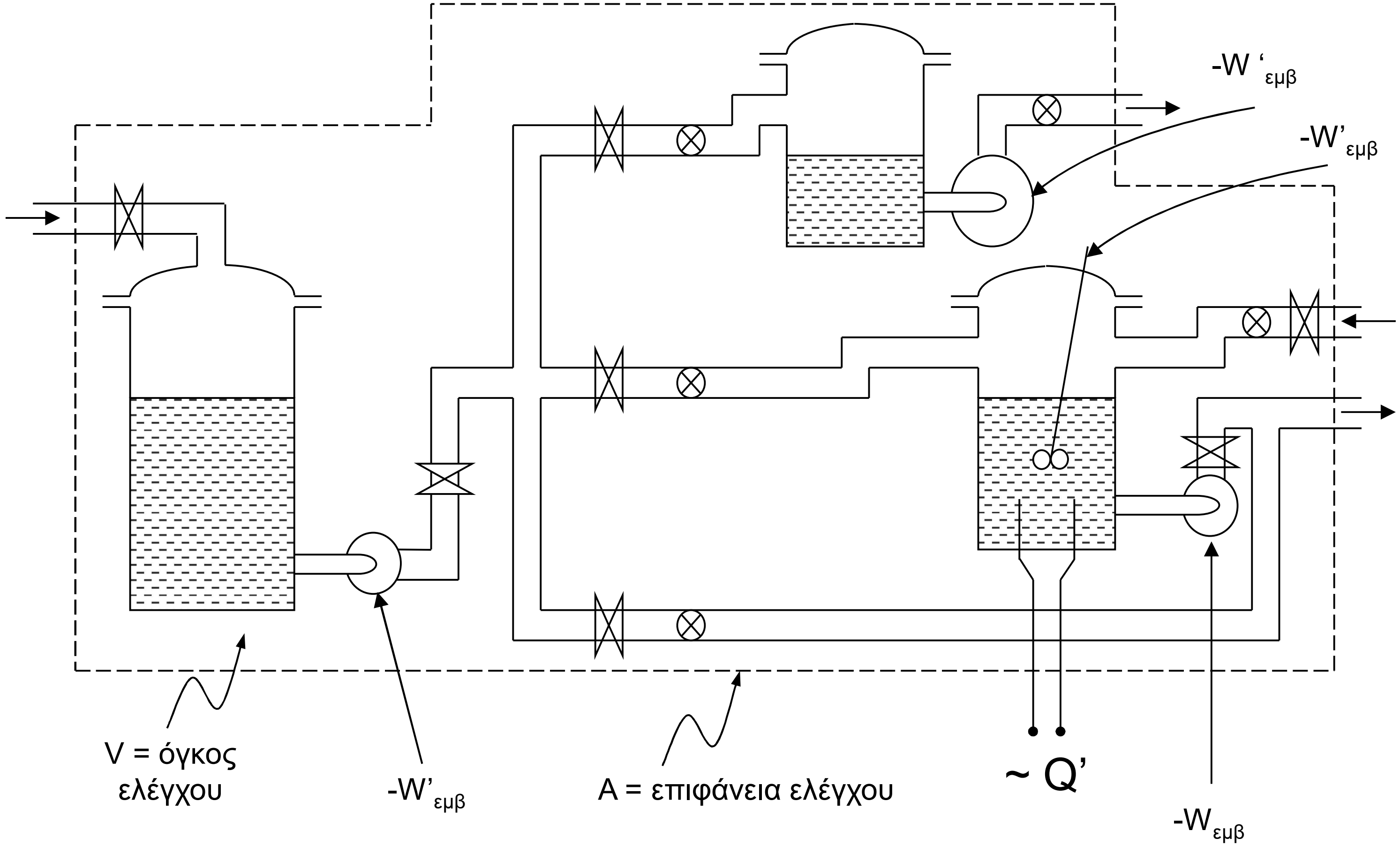
Φυσικές Διεργασίες ΙΙ
Σωληνώσεις, αντλίες, εναλλάκτες

Σημειώσεις Α. Χ. Παγιατάκης
Καθηγητής, Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

1ο Μάθημα στις Σωληνώσεις
Εφαρμογές του Μακροσκοπικού Ισοζυγίου Ενέργειας σε σωληνώσεις

Χριστάκης Παρασκευά
Καθηγητής,
Τμήμα Χημικών Μηχανικών,
Πανεπιστήμιο Πατρών

ΣΩΛΗΝΏΣΕΙΣ



Σχήμα 11.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΔΙΚΤΥΟΥ ΣΩΛΗΝΩΣΕΩΝ

ΣΩΛΗΝΩΣΕΙΣ

Θεώρημα μεταφοράς του Reynolds $\boxed{\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \frac{d}{dt}\iiint_V \eta\rho d\forall + \iint_A \eta\rho \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}} dA}$

N εκτατική ιδιότητα
η εντατική ιδιότητα

Μακροσκοπικό ισοζύγιο μάζας

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho \, d\forall + \iint_A \rho \, \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}} dA = 0$$

dM’/dt =0, η=1

ρ = πυκνότητα, **v** = ταχύτητα, = ορθομοναδιαίο άνυσμα

- **Μακροσκοπικό ισοζύγιο γραμμικής ορμής** dJ’/dt =ΣF, η=**v**

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \mathbf{v}\rho \, d\forall + \iint_A \mathbf{v}\rho \, \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}} dA = \mathbf{F}_\Sigma + \mathbf{F}_E = \mathbf{F}$$

dJ’/dt =ΣF= m **a**

- $\mathbf{F}_\Sigma$ = σωματική δύναμη επί του όγκου ελέγχου
- $\mathbf{F}_E$ = συνισταμένη των επιφανειακών δυνάμεων επί του όγκου ελέγχου
- **F** = συνισταμένη όλων των δυνάμεων επί του όγκου ελέγχου.

ΣΩΛΗΝΩΣΕΙΣ

- **<u>Μακροσκοπικό ισοζύγιο ενέργειας</u>**

$$\left.\frac{dE}{dt}\right)_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \frac{d}{dt}\iiint_V e\rho d\forall + \iint_A e\rho \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}} dA$$

dE’/dt, η=**e**

E= U + KE + ΔE= ΟΛΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

e= ειδική ολική ενέργεια (= E α.μ.μ)= u+(1/2) V^2 + gz

u= εσωτερική ενέργεια α.μ.μ.

½ V^2= κινητική ενέργεια α.μ.μ.

gz= δυναμική ενέργεια α.μ.μ.

1^ος^ Θερμοδυναμικός Νόμος $$\left.\frac{dE}{dt}\right)_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = (\overset{*}{Q} - \overset{*}{W})_{\sigma\upsilon\sigma\tau}$$

Όπου $\overset{*}{Q}$ ο ρυθμός παροχής θερμότητας από το περιβάλλον προς το σύστημα

Και **Ẇ** ο ρυθμός παραγωγής μηχανικού έργου από το σύστημα προς το περιβάλλον

ΣΩΛΗΝΩΣΕΙΣ

- Ρυθμός παραγωγής μηχανικού έργου

$$\overset{*}{W} = \overset{*}{W}_{\varepsilon\mu\beta} + \overset{*}{W}_{p+\mu} + \overset{*}{W}_{\acute{\alpha}\lambda\lambda\alpha}$$

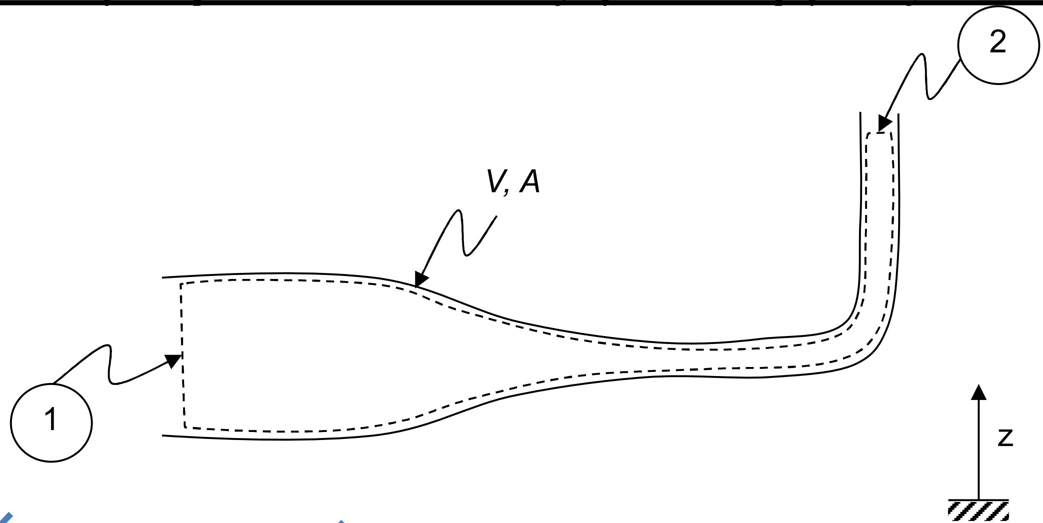
Α) $\acute{W}_{\varepsilon\mu\beta}$ ρυθμός παραγωγής μηχανικού έργου μέσω εμβόλου (ή άξονα)

Β) $\acute{W}_{p+\mu}$ ρυθμός παραγωγής μηχανικού έργου επάνω στην επιφάνεια ελέγχου από το άνυσμα της τάσεως (διατμητικές και ορθές τάσεις)

Γ) $\acute{W}_{\acute{\alpha}\lambda\lambda\alpha}$ παροχή ηλεκτρικής ενέργειας, απορρόφηση ακτινοβολίας, κλπ

ΣΩΛΗΝΩΣΕΙΣ

Εφαρμογή του μακροσκοπικού ισοζυγίου ενέργειας σε σωληνώσεις



$$\dot{Q} - \cancel{\dot{W}_{εμβ}} - \dot{W}_{p+μ} - \cancel{\dot{W}_{άλλα}} = \frac{d}{dt}\iiint_V eρ\, d\forall + \iint_A eρ\, \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA$$

Ẇεμβ=0, Ẇάλλα =0

$$\dot{W}_{p+\mu} \overset{(18)}{=} -\iint_A \mathbf{v}\cdot(\tilde{\boldsymbol{\pi}}\cdot\hat{\mathbf{n}})dA = -\iint_A \mathbf{v}\cdot(\tilde{\tau}\cdot\hat{\mathbf{n}})dA + \iint_A \mathbf{v}\cdot(p\tilde{\delta}\cdot\hat{\mathbf{n}})dA$$

Διατμητικές τάσεις

Κάθετες ή ορθές τάσεις

$$= -\iint_A \mathbf{v}\cdot(\cancel{\tilde{\tau}}\cdot\hat{\mathbf{n}})dA + \boxed{\iint_A p\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}dA}$$

$$\overset{*}{W} = \overset{*}{W}_{εμβ} + \overset{*}{W}_{p+μ} + \overset{*}{W}_{άλλα}$$

στα τοιχώματα, **v**=0, $(\mathbf{v}\cdot\tilde{\boldsymbol{\tau}})\cdot\hat{\mathbf{n}}$ **= 0**

ΣΩΛΗΝΩΣΕΙΣ

Αν ο όγκος ελέγχου εκλεγεί όπως στο σχήμα, δηλαδή παράλληλος στα τοιχώματα κατά μήκος του σωλήνα και κάθετος στη ροή στις εισόδους και εξόδους, τότε

- **στα τοιχώματα v = 0 ⇒ = 0,**
- **στις εισόδους & εξόδους** $\dot{W}_{p+\mu} \approx \boxed{\iint\limits_A p\ \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}dA}$

$$\left.\frac{dE}{dt}\right)_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \frac{d}{dt}\iiint\limits_V e\rho d\forall + \iint\limits_A e\rho\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}dA \qquad \left.\frac{dE}{dt}\right)_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = (\overset{*}{Q} - \overset{*}{W})_{\sigma\upsilon\sigma\tau}$$

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt}\iiint\limits_V e\,\rho d\forall + \iint\limits_A e\,\rho\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}dA$$

Μόνιμη κατάσταση

$$\dot{Q} - \boxed{\iint\limits_A p\ \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA} = \cancel{\frac{d}{dt}\iiint\limits_A e\ \rho\ d\forall} + \iint\limits_A e\ \rho\ \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA$$

ΣΩΛΗΝΩΣΕΙΣ

$$\dot{Q} = \cancel{\frac{d}{dt}\iiint_V e\;\rho\;d\forall} + \iint_A \left(e+\frac{p}{\rho}\right)\rho\,\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA$$

Υποθέσεις

1) **Ẇεμβ=0, Ẇάλλα =0**

2) **Ẇp+μ=** $-\cancel{\iint_A \mathbf{v}\cdot(\tilde{\tau}\cdot\hat{\mathbf{n}})dA} + \iint_A p\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}dA$

(αμελητέος ρυθμός παραγωγής μηχ. έργου στην επιφάνεια ελέγχου από ιξώδεις τάσεις)

3) Ασυμπίεστη ροή, ρ= σταθερή

4) Στη μόνιμη κατάσταση, d/dt =0

ΣΩΛΗΝΩΣΕΙΣ

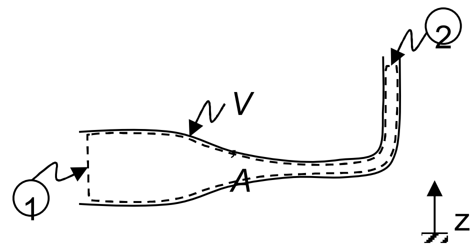
$$\dot{Q} - \cancel{\dot{W}_{\varepsilon\mu\beta}} - \dot{W}_{p+\mu} - \cancel{\dot{W}_{\acute{\alpha}\lambda\lambda\alpha}} = \frac{d}{dt}\iiint_V e\rho d\forall + \iint_A e\rho \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}} dA$$

$$\boxed{\dot{Q} = \cancel{\frac{d}{dt}\iiint_V e\ \rho\ d\forall} + \iint_A \left(e + \frac{p}{\rho}\right) \rho\ \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}} dA}$$

$$\dot{Q} = \iint_A \left(e + \frac{p}{\rho}\right) \rho\ \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}\ dA = \iint_A \left(u + \frac{1}{2}v^2 + gz + \frac{p}{\rho}\right) \rho\ \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}\ dA$$

$\boxed{e = u + \frac{1}{2}v^2 + gz =}$ ειδική ολική ενέργεια (=E α.μ.μ.)

ΣΩΛΗΝΩΣΕΙΣ



$$\dot{Q} = \iint_{A} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho \, \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = \iint_{A} \left(u + \frac{1}{2} v^2 + gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho \, \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA$$

$$= \iint_{A_1} \left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2} v^2 \right) \rho \, \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA + \iint_{A_2} \left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2} v^2 \right) \rho \, \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA$$

$$= \left(u_1 + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 \right) \iint_{A_1} \rho \, \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA + \iint_{A_1} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \rho \, \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA$$

$$+ \left(u_2 + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 \right) \iint_{A_2} \rho \, \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA + \iint_{A_2} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \rho \, \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA$$

$$= -\dot{m} \left(u_1 + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 \right) + \dot{m} \left(u_2 + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 \right) - \iint_{A_1} \frac{1}{2} v_1^2 \, \rho \, v_1 \, dA + \iint_{A_2} \frac{1}{2} v_2^2 \, \rho \, v_2 \, dA$$

ΣΩΛΗΝΩΣΕΙΣ

$$Q = -\dot{m}\left(u_1 + \frac{p_1}{\rho} + gz_1\right) + \dot{m}\left(u_2 + \frac{p_2}{\rho} + gz_2\right)$$
$$- \iint_{A_1} \frac{1}{2} v_1^2\, \rho\, v_1\, dA + \iint_{A_2} \frac{1}{2} v_2^2\, \rho\, v_2\, dA$$

$$\dot{Q} = \dot{m}(u_2 - u_1) + \dot{m}\left(\frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho}\right) + \dot{m}g(z_2 - z_1)$$
$$+ \iint_{A_2} \frac{1}{2} \rho\, v_2^3\, dA - \iint_{A_1} \frac{1}{2} \rho\, v_1^3\, dA$$

Η άνω Εξ. ισχύει για στρωτές καθώς και τυρβώδεις ροές. **Εν γένει η v δεν είναι ομοιόμορφη σε μια διατομή**. Συνήθως χρησιμοποιούμε τον εξής ορισμό,

$$\alpha = \frac{\iint_A \frac{1}{2} v^2\, \rho\, v\, dA}{\iint_A \frac{1}{2} \langle v \rangle^2\, \rho\, v\, dA}$$ **= συντελεστής παροχής κινητικής ενέργειας**

$\langle v \rangle$=σταθερό

ΣΩΛΗΝΩΣΕΙΣ

$$\alpha = \frac{\iint_A \frac{1}{2} v^2 \rho\, v\, dA}{\iint_A \frac{1}{2} < v >^2 \rho\, v\, dA}$$

m’

$$\iint_A \frac{1}{2} v^2 \rho\, v\, dA = \alpha \dot{m} \frac{< v >^2}{2}$$

$$\dot{Q} = \dot{m}(u_2 - u_1) + \dot{m}\left(\frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho}\right) + \dot{m}g(z_2 - z_1) + \dot{m}\left(\frac{1}{2}\alpha_2 < v_2 >^2 - \frac{1}{2}\alpha_1 < v_1 >^2\right)$$

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{m}} = (u_2 - u_1) + \left(\frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho}\right) + g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}(\alpha_2 < v_2 >^2 - \alpha_1 < v_1 >^2)$$

$$\boxed{\left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}\alpha_1 < v_1 >^2 + gz_1\right) = \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}\alpha_2 < v_2 >^2 + gz_2\right) + h_{o\lambda}}$$

ΣΩΛΗΝΩΣΕΙΣ

- Επιπλέον Υποθέσεις

Μόνιμη ροή, Ομοιόμορφες u και p στις διατομές 1 και 2

$$\left(\frac{p_1}{\rho}+\frac{1}{2}\alpha_1 < v_1 >^2 +gz_1\right)=\left(\frac{p_2}{\rho}+\frac{1}{2}\alpha_2 < v_2 >^2 +gz_2\right)+h_{\rho\lambda}$$

$h_{o\lambda} \equiv (u_2 - u_1) - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}}$ **= ολική απώλεια υδροστατικής κεφαλής (total head loss) [=]$(L/t)^2$, m^2/s^2**

$u_2 - u_1$ **= αύξηση της εσωτερικής ενέργειας του ρευστού (δηλ. θέρμανση του ρευστού, εν γένει ανεπιθύμητη)**

$\frac{\dot{Q}}{\dot{m}}$ **= απώλεια θερμικής ενέργειας στο περιβάλλον**

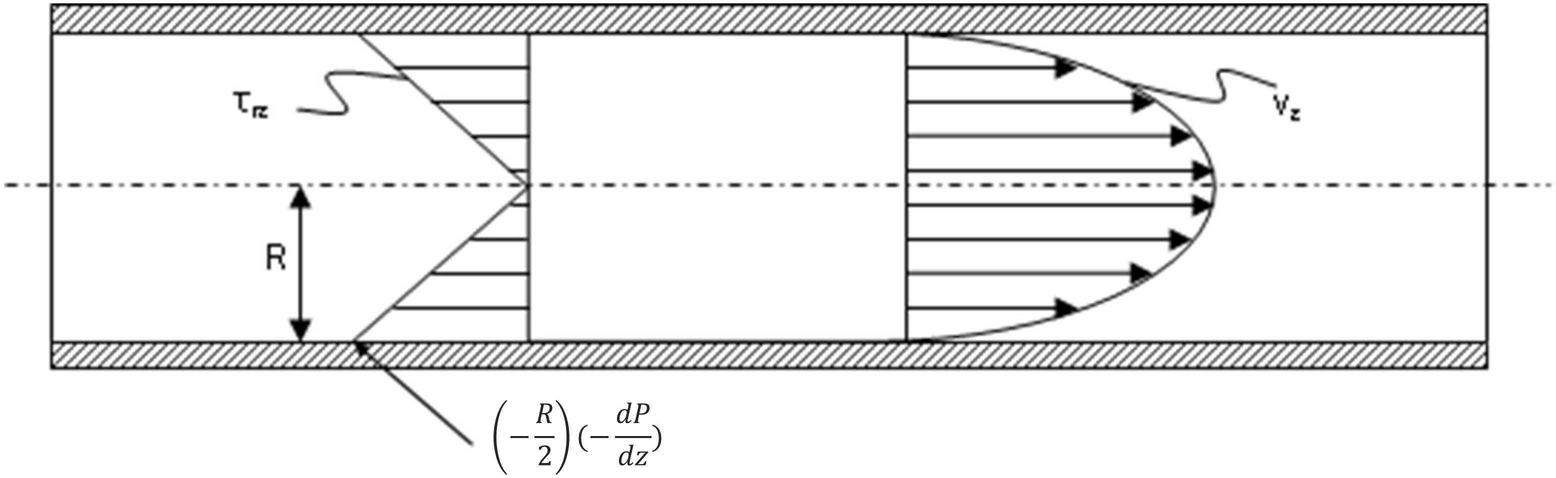
Σωληνώσεις

$$h_{o\lambda} = 0 \qquad (\text{ιδανικό ρευστό})$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{p_1}{\rho} + \dfrac{1}{2}\ \alpha_1 < v_1 >^2 + gz_1 = \dfrac{p_2}{\rho} + \dfrac{1}{2}\ \alpha_2 < v_2 >^2 + gz_2 = \sigma\tau\alpha\theta. \\ \hline \text{Εξίσωση} \quad \text{του} \quad \text{Bernoulli} \qquad \mu = 0, \quad \rho = \sigma\tau\alpha\theta. \end{array}}$$

Σωληνώσεις

Υπολογισμός τιμής του συντελεστή παροχής κινητικής ενέργειας για την περίπτωση της στρωτής ροής (Re<2100)



Ορισμός συντελεστή παροχής κινητικής ενέργειας

$$\alpha = \frac{\iint_A \frac{1}{2} v^2 \rho\, v\, dA}{\iint_A \frac{1}{2} {<}v{>}^2 \rho\, v\, dA}, \qquad \dot{m} = \iint_A \rho\, v\, dA \text{ μαζική παροχή}$$

➔ $\iint_A \frac{1}{2} v^2 \rho\, v\, dA = \alpha\, \dot{m} \frac{{<}v{>}^2}{2}$, $<v>$ =μέση ταχύτητα

Από εξίσωση Hagen Poiseuille (Α.Χ. Παγιατάκης, σελ 76/77

$v_z = \frac{R^2}{4\mu}\left(-\frac{dP}{dz}\right)[1-(\frac{r}{R})^2]$, *R η ακτίνα του σωλήνα,* $< v_z > = \frac{R^2}{8\mu}\left(-\frac{dP}{dz}\right)$

Σωληνώσεις

Υπολογισμός τιμής του συντελεστή παροχής κινητικής ενέργειας για την περίπτωση της στρωτής ροής (Re<2100)

$$\frac{v_z}{< v_z>} = \frac{\cancel{\frac{R^2}{4\mu}}\cancel{\left(-\frac{dP}{dz}\right)}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]}{\cancel{\frac{R^2}{8\mu}}\cancel{\left(-\frac{dP}{dz}\right)}} = 2\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

$$\iint_A \cancel{\frac{1}{2}}\, v^2 \rho\, v\, dA = \boldsymbol{\alpha}\, \dot{m}\, \frac{<v>^2}{\cancel{2}}$$

$\boldsymbol{\alpha}$

$$= \frac{1}{\dot{m}} \iint_A \left[\frac{v_z}{< v >}\right]^2 \rho\, v\, dA = \frac{1}{\dot{m}} \iint_A \left\{2\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\right\}^2 \rho\, 2 < v_z > \left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] dA =$$

$$a = \frac{8\,\rho}{\dot{m}} < v_z > \int_0^{2\pi}\int_0^R \boxed{\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^2}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\; r\, dr$$

$$a = \frac{16\,\pi\,\rho <v_z>}{\dot{m}} \int_0^R \boxed{\left[1-2\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^4\right]}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\; r\, dr$$

Σωληνώσεις

Υπολογισμός τιμής του συντελεστή παροχής κινητικής ενέργειας για την περίπτωση της στρωτής ροής (Re<2100)

$$a = \frac{16\,\pi\,\rho <v_z>}{\dot{m}} \int_0^R [1 - 2(\frac{r}{R})^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^4\Big] [\, 1 - (\frac{r}{R})^2 \,] \quad r\,dr$$

$$\dot{m} = \rho\, Q = \rho \{(\pi\, R^2) < v_z >\}$$

$$\int_0^R [\, 1 - (\frac{r}{R})^2\,]^2\, [\, 1 - (\frac{r}{R})^2\,] \;\; r\, dr = \int_0^R [\, 1 - 2(\frac{r}{R})^2 + (\frac{r}{R})^4] \quad [\, 1 - (\frac{r}{R})^2\,] \;\; r\, dr =$$

$$= \int_0^R \left[r - \frac{r^3}{R^2} - 2\,\frac{r^3}{R^2} + 2\,\frac{r^5}{R^4} + \frac{r^5}{R^4} - \frac{r^7}{R^6} \right] dr =$$

$$= \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4\,R^2} - 2\,\frac{R^4}{4\,R^2} + 2\,\frac{r^6}{6R^4} + \frac{R^6}{6\,R^4} - \frac{R^8}{8\,R^6} = R^2[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8}] = \frac{1}{8}\, R^2$$

$$a = \frac{16\,\pi\,\rho <v_z>}{\dot{m}} \int_0^R [1 - (\frac{r}{R})^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^4\Big] [\, 1 - (\frac{r}{R})^2 \,] \quad r\,dr$$

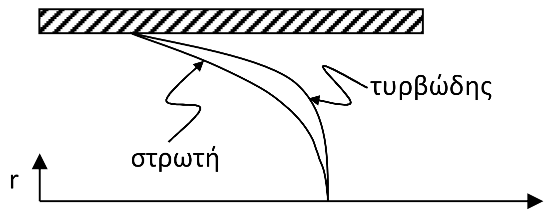
$$a = \frac{16\,\pi\,\rho \,< v_z >}{\rho\,\{(\pi\, R^2) < v_z >\}} \frac{1}{8}\, R^2 = \mathbf{2}$$

Σωληνώσεις

Συντελεστής Παροχής Κινητικής Ενέργειας, α

- **Στρωτή ροή**

$\Rightarrow$ α = 2 , καθ’ όσον $v_z / \langle v_z \rangle = 2\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$ και $v_z/v_{z,max}$=2, (για r=0)



- **Τυρβώδης ροή** $\frac{v_z}{v_{z,max}} = \left(1-\frac{r}{R}\right)^{1/n}$

Re	4×10^3	1.1×10^5	3.2×10^6
n	6	7	10

n	6	7	10
$\langle \bar{v} \rangle / \bar{v}_{max}$	0.79	0.82	0.87

Έχουμε το πειραματικό αποτέλεσμα

Re	4×10^3	1.1×10^5	3.2×10^6
n	6	7	10
α	1.08	1.05	1.03

Παρατηρούμε λοιπόν ότι για τυρβώδη ροή έχουμε: α ≈ 1

Σωληνώσεις

- **<u>Υπολογισμός της ολικής απώλειας υδροστατικής κεφαλής $h_{ολ}$</u>**

$$h_{o\lambda} = h_{\mu} + h_{\varepsilon}$$

Η h_{μ} οφείλεται σε ιξώδεις τριβές μέσα σε πλήρως ανεπτυγμένη ροή. Η h_{ε} οφείλεται σε αλλαγή διατομής, γωνίες, βαλβίδες κλπ.

Για πλήρως ανεπτυγμένη ροή μέσα σε σωλήνα σταθερής διατομής, έχουμε:
$h_{\varepsilon}= 0$, $\alpha_1=\alpha_2$,

$$\left(\frac{p_1}{\rho}+\cancel{\frac{1}{2}\alpha_1 < v_1 >^2} +gz_1\right)=\left(\frac{p_2}{\rho}+\cancel{\frac{1}{2}\alpha_2 < v_2 >^2} +gz_2\right)+h_{o\lambda}$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(z_1 - z_2) = h_{\mu} \qquad P = p + \rho g z \qquad \boxed{\frac{(P_1 - P_2)}{\rho} = h_{\mu}}$$

$$\boxed{h_{\mu} = 32\frac{\ell}{D}\frac{\mu < v >}{\rho D} = \frac{64}{Re}\frac{\ell}{D}\frac{< v >^2}{2}}$$

$$Re = \frac{\rho < v > D}{\mu}$$

Διάγραμμα Moody $f_D(\mathrm{Re}, k/D)$

$$h_\mu = 32\frac{\ell}{D}\frac{\mu < v >}{\rho D} = \frac{64}{\mathrm{Re}}\frac{\ell}{D}\frac{< v >^2}{2}$$