Giannoulas

(i) $\int \sin^2 x dx = ?$

Υπενθύμιση: $\sin^2 x=(1-\cos 2x)/2$

$$\int \sin^2 x dx=\int \frac{1-\cos 2x}{2} dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int \cos 2x dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2}+c$$

(ii) $\int \cos^2 x dx = ?$

Υπενθύμιση: $\cos^2 x=(1+\cos 2x)/2$

$$\int \cos^2 x dx=\int \frac{1+\cos 2x}{2} dx=\ldots.=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c$$

Υπενθύμιση: 'Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης':

Αν f(u) παραγωγίσιμη στο u=g(x)
και αν g(x) παραγωγίσιμη στο x

$\Rightarrow$ $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$

ή σε μορφή Leibniz: dy/dx=dy/du·du/dx

= f'(u) · du

Angelos Giannoulas

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: $\int \sqrt{1+\mathrm{y}^2} \cdot 2\mathrm{y} \cdot \mathrm{dy}=?$

g(x)=u
f(g(x))=f(u)

Λύση:

Αν $u=1+y^2 \Rightarrow du=2ydy$

Άρα: $\int \sqrt{1+\mathrm{y}^2} \cdot 2\mathrm{y} \cdot \mathrm{dy}=\int \sqrt{\mathrm{u}}\mathrm{du} = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(1+y^2)^{\frac{3}{2}} + c$

Παράδειγμα 2: $\int \cos(5\theta+3)d\theta = ?$

Λύση: Αν $u=5\theta+3 \Rightarrow du=5\theta d\theta \Rightarrow d\theta =(1/5)\, du$

$$\int \cos(5\theta+3)d\theta = \int \cos u \cdot \frac{1}{5}du = \frac{1}{5}\int \cos u du =$$

$$\frac{1}{5}\sin u + c = \frac{1}{5}\sin(5\theta+3)+c$$

Angelos Giannoulas

Ασκήσεις

1η: $\int \sqrt{4\text{t-1}}\,\text{dt} = ?$

Λύση: αν u=4t-1 ⇒ du = 4dt ⇒ dt = du/4

Άρα: $\int \sqrt{4\text{t-1}}\,\text{dt} = \int \sqrt{\text{u}}\,\frac{\text{du}}{4} = \frac{1}{4}\int \sqrt{\text{u}}\,\text{du} = \frac{1}{4}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{6}(4t-1)^{\frac{3}{2}} + c$

2η: $\int x^2 \sin(x^3)\,dx = ?$

Λύση: αν u=x^3 ⇒ du = 3x^{2}dx ⇒ x^{2}dx = (1/3)du

Άρα: $\int x^2 \sin(x^3)\,dx = \int \sin(u)\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int \sin(u)\,du =$

$$\frac{1}{3}(-\cos u) + c = -\frac{1}{3}\cos(x^3) + c$$

Angelos Giannoulas

Άσκηση

Να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx = ?$

Λύση:

1ος τρόπος: αν u=x^2+1 ⇒ du = 3xdx

$$\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx = \int \frac{1}{u^{\frac{1}{3}}} du = \frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2} u^{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{2}{3}} + c$$

2ος τρόπος: αν u= $\sqrt[3]{x^2+1}$ ⇒ u^3=x^2+1 ⇒ 3u^2du = 2xdx

$$\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx = \int \frac{3u^2}{u} du = 3\int u du = 3\frac{u^2}{2} + c = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{x^2+1})^2 + c$$

Angelos Giannoulas

Τριγωνομετρικοί αριθμοί

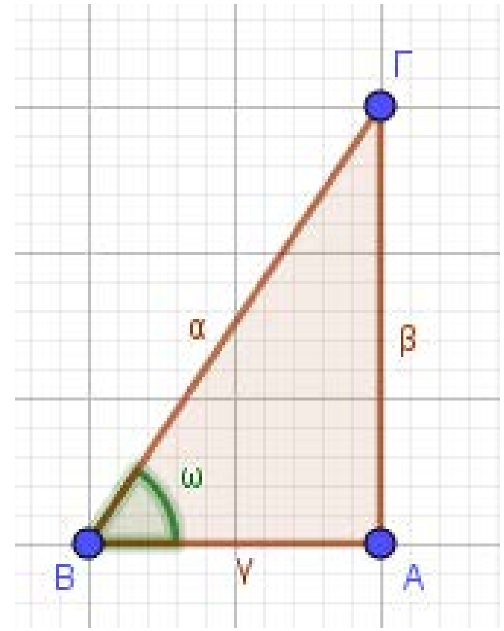
Στοιχεία Μιγαδικών

Angelos Giannoulas

Τριγωνομετρικοί αριθμοί …

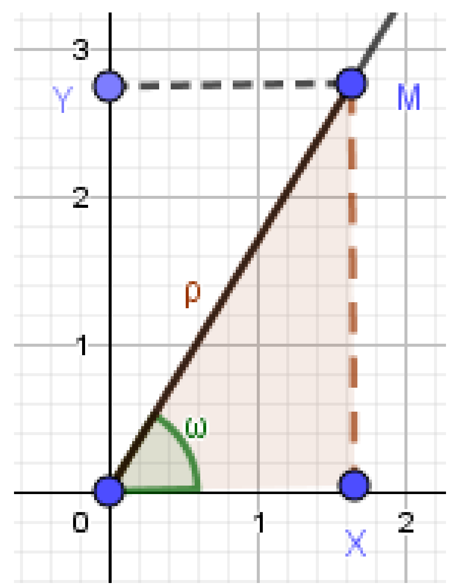
Οξείας γωνίας

$$
\begin{cases}
\sin\omega = \dfrac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \dfrac{ΑΓ}{ΒΓ} \\[2ex]
\cos\omega = \dfrac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \dfrac{ΑΒ}{ΒΓ} \\[2ex]
\tan\omega = \dfrac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}} = \dfrac{ΑΓ}{ΑΒ} \\[2ex]
\cot\omega = \dfrac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{απέναντι κάθετη}} = \dfrac{ΑΒ}{ΑΓ}
\end{cases}
$$



0° ≤ ω ≤ 360°

$$
\begin{cases}
\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\[2ex]
\text{Άρα } \sin\omega = \dfrac{y}{\rho} \ \& \ \cos\omega = \dfrac{x}{\rho} \\[2ex]
\tan\omega = \dfrac{y}{x} \ \& \ \cot\omega = \dfrac{x}{y}
\end{cases}
$$



Angelos Giannoulas

Τριγωνομετρικοί αριθμοί (συνέχεια)

Γωνίες ω > 360ο

Έστω **ω** = $n \cdot 360^o + \mu^o$, $n \in \mathbb{Z}$, $0^o \leq \mu \leq 360^o$

Βρίσκουμε ότι ισχύουν οι επόμενες ισότητες:

- $\sin\omega = \sin(\kappa \cdot 360^o + \mu) = \sin\mu$
- $\cos\omega = \cos(\kappa \cdot 360^o + \mu) = \cos\mu$
- $\tan\omega = \tan(\kappa \cdot 360^o + \mu) = \tan\mu$
- $\cot\omega = \cot(\kappa \cdot 360^o + \mu) = \cot\mu$

Angelos Giannoulas

Τριγωνομετρικοί αριθμοί (συνέχεια)

Γωνίες ω > 360^o

Έστω **ω** = $n \cdot 360^o + \mu^o$, $n \in \mathbb{Z}$, $0^o \le \mu \le 360^o$

Βρίσκουμε ότι ισχύουν οι επόμενες ισότητες:

- $\sin\omega = \sin(\kappa \cdot 360^o + \mu) = \sin\mu$
- $\cos\omega = \cos(\kappa \cdot 360^o + \mu) = \cos\mu$
- $\tan\omega = \tan(\kappa \cdot 360^o + \mu) = \tan\mu$
- $\cot\omega = \cot(\kappa \cdot 360^o + \mu) = \cot\mu$

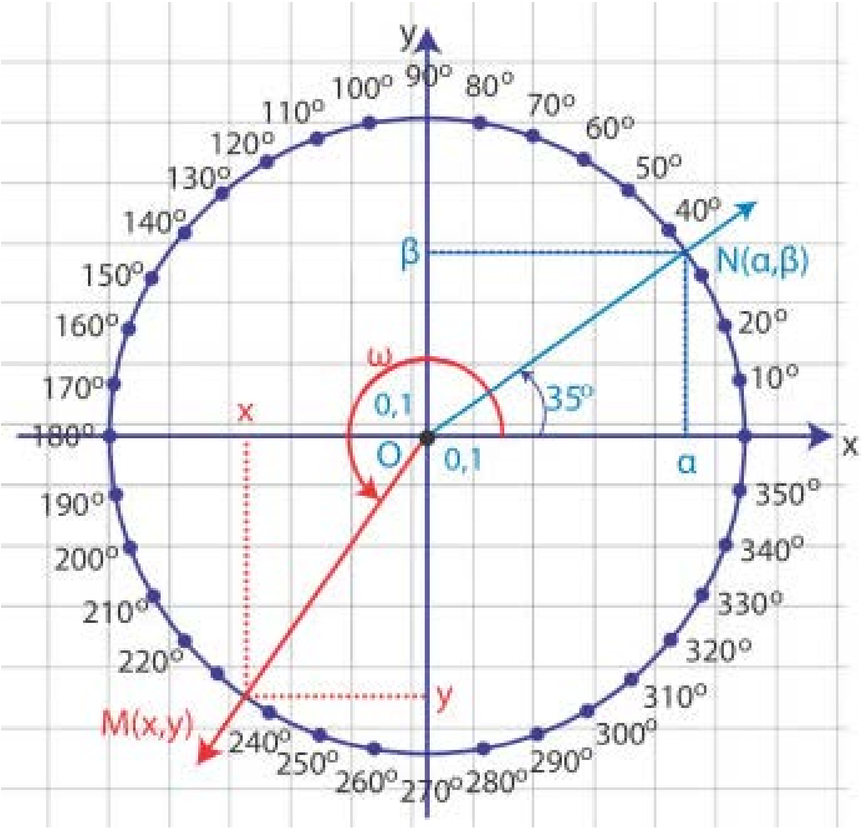
Άρα οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της **ω** είναι ίσοι με αυτούς της γωνίας μ

Angelos Giannoulas

Ο τριγωνομετρικός κύκλος

Μας βοηθάει με σύντομο τρόπο να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς (κατά προσέγγιση)

Είναι ένας κύκλος με κέντρο το (0,0) και ακτίνα ρ = 1



Σχήμα: Άλγεβρα Β' Γεν. Λυκείου, κεφ. 3.1

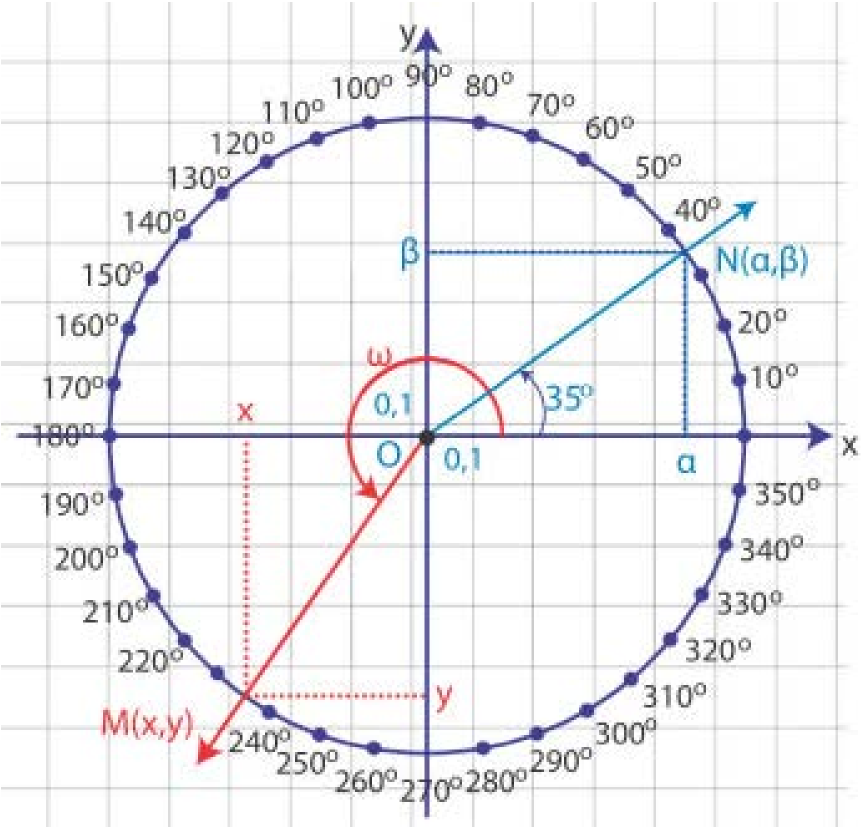
Angelos Giannoulas

Ο τριγωνομετρικός κύκλος

Μας βοηθάει με σύντομο τρόπο να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς (κατά προσέγγιση)

Είναι ένας κύκλος με κέντρο το (0,0) και ακτίνα ρ = 1

Y: είναι ο άξονας των ημιτόνων (sin)
X: ο άξονας των συνημίτονων (cos)



Σχήμα: Άλγεβρα Β' Γεν. Λυκείου, κεφ. 3.1

Από τον κύκλο βλέπουμε ότι:

$\boxed{-1 \leq \sin\omega \leq +1}$ & $\boxed{-1 \leq \cos\omega \leq +1}$

Angelos Giannoulas

Τριγωνομετρικοί αριθμοί
Γεωμετρική ερμηνεία

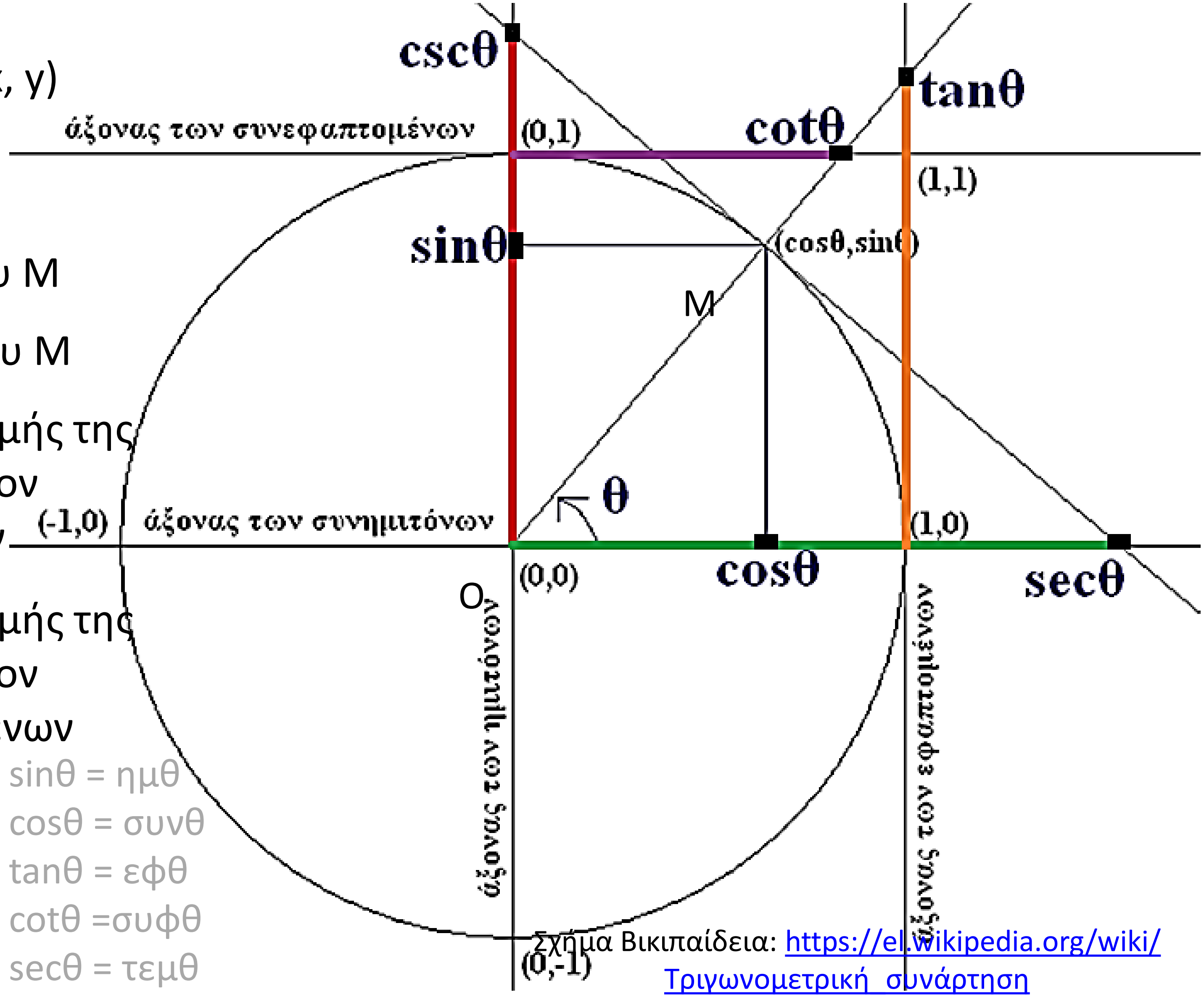
Έστω το σημείο Μ (x, y)
x: τετμημένη
& y: τεταγμένη

sinθ = τεταγμένη του Μ

cosθ = τετμημένη του Μ

tanθ = τεταγμένη τομής της ημιευθείας ΟΜ με τον άξονα εφαπτομένων

cotθ = τετμημένη τομής της ημιευθείας ΟΜ με τον άξονα συνεφαπτομένων



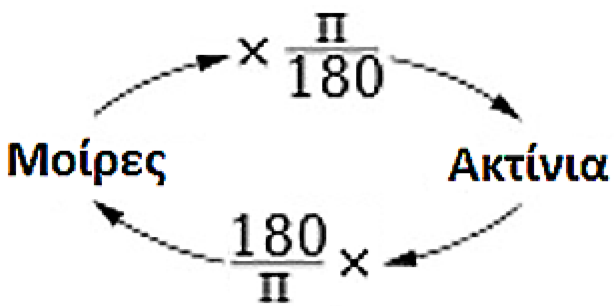
sinθ = ημθ
cosθ = συνθ
tanθ = εφθ
cotθ =συφθ
secθ = τεμθ
cscθ = στεμθ

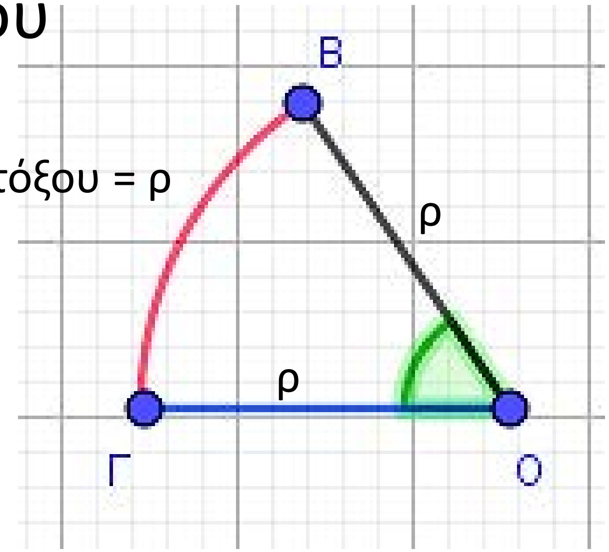
Σχήμα Βικιπαίδεια: https://el.wikipedia.org/wiki/Τριγωνομετρική_συνάρτηση#Ορισμός_των_τριγωνομετρικών_συναρτήσεων

Angelos Giannoulas

Μετατροπές γωνίας

1 Ακτίνιο (1 rad) είναι η γωνία που ορίζει σε οποιονδήποτε κύκλο, μήκος τόξου ίσο με την ακτίνα του





RapidTables

$$\begin{cases} 1^{o} = \dfrac{\pi}{180} \cdot 1\,\text{rad} \\[2ex] 1\,\text{rad} = \dfrac{180}{\pi} \cdot 1^{o} \end{cases} \quad \text{δηλ.} \quad \begin{cases} \text{μοίρες} = \dfrac{\pi}{180} \cdot X \cdot \text{ακτίνια} \\[2ex] \text{ακτίνια} = \dfrac{180}{\pi} \cdot Y \cdot \text{μοίρες} \end{cases}$$

Angelos Giannoulas

Τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\sin^2\omega + \cos^2\omega = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \tan\omega &= \frac{\sin\omega}{\cos\omega} \\ \cot\omega &= \frac{\cos\omega}{\sin\omega} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan\omega \cdot \cot\omega = 1$$

$$\cos^2\omega = \frac{1}{1+\tan^2\omega} \quad \& \quad \sin^2\omega = \frac{\tan^2\omega}{1+\tan^2\omega}$$

Angelos Giannoulas

Τριγωνομετρικά αθροίσματα

- **$\cos (a + b)$** $= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
- **$\cos (a - b)$** $= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$
- **$\sin (a \pm b)$** $= \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b$
- **$\sin (2a)$** $= \cos^2 a - \sin^2 b = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
- **$\sin a \cdot \cos b$** $= ½ \cdot [\sin (a + b) + \sin (a - b)]$
- **$\cos a \cdot \sin b$** $= ½ \cdot [\sin (a + b) - \sin (a - b)]$
- **$\sin a \cdot \sin b$** $= ½ \cdot [\cos (a - b) - \cos (a + b)]$
- **$\cos a \cdot \cos b$** $= ½ \cdot [\cos (a + b) + \cos (a - b)]$

Angelos Giannoulas

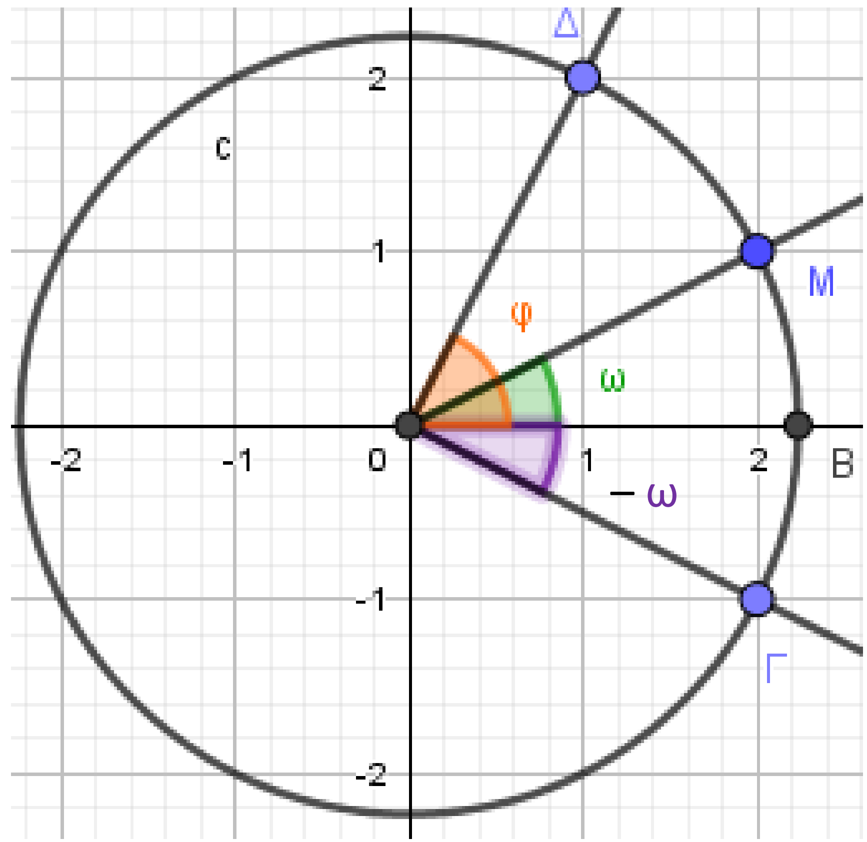
Γωνίες αντίθετες
Γωνίες συμπληρωματικές

Γωνίες αντίθετες (ω & – ω)

- cos (– ω) = cos ω
- sin (– ω) = – sin ω
- tan (– ω) = – tan ω
- cot (– ω) = – cot ω

Γωνίες συμπληρωματικές (ω & 90ο– ω)

- cos (90ο– ω) = sin ω
- sin (90ο– ω) = cos ω
- tan (90ο– ω) = cot ω
- cot (90ο– ω) = tan ω



ϕ = 90ο - ω

Angelos Giannoulas

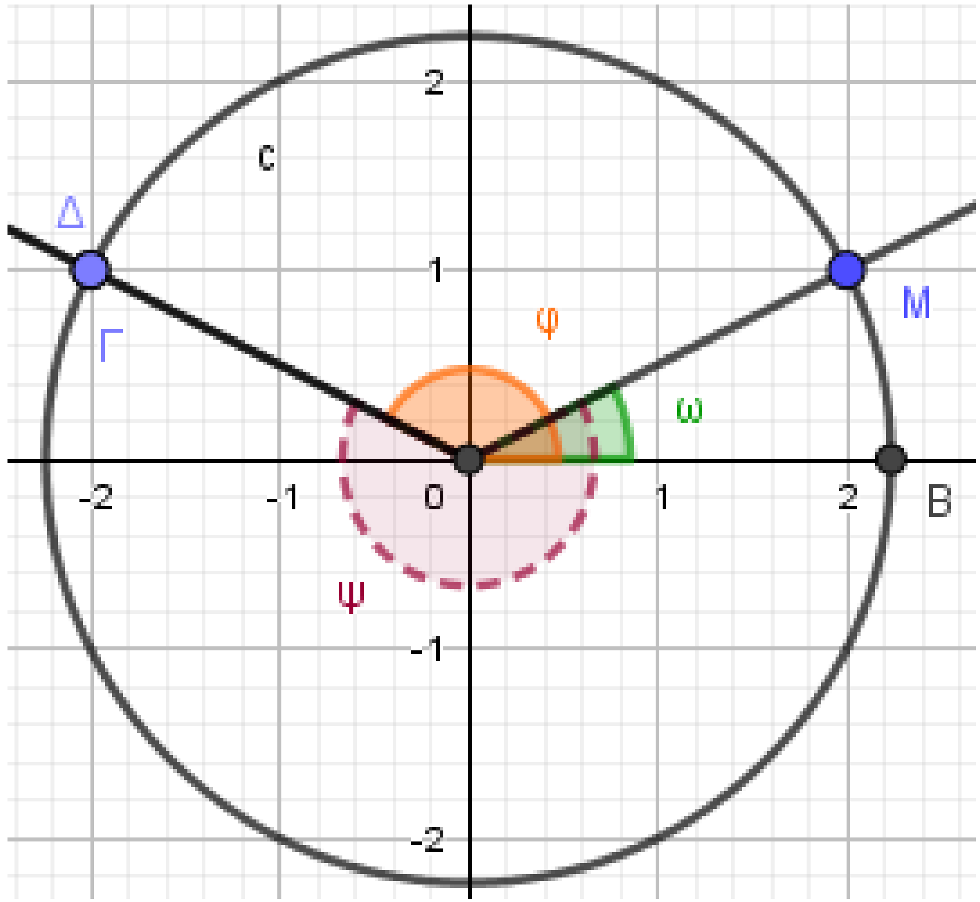
Γωνίες παραπληρωματικές
Γωνίες με διαφορά 180ο

Γωνίες παραπληρωματικές
(ω & 180ο– ω)

- cos (180ο– ω) = – cos ω
- sin (180ο– ω) = sin ω
- tan (180ο– ω) = – tan ω
- cot (180ο– ω) = – cot ω

Γωνίες με διαφορά 180ο
(ω & 180ο + ω)

- cos (180ο+ ω) = – cos ω
- sin (180ο+ ω) = – sin ω
- tan (180ο+ ω) = tan ω
- cot (180ο+ ω) = cot ω



ϕ = 180ο – ω
ψ – ω = 180ο